Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

ПЕТЪР Г. БОЯДЖИЕВ

Пусть D — открытое множество в комплексной плоскости $\bar{C}$ и $E \subset D$ — компакт. Известно, что любую аналитическую в D функцию можно равномерно на E аппроксимировать рациональными функциями порядка $\leqq n$ со скоростью $1/\varrho^n$, где ϱ — риманов модуль множества $D \setminus E$.

В статье дается необходимое и достаточное условие на компакте $p \subset \bar{C} \setminus E$ для того, чтобы существовала таблица полюсов $\{b_{nk}\} \subset P$, которой можно сопостовить таблицу $\{a_{nk}\}$ такую, что если $f(z)$ — функция, аналитическая в D, то рациональная функция $r_n(z)$ порядка $\leqq n-1$, имеющая полюсы в $b_{n1}, \ldots, b_{n,n-1}$ и интерполирующая f в точках $a_{n1}, \ldots, a_{nn}$, стремилась к f на E равномерно со скоростью $1/\varrho^n$.

1. Пусть D — открытое множество в комплексной плоскости $\bar{C}$ и E — компакт, содержащийся в D. Будем предполагать, что любая компонента D имеет непустое пересечение с E. Множество $C \setminus D$ будем обозначать через F, а пару (E, F) будем называть плоским конденсатором. Через $A(D)$ будем обозначать множество функций, однозначных и аналитических в D.

Будем предполагать, что конденсатор (E, F) — регулярен, т. е. существует функция $u(z)$, гармоническая в множестве $R = D \setminus E = \bar{C} \setminus \{E \cup F\}$, непрерывная в $\bar{R}$ и такая, что $u|_{\partial E} = 0$, $u|_{\partial F} = 1$.

Пусть Γ — гомологический класс множества R. Γ состоит из конечного числа аналитических кривых Жордана $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, в совокупности отделяющих E от F. Пусть ν — нормаль к Γ, направленная „в сторону F“, т. е. в сторону возрастания функции $u(z)$.

Определение 1. *Число*

$$c = c(E, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

называется емкостью конденсатора (E, F).

Если логарифмическая емкость обоих компактов E и F больше нуля, то $c(E, F) > 0$. Для нас важен последний случай, так как задача о скорости приближения функций из класса $A(D)$ рациональными функциями тривиальна, когда логарифмическая емкость хотя бы одного из компактов E и F равна нулю.

Число $\varrho = \exp(1/c)$, которое зависит только от конденсатора (E, F), но не и от Γ, будем называть римановым модулем конденсатора (E, F) (или множества R). Заметим, что если R — двухсвязная область, ϱ совпадает

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 5—11.

с радиусом большего круга при однолистном конформном отображении R на кольцо $1<|w|<\varrho$.

Пусть $\alpha=\{a_{nk}\}$, $n=1, 2, \ldots, k=1, 2, \ldots, n$ — таблица точек, принадлежащих E, и $\beta=\{b_{nk}\}$, $n=1, 2, \ldots, k=1, 2, \ldots, n$, таблица точек, принадлежащих F. Пару (α, β) будем называть интерполяционным процессом для класса $A(D)$.

Если $f\in A(D)$, то через $r_{n-1}(z)=r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta)$ будем обозначать рациональную функцию порядка $\leqq n-1$ вида $r_{n-1}(z)=(c_0+c_1z+\cdots+c_{n-1}z^{n-1})/(z-b_{n1})\ldots(z-b_{n,n-1})$, интерполирующую f в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$; при этом имеется ввиду кратное интерполирование: если точка a встречается в последовательности $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ k раз, то $f^{(\nu)}(a)=r_{n-1}^{(\nu)}(a)$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Определение 2. *Интерполяционный процесс (α, β) будем называть наилучшим интерполяционным процессом (н. и. п.) для класса $A(D)$, если*

$$\sup_{f\in A(D)}\varlimsup_{n\to\infty}\|f-r_{n-1}\|_E^{1/n}\leqq 1/\varrho, \quad r_{n-1}=r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta),$$

где $\|\varphi\|_E=\max\limits_{z\in E}|\varphi(z)|$.

Хорошо известно [1], [3], что для любого регулярного конденсатора существует по крайней мере один н. и. п.

Пусть (α, β) произвольный фиксированный н. и. п. для класса $A(D)$. Тогда любой компакт $P\subset\overline{\mathbb{C}}$, содержащий β, будем называть носителем полюсов н. и. п. (α, β).

2. Одна из важнейших задач теории приближения функций из класса $A(D)$ рациональными функциями состоит в том, чтобы дать характеристику тех компактов, на которых можно ставить полюсы аппроксимирующих рациональных функций, чтобы получить приближение того же порядка как у наилучшего. Точнее, обозначим через R_n класс всех рациональных функций порядка $\leqq n$ и через R_n^P — класс рациональных функций порядка $\leqq n$, полюсы которых принадлежат P. Если $f\in A(D)$, то через $R_n(f)$ будем обозначать наилучшее приближение f посредством рациональных функций из R_n:

$$R_n(f)=\inf_{r_n\in R_n}\|f-r_n\|_E;$$

аналогично

$$R_n^P=\inf_{r_n\in R_n^P}\|f-r_n\|_E.$$

Задача, о которой шла речь выше, состоит в следующем: описать те компакты P, для которых

$$\sup_{f\in A(D)}\varlimsup_{n\to\infty}[R_n(f)]^{1/n}=\sup_{f\in A(D)}\varlimsup_{n\to\infty}[R_n^P(f)]^{1/n}.$$

Так например, из результатов Уолша [2] и Левина и Тихомирова [3] можно заключить, что этим свойством обладает, например, множество $P=\partial D$.

Задача, которая решается в этой работе, гораздо скромнее: именно, дать описание тех подкомпактов P компакта F, которые являются носителями полюсов некоторого наилучшего интерполяционного процесса для класса $A(D)$. Эту задачу мы решаем терминами одной экстремальной задачи.

3. Пусть (E, F) — произвольный регулярный кондесатор. Положим

$$\sigma_n(E, F) = \sigma_n = \inf_{r \in R_n} [\max_{z \in E} |r(z)| / \min_{z \in F} |r(z)|].$$

Хорошо известно [4], [5], что последовательность $\{\sqrt[n]{\sigma_n}\}$ сходится и

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n} = 1/\varrho. \tag{1}$$

Рассмотрим кроме того величину

$$\sigma_n^P = \inf_{r \in R_n^P} [\max_E |r(z)| / \min_F |r(z)|]$$

и пусть $\sigma^P = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sigma_n^P]^{1/n}$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Компакт $P \subset F$ является носителем полюсов некоторого н. и. п. для класса $A(D)$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \sigma^P = 1/\varrho$.*

Доказательство разобъем на несколько лемм.

Пусть $r_n \in R_n^P$ такая, что $\sigma_n^P = \max_E |r_n(z)| / \min_F |r_n(z)|$. Существование такой рациональной функции следует из [2], гл 12. Пусть $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn}$ — полюсы $r_n(z)$.

Рассмотрим функцию $v_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk})/n$, где $g(z, b_{nk})$ — функция Грина для $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ с полюсом в β_{nk}. Положим $\mu_n = \min_{z \in F} v_n(z)$. Тогда имеет место следующая

Лемма 1. *Если $\sigma^P \leq 1/\varrho$, то последовательность $\{\mu_n\}$ сходится и ее предел равен $1/c$.*

Доказательство. Хорошо известно [5], что $\mu_n \leqq 1/c$ и следовательно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n \leqq 1/c. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$\ln |r_n(z)| - \ln \max_E |r_n(z)| - \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk}).$$

Она субгармонична в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ и на ∂E не провосходит 0. Тогда, согласно принципа максимума имеем

$$|r_n(z)| / \max_E |r_n(z)| \leqq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} g(z, b_{nk})\right) = \exp(n v_n(z)), \quad z \in E.$$

Отсюда получаем

$$\sigma_n^P = \max_E |r_n(z)| / \min_F |r_n(z)| \geq e^{-n\mu_n},$$

т. е.

$$(3) \qquad 1/\varrho \geq \sigma^P = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sigma_n^P} \geq \exp\left(-\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu_n\right)$$

или

$$(4) \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu_n \geq \ln \varrho = 1/c.$$

Из (2) и (4) следует что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 1/c$.

Лемма 2. *Равномерно внутри* $R = D \setminus E$ *имеет место равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(z) = u(z)/c$.

Доказательство. В силу того, что последовательность гармонических в R функций $u_n(z) = u(z)/c - v_n(z)$ равномерно ограничены внутри R, то для доказательство леммы достаточно показать, что любая предельная функция $v(z)$ последовательности $\{u_n(z)\}$ тождественно равна нулю в R.

Для любого натурального n имеем

$$u_n|_{\partial E} = 0, \ \max_{\partial F} u_n(z) = 1/c - \min_{\partial F} v_n(z) = 1/c - \mu_n \geqq 0.$$

Таким образом $\max\limits_{\partial R} u_n(z) = 1/c - \mu_n$ и согласно принципа максимума

$$(5) \qquad u_n(z) \leqq 1/c - \mu_n .$$

Пусть последовательность $\{u_{nk}(z)\}$ сходится равномерно внутри R к $v(z)$. Тогда из (5), на основании леммы 1, получим $v(z) \leqq \lim\limits_{k\to\infty} (1/c - \mu_n) = 0$, $z \in R$, откуда вытекает

$$(6) \qquad \sup_{\zeta \in \partial F} \overline{\lim_{z\to\zeta}} v(z) \leqq 0, \quad z \in R.$$

С другой стороны, так как $\{u_{nk}(z)\}$ равномерно внутри R сходится к $v(z)$ и $u_{nk}|_{\partial E} = 0$ для любого k, то из принципа максимума вытекает, что $v(z)$ непрерывна вплоть до ∂E и

$$(7) \qquad v|_{\partial E} = 0.$$

Пусть Γ — гомологический класс для R и ν — нормаль к Γ, направленная в сторону F. Тогда, очевидно

$$\int_\Gamma \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds = 0$$

и следовательно

$$(8) \qquad \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0.$$

Из (6), (7), (8) и известной теоремы Ландау — Оссермана [6] об единственности гармонических функций следует, что $v(z)\equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\beta=\{b_{nk}\}$, $b_{nk}\in P$, $n=1, 2, \ldots, k=1, 2, \ldots, n$ — *таблица точек, определенных в лемме 1. Тогда существует таблица точек* $\alpha=\{a_{nk}\}$, $a_{nk}\in E$, $n=1, 2, \ldots, k=1, 2, \ldots, n$, *такая, что пара* (α, β) *является н. и. п. для класса* $A(D)$.

Доказательство. Построим таблицу α методом Шеня [7].

Функция

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}|z_i-z_j|/\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n-1}|z_i-b_{nj}|$$

непрерывна на компакте $E^n=E\times E\times\cdots\times E$ и значит достигает там своего максимума V_n. Выберем точки $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, a_{n,i}\in E$, $i=1, 2, \ldots, n$, так, чтобы $V(a_{n1}, \ldots, a_{nn})=V_n$. Пусть ε, $0<\varepsilon<1$, произвольно и t фиксированная точка, принадлежащая линии уровня $L_\varepsilon=\{z\in R: u(z)=\varepsilon\}$. Функция

$$r_{n-1}(z)=\sum_{k=1}^{n}(a_{nk}-t)^{-1}\,.\,V(a_{n1}, \ldots, a_{n,k-1}, z, a_{n,k+1}, \ldots, a_{nn})/V_n$$

рациональна и $r_{n-1}(a_{nk})=1/(a_{nk}-t)$, т. е. она интерполирует функцию $f(z)=1/(z-t)$ в точках $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ и очевидно имеет полюсы в точках $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,n-1}$. Кроме того очевидно, что

$$|r_{n-1}(z)|\leq n/\varrho(E, L_\varepsilon),\ z\in E, \tag{9}$$

где $\varrho(E, L_\varepsilon)$ — расстояние от E до L_ε. Из формулы

$$1/(z-t)-r_{n-1}(z)=[\omega_n(z)/\omega_n(t)]\,.\,[(z-b_{nn})/(t-b_{nn})],$$

где $\omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_{nk})/(t-b_{nk})$ и из (9) получаем

$$|\omega_n(z)/\omega_n(t)|\leq M(n+1)/\varrho(E, L_\varepsilon);\ z\in E \text{ и } t\in L_\varepsilon \text{ — произвольны.} \tag{10}$$

Здесь $M=\max|(z-t)(t-v)/(z-v)|$* и максимум берется по всем $z\in E$ $t\in L_\varepsilon$, $v\in F$.

Фиксируем $z\in E$ и рассмотрим функцию $\varphi_n(t)=nv_n(t)+\ln|\omega_n(z)/\omega_n(t)|$. Она субгармонична на $\overline{C}\setminus E$ и для $t\in L_\varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_n(t)\leq \ln[M(n+1)/\varrho(E, L_\varepsilon)]+\nu_n(\varepsilon), \tag{11}$$

где $\nu_n(\varepsilon)=\max\limits_{L_\varepsilon} n\,.\,v_n(t)$. При этом, оценка (11) от $z\in E$ не зависит.

Мы будем считать ε настолько малым, что $0<\varepsilon<1-\varepsilon$. Тогда из (11) по принципу максимума получаем

$$\ln M(n+1)/\varrho(E, L_\varepsilon)+\nu_n(\varepsilon)-nv_n(t)\geq \ln|\omega_n(z)/\omega_n(t)|, \tag{12}$$

где $t\in L_{1-\varepsilon}=\{z\in R: u(z)=1-\varepsilon\}$. Положим $\mu_n(\varepsilon)=\min\limits_{z\in L_{1-\varepsilon}} nv_n(z)$. Тогда (12) дает

---

* Отметим, что без ограничения общности можем предполагать, что $E\cup F$ ограничено, так что $M<+\infty$.

$$(13) \qquad |\omega_n(z)/\omega_n(t)|^{1/n} \leq [M(n+1)/\varrho(E, L_\varepsilon)]^{1/n} \cdot \exp(\nu_n(\varepsilon)/n - \mu_n(\varepsilon)/n).$$

Пусть $f \in A(D)$ — произвольна. Тогда по известной интерполяционной формуле Уолша — Эрмита имеем

$$(14) \qquad f(z) - r_{n-1}(z, f, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{1-\varepsilon}} \frac{f(t)}{t-z} \cdot \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)} \cdot \frac{z-b_{nn}}{t-b_{nn}}\, dt.$$

Если положим $M_\varepsilon = \max |f(t)(z-\zeta)/2\pi i(t-z)(t-\zeta)|$, где максимум берется по всем $z \in E$, $t \in L_{1-\varepsilon}$ и $\zeta \in F$, то из (13) и (14) получим

$$(15) \qquad \|f - r_{n-1}\|_E^{1/n} \leq [M_\varepsilon M(n+1)/\varrho(E, L_\varepsilon)]^{1/n} \cdot \exp[(\nu_n(\varepsilon) - \mu_n(\varepsilon))/n].$$

Но по лемме 2 имеем

$$(16) \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(\varepsilon)/n = \varepsilon/c, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n(\varepsilon)/n = (1-\varepsilon)/c.$$

Тогда (15) и (16) дают

$$(17) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|f - r_{n-1}\|_E^{1/n} \leq \varrho^{2\varepsilon}/\varrho.$$

Ввиду произвольности ε из (17) вытекает, что (α, β) н. и. п. для класса $A(D)$

Вернемся к доказательству теоремы.

Достаточность. Если $\sigma^p = 1/\varrho$, то построенный в лемме 3 интерполяционный процесс является н. и. п. для класса $A(D)$.

Необходимость. Пусть (α, β), $\beta \subset P$ — н. и. п. для класса $A(D)$. Тогда, как известно [8], равенство

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} |\omega_n(z)/\omega_n(t)|^{1/n} = \varrho^{u(z)-u(t)}, \quad \omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_{nk}}{z-b_{nk}},$$

выполняется равномерно внутри $R \times R$. Но как показал Багби [1], (18) эквивалентно следующему равенству:

$$(19) \qquad \lim (\max_E |\omega_n(z)|/\min_F |\omega_n(z)|)^{1/n} = 1/\varrho.$$

Тем самым $\sigma^P \leq 1/\varrho$.

С другой стороны, как указывалось выше, $1/\varrho = \sigma \leq \sigma^P$. Следовательно $\sigma^P = 1/\varrho$ и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Th. Bagby. On interpolation by rational functions. *Duke Math. J.*, **36**, 1969, 95—103.
2. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.
3. А. Л. Левин, В. М. Тихомиров. Об одной задаче Ерохина. *Успехи мат. наук*, **23**, 1968, № 1 (139), 119—132.
4. А. А. Гончар. О задачах Золотарева, связанных с рациональными функциями. *Мат. сб.*, **78**, 1969, № 4, 640 — 654.

5. H. Widom. Rational approximation and n-dimentional diameter. *J. Approx. theory*. **5**, 1972, 343—361.
6. H. Landau, R. Osserman. On analytic mappings of Riemann surfaces. *J. d'Anal. Math.*, **7**, 1959—60, 249—279.
7. Y. Shen. On interpolation and approximation by rational functions with preassigned poles. *J. Chinese Math. Soc.*, **1**, 1936, 154—173.
8. П. Бояджиев Рационална апроксимация на аналитични функции. Математика и математическо образование. Доклади на Втора пролетна конференция на БМД, Видин, 6—8 април 1973. София, 1974, 64—74.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

София, 1000 Болгария
п. я. 373

Поступила 15. 5. 1973