Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

ВАСИЛ А. ПОПОВ

Показано, что для наилучшего приближения $R_n(f)_r$ функции f ограниченной вариации рациональными функциями n-ного порядка в метрике Хаусдорфа имеет место

$$R_n(f)_r = O(\ln\ln n/n).$$

Показано, что существует постоянная $c(V)$, зависящая только от V такая, что для каждой функции, с вариацией $\leqq V$ на отрезке $[0, 1]$, существует рациональная функция q_n n-ного порядка такая, что для каждого $x \in [0, 1]$ имеет место

$$|f(x)-q_n(x)| \leqq \omega(f, x; c(V)\ln\ln n/n)+c(V)/n,$$

где $\omega(f, x; \delta)$ — локальный модуль непрерывности функции f в точке x:

$$\omega(f, x; \delta) = \sup_{|y-x|\leqq\delta} |f(y)-f(x)|.$$

Как известно, в полиномиальном случае в обеих оценках на месте $\ln\ln n/n$ стоит $\ln n/n$.

В нескольких работ, связанных с аппроксимированием рациональными функциями, рассматривается вопрос о нахождении классов функций, для которых наилучшее равномерное приближение рациональными функциями n-ного порядка лучше, чем наилучшее равномерное приближение алгебраическими многочленами n-ной степени (см. напр. [1]—[7]).

В [3] Г. Фройд показал, что один из этих классов — класс функций ограниченной вариации, которые принадлежат к $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$. Г. Фройд доказал, что наилучшее равномерное приближение рациональными функциями n-ного порядка для этого класса имеет порядок $O(\ln^4 n/n)$. Как хорошо известно, наилучшее равномерное приближение функции этого класса алгебраическими многочленами n-ной степени в общем случае имеет порядок $O(n^{-\alpha})$.

В этой заметке покажем, что рациональное приближение функции ограниченной вариации имеет лучший порядок, чем порядок полиномиальной аппроксимации еще для двух типов аппроксимации:

а. Для наилучшего приближения $R_n(f)_r$ функции f рациональными функциями n-ного порядка в метрике Хаусдорфа. Показываем, что если f имеет ограниченную вариацию, то

$$R_n(f)_r = O(\ln\ln n/n)$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 96—103.

(теорема 1), при этом наилучшее приближение $E_n(f)_r$ алгебраическими многочленами n-ной степени в метрике Хаусдорфа, вообще говоря, имеет порядок $\ln n/n$ [8] (даже если f — абсолютно непрерывная функция [9]).

6. Для локального приближения функции. Задача локального приближения функции ставится так [10]: пусть для каждого натурального n задана n-параметрическая фамилия функции Φ_n. Требуется найти максимальный порядок убывания функции $\varphi(n)$ такой, что для каждой функции f данного класса A существует функция $\Psi_n \in \Phi_n$ такая, что для каждого $x \in [a, b]$ имеет место

$$|f(x)-\Psi_n(x)| \leq \omega(f, x; \varphi(n)) + O(1/n),$$

где $\omega(f, x; \delta)$ — локальный модуль непрерывности функции f в точке x:

$$\omega(f, x; \delta) = \sup_{|y-x| \leq \delta} |f(y)-f(x)|.$$

В [10] показано, что если Φ_n — совокупность H_n всех алгебраических многочленов n-ной степени, то на множестве всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций порядок убывания функции $\varphi(n)$ является $\ln n/n$, и этот порядок не может быть улучшен на классе монотонных функций с вариацией ≤ 1.

Здесь показываем, что если Φ_n — множество R_n всех рациональных функций n-ного порядка, т. е. $r \in R_n$, если $r(x) = a_k x^k + \cdots + a_0/(b_m x^m + \cdots + b_0)$, $k \leq n$, $m \leq n$, и A — класс функций ограниченной вариации с вариацией ≤ 1, то порядок функции $\varphi(n)$ лучше, чем $\ln n/n$, именно, доказываем, что $\varphi(n)$ имеет порядок не больше чем $\ln\ln n/n$ (теорема 2).

1. Будем рассматривать действительные функции, заданные на отрезке $[a, b]$. Хаусдорфовое расстояние $r(f, g; \alpha)$ с параметром α, $\alpha>0$, введено в [11, 12]. Для того, чтобы определить расстояние $r(f, g; \alpha)$ между функциями f и g, которые не являются обязательно непрерывными на отрезке $[a, b]$, необходимо ввести понятие дополненный график функции [12, 13]. Так как мы будем рассматривать только функции ограниченной вариации, определим дополненный график только для таких функций.

Дополненный график $\bar{f}$ функции f ограниченной вариации — это множество точек (x, y) плоскости такие, что $x \in [a, b]$ и

$$y \in [\min\{f(x), f(x-0), f(x+0)\}, \max\{f(x), f(x-0), f(x+0)\}].$$

Другими словами, в точках, где f не является непрерывной, мы „дополняем" график функции вертикальным отрезком, который содержит точки (x, y), где y находится между $f(x)$, $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Хаусдорфовое расстояние $r(f, g; \alpha)$ с параметром $\alpha, \alpha>0$, между функциями f и g определяется следующим образом:

$$r(f, g; \alpha) = \max_{x \in [a, b]} \max\{h(f, g; x)_\alpha, h(g, f; x)_\alpha\},$$

где

$$h(f, g; x)_\alpha = \max_{(x, y) \in \bar{f}} \min_{(x', y') \in \bar{g}} \max\left\{\frac{1}{\alpha}|x-x'|, |y-y'|\right\}.$$

Расстояние $r(f, g; \alpha)$ можно рассматривать как обобщение равномерного расстояния

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

так как, если f и g — непрерывные функции, то

$$\lim_{\alpha \to 0} r(f, g; \alpha) = \varrho(f, g).$$

Для основных свойств хаусдорфового расстояния см. [11—13] (в [13] рассмотрен детально случай $\alpha = 1$ — „классическое" хаусдорфовое расстояние между функциями, введено в теории аппроксимации Бл. Сендовым [14]).

Пользуясь леммой 4 из [13], из определения $r(f, g; \alpha)$ сразу получается следующая

Лемма 1. *Пусть существуют числа $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для каждого $x \in [a, b]$ существуют интервалы $[x', x'']$, $[\widetilde{x}', \widetilde{x}'']$, $x \in [x', x'']$, $[\widetilde{x}', \widetilde{x}'']$, $|x' - x''| \leq \delta$, $|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''| \leq \delta$ такие, что если $(x, y) \in \bar{f}$, то $\min\limits_{(t, u) \in \bar{g}} u - \varepsilon \leq y \leq \max\limits_{(t, u) \in \bar{g}} u + \varepsilon$, где $t \in [x', x'']$, и если $(x, \widetilde{y}) \in \bar{g}$, то*

$$\min_{(t, u) \in \bar{f}} u - \varepsilon \leq \widetilde{y} \leq \max_{(t, u) \in \bar{f}} u + \varepsilon, \quad \text{где } t \in [\widetilde{x}', \widetilde{x}''].$$

Тогда $r(f, g; \alpha) \leq \max\{\delta/\alpha, \varepsilon\}$.

Наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами n-ной степени относительно хаусдорфового расстояния с параметром α определяется через

$$E_n(f; \alpha) = \inf_{p \in H_n} r(f, p; \alpha).$$

В случае $\alpha = 1$ по традиции пишем

$$E_n(f; 1) = E_n(f)_r.$$

Наилучшее приближение функции f рациональными функциями n-ного порядка относительно хаусдорфового расстояния с параметром α определяется через

$$R_n(f; \alpha) = \inf_{q \in R_n} r(f, q; \alpha)$$

и

$$R_n(f; 1) = R_n(f)_r.$$

В [12] получен следующий результат:

$$E_n(f; \alpha) \leq c_1 \max\left\{\frac{\ln \alpha n \omega\left(f; \frac{1}{n}\right)}{\alpha n}, \frac{1}{\alpha n}\right\}, \tag{1}$$

где c_1 — абсолютная постоянная, зависящая только от отрезка $[a, b]$, а $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности функции f:

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Можно считать, что $c_1 \geq 1$.

Будем пользоваться следующим результатом А. А. Гончара [6]: Существует абсолютная постоянная c_2, такая, что для каждого $n \geq l$ и $N \geq l$ существует рациональная функция $r_{n,N}$ порядка не выше $c_2 \ln n \ln N$, такая, что

$$
\begin{aligned}
&|r_{n,N}(x)| \leqq 1/N && \text{для} \quad -1 \leqq x \leqq -1/n, \\
&0 \leqq r_{n,N}(x) \leqq 1 && \text{для} \quad |x| \leqq 1/n, \\
&|1-r_{n,N}(x)| \leqq 1/N && \text{для} \quad 1/n \leqq x \leqq 1.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Можно считать, что $c_2 \geq 1$.

Будем пользоваться также следующей леммой [12]:

Лемма 2. *Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $x \in [a, b]$ и $\alpha > 0$. Тогда*

$$|f(x)-g(x)| \leqq \omega(f, x;\ \alpha r(f, g;\ \alpha)) + r(f, g;\ \alpha).$$

Доказательство. Так как f — непрерывная функция, то $\bar{f} = f$. Пусть $x \in [a, b]$ и $a > 0$. Тогда для точки $(x, g(x))$ существует точка $(y, f(y))$ такая, что $|x-y| \leqq \alpha r(f, g;\alpha)$; $|g(x)-f(y)| \leqq r(f, g;\alpha)$. Следовательно $|f(x)-g(x)| \leqq |f(x)-f(y)| + |f(y)-g(x)| \leqq \omega(f, x;\ \alpha r(f, g;\alpha)) + r(f, g;\alpha)$.

2. Для простоты докажем наши утверждения для случая $[a, b] = [0, 1]$. Это влияет только на постоянные, которые участвуют в оценках, а не на порядок, который будет для нас существенным.

Пусть заданы числа $V > 0$ и $\alpha > 0$ и n — натуральное число. Будем предполагать, что $\alpha n V \geq e$ и $n \geqq 3$. Положим

$$\beta_n = c_1 \max\left\{\frac{\ln(V\alpha c_2(\ln n)\ln(\alpha nV))}{\alpha n},\ \frac{1}{\alpha n}\right\},$$

$$\gamma_n = \frac{Vc_2(\ln n)\ln(\alpha nV)}{n}.$$

Очевидно

$$\alpha\beta_n \geqq 1/n. \tag{3}$$

Пусть натуральное число m удовлетворяет

$$1/(4(m+1)) \leqq \alpha\beta_n < 1/4m. \tag{4}$$

Разобьем интервал $[0, 1]$ на $2m$ равных частей через точки $i/2m$, $i = 0, \ldots, 2m$.

Пусть f — ступенчатая функция, ограниченной вариации с вариацией $\leqq V$ и скачками только в точках $i/2m$, $i = 1, \ldots, 2m-1$. Мы предполагаем для определенности, что f непрерывна справа. Представим функцию f в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где функции f_1 и f_2 строятся следующим образом: функции f_1 и f_2 являются ступенчатыми функциями со скачками только в точках $i/2m$, $i = 1, \ldots, 2m-1$. Пусть σ_i — скачок функции f в точке $i/2m$, $i = 1, \ldots, 2m-1$. Если $|\sigma_i| \leqq \gamma_n$, то f_1 имеет в точке $i/2m$ скачок σ_i, если $|\sigma_i| > \gamma_n$, то f_1 не имеет скачок в точке $i/2m$. Так как $1/2m > 1/n$, то очевидно

$$\omega(f_1;\ 1/n) \leqq \gamma_n. \tag{5}$$

Положим $f_2=f-f_1$. Ясно, что f_2 является тоже ступенчатой функцией со скачками только в точках $i/2m$, $i=1,\ldots,2m-1$. Кроме того, все скачки функции f_2 больше чем γ_n. Так как очевидно $V_0^1 f_2 \leqq V_0^1 f \leqq V$, где $V_0^1 g$ обозначает вариацию функции g в интервале $[0, 1]$, то число s скачков функции f_2 меньше V/γ_n, т. е.

$$s \leqq n/c_2 (\ln n) \ln (\alpha n V). \tag{6}$$

Заметим, что если функция f_1 имеет скачок в точке $i/2m$, то f_2 не имеет скачок в этой точке и наоборот.

Функцию f_1 мы аппроксимируем с алгебраическими многочленами в метрике Хаусдорфа. Пользуясь (1) и (5), получаем, что существует алгебраический многочлен P_n n-ной степени такой, что

$$r(f_1, P_n; \alpha) \leqq c_1 \max\left\{\frac{\ln(\alpha n \gamma_n)}{\alpha n}, \frac{1}{\alpha n}\right\} = \beta_n . \tag{7}$$

Положим $x_i=(2i-1)/4m$, $i=1,\ldots,2m$.

Из (4), (7) и определения хаусдорфового расстояния с параметром α сразу получаем, что многочлен P_n n-ной степени удовлетворяет следующие неравенства:

$$-\beta_n + \min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_1(t) \leqq P_n(x) \leqq \beta_n + \max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_1(t)$$

для $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=2,\ldots,2m$,

$$|f_1(x_i)-P_n(x_i)| \leqq \beta_n, \quad i=1,\ldots,2m, \tag{8}$$

$$|f_1(x)-P_n(x)| \leqq \beta_n$$

для $0\leqq x\leqq 1/4m$ и для $(4m-1)/4m \leqq x \leqq 1$.

Функцию f_2 аппроксимируем, пользуясь результатом А. А. Гончара (2), следующим образом: Положим $N=\alpha n V$ и $r_{n,N}=r_n$. Функция r_n — рациональная функция степени не больше чем $c_2(\ln n)\ln(\alpha n V)$. Пусть δ_i — скачок функции f_2 в точке $i/2m$. Положим $Q_n(x)=\sum_{i=1}^{2m-1}\delta_i r_n(x-i/2m)$.

В силу (6) число s отличных от нуля δ_i меньше $n/c_2(\ln n)\ln(\alpha n V)$ и следовательно Q_n является рациональной функцией n-ного порядка.

Оценим $Q_n(x)$ для $x\in[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$. Пользуясь (2) и тем, что $1/4m > 1/n$, получаем

$$|Q_n(x)| \leqq \left|\sum_{i=1}^{i_0-1}\delta_i r_n(x-i/2m)+\delta_{i_0} r_n(x-i_0/2m)\right|$$

$$+\left|\sum_{i=i_0+1}^{2m-1}\delta_i r_n(x-i/2m)\right| \leqq \max\left\{\sum_{i=1}^{i_0-1}\delta_i, \sum_{i=1}^{i_0}\delta_i\right\} + V\frac{1}{\alpha n V},$$

$$|Q_n(x)| \geqq \left|\sum_{i=1}^{i_0}\delta_i r_n(x-i/2m)\right| - \left|\sum_{i=i_0+1}^{2m-1}\delta_i r_n(x-i/2m)\right|$$

$$\geq \min\left\{\sum_{i=1}^{i_0-1}\delta_i, \sum_{i=1}^{i_0}\delta_i\right\} - V\frac{1}{\alpha nV}.$$

Следовательно

$$-\frac{1}{\alpha n} + \min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_2(t) \leq Q_n(x) \leq \frac{1}{\alpha n} + \max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_2(t) \tag{9}$$

для $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=2, \ldots, 2m$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} &|Q_n(x_i)-f_2(x_i)| \leq 1/\alpha n, \quad i=1, \ldots, 2m, \\ &|Q_n(x)-f_2(x)| \leq 1/\alpha n \end{aligned} \tag{10}$$

для $0\leq x\leq 1/4m$ и для $(4m-1)/4m\leq x\leq 1$.

По построению в интервале $[x_{i-1}, x_i]$ имеет скачок только одна из функций f_1 и f_2. Следовательно

$$\begin{aligned} &\min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_1(t) + \min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_2(t) = \min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f(t), \\ &\max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_1(t) + \max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f_2(t) = \max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Из (3), (8)—(11) следуют неравенства

$$-2\beta_n + \min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f(t) \leq P_n(x) + Q_n(x) \leq 2\beta_n + \max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} f(t) \tag{12}$$

для $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=2, \ldots, 2m$;

$$|f(x_i) - (P_n(x_i) + Q_n(x_i)| \leq 2\beta_n, \quad i=1, \ldots, 2m, \tag{13}$$

$$|f(x) - (P_n(x) + Q_n(x))| \leq 2\beta_n \tag{14}$$

для $x\in[0, 1/4m]$ и для $x\in[(4m-1)/4m, 1]$.

Так как для $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=2, \ldots, 2m$,

$$\min\{f(x_{i-1}), f(x_i)\} \leq f(x) \leq \max\{f(x_{i-1}), f(x_i)\},$$

то из (13) следует

$$-2\beta_n + \min_{t\in[x_{i-1}, x_i]} (Q_n(t)+P_n(t)) \leq f(x) \leq 2\beta_n + \max_{t\in[x_{i-1}, x_i]} (Q_n(t)+P_n(t)) \tag{15}$$

для $x\in[x_{i-1}, x_i]$.

Из (4), (12), (14), (15) и лемма 1 следует, что

$$r(f, Q_n + P_n; \alpha) \leq \max\{1/2\alpha m, 2\beta_n\} \leq 4\beta_n.$$

Так как Q_n+P_n является рациональной функцией $2n$-ного порядка, получаем, что если f является ступенчатой функцией с вариации $\leq V$ и скачками в точках $i/2m$, $i=1, \ldots, 2m-1$, то существует $q_n\in R_n$ такая, что имеет место

$$r(f, q_n; \alpha) \leq c_3 \max\left\{\frac{\ln(V\alpha(\ln n)\ln(\alpha nV))}{\alpha n}, \frac{1}{\alpha n}\right\}, \tag{16}$$

где c_3 — абсолютная постоянная.

Но каждую функцию g ограниченной вариации с вариации $\leq V$ можно приближать относительно расстояния Хаусдорфа с параметром α ступенчатыми функциями с вариацией $\leq V$ со скачками в точках $i/2m$, $i=1, \ldots, 2m-1$, с точностью $1/\alpha m$.

Действительно, положим

$$f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{t \in [(i-1)/m,\ i/m]} g(t) & \text{для } x \in [(2i-2)/2m,\ (2i-1)/2m) \\ \inf\limits_{t \in [(i-1)/m,\ i/m]} g(t) & \text{для } x \in [(2i-1)/2m,\ i/m). \end{cases}$$

Тогда, применяя лемму 1, получаем

$$r(f, g; \alpha) \leq 1/\alpha m. \tag{17}$$

Из (4), (16) и (18) получаем

$$r(g, q_n; \alpha) \leq r(g, f; \alpha) + r(f, q_n; \alpha) \leq c_4 \max\left\{\frac{\ln(V\alpha(\ln n)\ln(\alpha nV))}{\alpha n}, \frac{1}{\alpha n}\right\},$$

где c_4 — абсолютная постоянная.

Таким образом доказана

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$ и f — функция ограниченной вариации с вариацией $\leq V$ в интервале $[0, 1]$. Тогда для тех n, для которых $\alpha nV \geq e$, имеет место*

$$R_n(f; \alpha) \leq c_4 \max\left\{\frac{\ln(V\alpha(\ln n)\ln(\alpha nV))}{\alpha n}, \frac{1}{\alpha n}\right\},$$

где c_4 — абсолютная постоянная.

Следствие. Пусть f — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$ и α — фиксированное число. Тогда

$$R_n(f; \alpha) \leq c(V, \alpha)\frac{\ln\ln n}{n},$$

где $c(V, \alpha)$ — постоянная, зависящая только от вариации функции V и α. В случае $\alpha = 1$ получаем

$$R_n(f)_r = O\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right).$$

3. Рассмотрим теперь случай локального приближения.

Пусть f — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$ с вариацией $\leq V$. Положим $\alpha = \ln n$. Применяя теорему 1, получаем, что для тех n, для которых $Vn\ln n \geq e$, существует рациональная функция n-ного порядка q_n такая, что

$$r(f, q_n; \ln n) \leq c_4 \max\left\{\frac{\ln(V\ln^2 n \ln(Vn\ln n))}{n\ln n}, \frac{1}{n\ln n}\right\}.$$

Из этого следует, что существует постоянная $c(V)$, зависящая только от V такая, что

$$r(f,\ q_n;\ \ln n) \leq c(V)\frac{\ln\ln n}{n\ln n}. \tag{18}$$

Из леммы 2 и (18) получаем для каждого $x \in [0, 1]$

$$|f(x)-q_n(x)| \leq \omega\left(f, x;\ c(V))\frac{\ln\ln n}{n}\right) + c(V)\frac{\ln\ln n}{n\ln n}. \tag{19}$$

Из (19) следует

Теорема 2. *Существует постоянная $c(V)$, зависящая только от V такая, что для каждой функции f ограниченной вариации с вариацией $\leq V$ на $[0, 1]$ существует рациональная функция q_n n-ного порядка такая, что для каждого $x \in [0, 1]$ имеет место*

$$|f(x)-q_n(x)| \leq \omega\left(f, x;\ c(V)\frac{\ln\ln n}{n}\right) + \frac{c(V)}{n}.$$

Замечание. Нам неизвестно, является ли порядок $(\ln\ln n)/n$ в теоремах 1 и 2 точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math. J.*, **11**, 1969, 11—14.
2. P. Szüsz, P. Turan. On the constructive theory of functions III. *Studia Sci. Math. Hung.*, **1**, 1966, 315—322.
3. G. Freud. Uber die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17**, 1966, 313—324.
4. G. Freud, J. Szabados. Rational approximation to x^α. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18**, 1967, 393—399.
5. J. Szabados. Rational approximation of analiticfunctions with finite number of singularities on the real axis. *Acta Math. Acad. Hung.*, **20**, 1969, 159—167.
6. А. А. Гончар. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения. *Матем. сборник*, **72** (114), 1967, № 3, 489—503.
7. А. П. Буланов. Рациональная аппроксимация выпуклых функций с данным модулем непрерывности. *Матем. сборник*, **84** (126), 1971, № 3, 476—494.
8. Бл. Сендов. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. *Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, **55**, 1962, 1—39.
9. Т. П. Боянов. О порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами относительно расстояния хаусдорфовского типа. *Доклады БАН*, **23**, 1970, № 6, 635—638.
10. В. А. Попов. Локальное приближение функций. *Матем. заметки*, **17**, 1975, № 3, 369—382.
11. Бл. Сендов, В. А. Попов. Аналог теоремы С. М. Никольского для приближения функций алгебраическими многочленами в хаусдорфовой метрике. Труды Международной конф. констр. теории функ., Варна, 1970, 95—105.
12. Bl. Sendov, V. A. Popov. On a Generalization of Gackson's Theorem for Best Approximation. *J. Approx. Theory*, **9**, 1973, 102—111.
13. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории о приближении функций и множеств в хаусдорфовой метрике, *Успехи мат. наук*, **26**, 1969, № 5, 141—178.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

София 1000 *Болгария*
п. я. 373

Поступила 9. 5. 1974