Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МОДИФИКАЦИИ ТОПОЛОГИЙ И НЕПУСТОТА КЛАССОВ

МИТРОФАН М. ЧОБАН

Пусть τ — фиксированное бесконечное кардинальное число. Теоретико-множественная операция с индексным множеством мощности τ называется теоретико-множественной τ-операцией. τ-операция называется слабодопустимой, если она мощнее или операции пересечения или операции объединения не более τ множеств. Для всякого топологического пространства X через $\mathcal{F}_0(X)$ обозначим совокупность всех нуль-множеств пространства X. Каждой τ-операции ψ ставится в соответствие трансфинитная последовательность классов $\psi-\mathcal{F}_0(X)$, $\psi-\mathcal{F}_1(X)$, ..., $\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)$, $(\alpha<\tau^+)$, где $\psi-\mathcal{F}_0(X)=\mathcal{F}_0(X)$ и

$$\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)=\begin{cases}\psi(\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)|\beta<\alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ нечетно,}\\ \psi^c(\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)|\beta<\alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ четно.}\end{cases}$$

Через ψ^c обозначена дополнительная операция к операции ψ.

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть $\Sigma\{2^m|m<\tau\}=\tau$ и X—бикомпакт, у которого характер в каждой точке не меньше τ. Тогда для любой слабодопустимой теоретико-множественной τ-операции ψ классы $\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)$ монотонно возрастают, и

$$\psi-\mathcal{F}_{\alpha+2}(X)\setminus\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)|\beta\leqq\alpha\}\neq\varnothing$$

для любого $\alpha<\tau^+$.

При доказательстве теоремы особую роль играет понятие модификации топологий. Эта теорема обобщает ряд результатов, полученных ранее В. И. Пономаревым, И. И. Паровиченко и М. М. Чобаном.

В настоящей работе рассматриваются теоретико-множественные операции с индексным множеством произвольной мощности $\tau\geqq\aleph_0$. Для всякого кардинального числа τ через J_τ обозначим некоторое множество мощности τ, вполне упорядоченное по всем порядковым числам мощности меньше τ. Всякое подмножество множества J_τ называется τ-цепью. Непустое множество τ-цепей будем называть τ-базой.

Пусть N — некоторая τ-база и $\{E_\alpha|\alpha\in J_\tau\}$ — таблица подмножеств некоторого множества Z. Теоретико-множественная τ-операция с базой N над таблицей множеств $\{E_\alpha|\alpha\in J_\tau\}$ определяется следующим образом:

$$\psi_N\{E_\alpha\}=\cup\{(\cap\{E_\alpha|\alpha\in\xi\})\cap(\cap\{Z\setminus E_\alpha|\alpha\in J_\tau\setminus\xi\})|\xi\in N\}.$$

Различные базы определяют различные операции.

Для каждой теоретико-множественной τ-операции ψ можно построить дополнительную операцию ψ^c, где

$$\psi^c\{E_\alpha\}=Z\setminus\psi\{Z\setminus E_\alpha\}.$$

Дополнительная операция ψ^c также является теоретико-множественной. Базу операции ψ^c_N обозначим через N^c.

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 133—143.

Для любого семейства $\mathcal{L}$ подмножеств множества Z и теоретико-множественной τ-операции ψ через $\psi(\mathcal{L})$ обозначим результат операции ψ над всевозможными таблицами множеств $\{E_\alpha \in \mathcal{L} | \alpha \in J_\tau\}$. Операции ψ и Φ эквивалентны*, если $\psi(\mathcal{L}) = \Phi(\mathcal{L})$ для любого семейства множеств $\mathcal{L}$. В этом случае будем писать $\psi \equiv \Phi$.

Рассмотрим следующие примеры теоретико-множественных τ-операций:

1. $\mathbf{m}-P$ — операция пересечения не более $\mathbf{m}$ множеств, где $\mathbf{m} \leq \tau$.
2. $\mathbf{m}-S$ — операция объединения не более $\mathbf{m}$ множеств, где $\mathbf{m} \leq \tau$.
3. T_β — тривиальная операция с базой $N_\beta = \{\xi \subseteq J_\tau | \beta \in \xi\}$. Для любой таблицы $\{E_\alpha\}$ имеем $T_\beta\{E_\alpha\} = E_\beta$. Все тривиальные базы N_β эквивалентны. Обозначим тривиальную операцию через T.
4. C_β — операция взятия дополнения с базой $M_\beta = \{\eta \subseteq J_\tau | \beta \notin \eta\}$. Для любой таблицы $\{E_\alpha\}$ имеем $C_\beta\{E_\alpha\} = Z \setminus E_\beta$. Все операции C_β эквивалентны. Обозначим операцию взятия дополнения через C.

Пусть ψ — некоторая теоретико-множественная операция. Тогда:

1. Операция ψ называется экстенсивной, если $\psi \geq T$. Операции $\mathbf{m}-P$, $\mathbf{m}-S$ и T экстенсивны.
2. Операция ψ называется нормальной, если $\psi(\psi(\mathcal{L})) \subseteq \psi(\mathcal{L})$ для любого семейства $\mathcal{L}$. Операции $\mathbf{m}-P$, $\mathbf{m}-S$ и T нормальны.
3. Операция ψ называется слабодопустимой, если $\psi \geq \tau - S$ или $\psi \geq \tau - P$.
4. Операция ψ называется допустимой, если она слабодопустима и нормальна. Операции $\tau - S$ и $\tau - P$ допустимы.

Рассмотрим τ-операции $\{\psi, \Phi_\alpha | \alpha \in J_\tau\}$. Пусть $\{E_{\alpha\beta} | (\alpha, \beta) \in J_\tau^2\}$ — некоторая таблица множеств. Положим $E_\alpha = \Phi_\alpha\{E_{\alpha\beta}\}$ и $E = \psi\{E_\alpha\}$. Множество E называется результатом составной операции $\psi^* = \psi(\Phi_\alpha)$. Операция ψ^* является теоретико-множественной. При $\Phi = \Phi_\alpha$ для любого $\alpha \in J_\tau$ положим $\psi(\Phi) = \psi(\Phi_\alpha)$. Экстенсивная операция ψ нормальна, если $\psi(\psi) \equiv \psi$.

Семейство $\mathcal{L}$ называется ψ-кольцом, если $\psi(\mathcal{L}) \cup \psi^c(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$. ψ-кольцо $\mathcal{L}$ называется ψ-алгеброй, если $C(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$.

1. Основные классы множеств топологических пространств. Пусть X — топологическое пространство. Класс $\mathcal{F}_0(X)$ состоит из всех замкнутых в X множеств F, для которых существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$, такая, что $f^{-1}\{0\} = F$. Пусть $\tau - \mathcal{F}_0(X) = \tau - P(\mathcal{F}_0(X))$ и $\tau - U_0(X) = C(\tau - \mathcal{F}_0(X))$.

Рассмотрим τ-операцию ψ. С операцией ψ можно связать три трансфинитные последовательности семейств

$$\psi - \mathcal{F}_0(X),\ \psi - \mathcal{F}_1(X), \dots, \psi - \mathcal{F}_\alpha(X), \dots,$$

$$\psi - U_0(X),\ \psi - U_1(X), \dots, \psi - U_\alpha(X), \dots,$$

$$\psi - \mathcal{F}_0^*(X),\ \psi - \mathcal{F}_1^*(X), \dots, \psi - \mathcal{F}_\alpha^*(X), \dots,$$

где $\psi - \mathcal{F}_0(X) = \psi - \mathcal{F}_0^*(X) = \tau - \mathcal{F}_0(X)$, $\psi - U_0(X) = \tau - U_0(X)$ и

$$\psi - \mathcal{F}_\alpha(X) = \begin{cases} \psi(\cup\{\psi - \mathcal{F}_\beta(X) | \beta < \alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ нечетное число,} \\ \psi^c(\cup\{\psi - \mathcal{F}_\beta(X) | \beta < \alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ четное число;} \end{cases}$$

$$\psi - U_\alpha(X) = \begin{cases} \psi^c(\cup\{\psi - U_\beta(X) | \beta < \alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ нечетное число,} \\ \psi(\cup\{\psi - U_\beta(X) | \beta < \alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ четное число;} \end{cases}$$

* Если $\psi(\mathcal{L}) \supset \Phi(\mathcal{L})$, то ψ мощнее Φ, и напишем $\psi \geq \Phi$.

$$\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)=\begin{cases}\psi(\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)|\beta<\alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ нечетное число,}\\ \psi^c(\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)|\beta<\alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ непредельное четное число}\\ \tau-P(\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)|\beta<\alpha\}), & \text{если } \alpha \text{ предельное число.}\end{cases}$$

Отметим некоторые свойства трансфинитных классов.

Свойство 1. *Для любого α имеем*

$$\psi-U_\alpha(X)=C(\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)).$$

Свойство 2. *Семейство $\cup\{\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)|\alpha<\tau^+\}$ является ψ-кольцом, порожденным семейством $\tau-\mathcal{F}_0(X)$.*

Свойство 3. *Семейство $\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)|\alpha<\tau^+\}$ является ψ-кольцом.*

Свойство 4. *Семейство $\cup\{\psi-U_\alpha(X)|\alpha<\tau^+\}$ является ψ-кольцом, порожденным семейством $\tau-U_0(X)$.*

Свойство 5. $\cup\{\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)|\alpha<\tau^+\}\subseteq\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)|\alpha<\tau^+\}$ *и* $\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\subseteq\psi-\mathcal{F}^*_{\alpha+2}(X)$ *для любого $\alpha<\tau^+$.*

Вышеуказанные свойства доказываются непосредственной проверкой.

Положим $R_\alpha-\psi(X)=\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\setminus\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)\mid\beta<\alpha\}$ и $R^*_\alpha-\psi(X)=\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)\setminus\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\alpha\}$. Скажем, что пространство X удовлетворяет условию $\psi-C$, если семейство $\psi-\mathcal{F}_1(X)$ не инвариантно относительно дополнения. Пространство X удовлетворяет условию $\psi-BK$, если $R_\alpha-\psi(X)\neq\varnothing$ для любого $\alpha<\tau^+$ и $\alpha\geqq 2$. Пространство X удовлетворяет условию $\psi-SH$, если $(R_\alpha-\psi(X))\cup(R_{\alpha+1}-\psi(X))\neq\varnothing$ для любого $\alpha<\tau^+$ и $\alpha\geqq 2$. Пространство X удовлетворяет условию $\psi-H$, если для любого $\alpha<\tau^+$ существует такое $\beta\geqq\alpha$ и $\beta<\tau^+$, что $R_\beta-\psi(X)\neq\varnothing$.

Свойство 6. *Если пространство X удовлетворяет условию $\psi-H$, то X удовлетворяет и условию $\psi-SH$.*

Свойство 7. *Пусть X удовлетворяет условию $\psi-H$, где ψ — нормальная τ-операция. Тогда $R_\alpha-\psi(X)\neq\varnothing$ для любого непредельного $\alpha<\tau^+$ и $\alpha\geqq 2$.*

Свойство 8. *Пусть X удовлетворяет условию $\psi-H$, где ψ—слабодопустимая τ-операция. Тогда $R_\alpha-\psi(X)\neq\varnothing$ для любого предельного α.*

Доказательство вытекает из неравенства $\psi-U_\alpha(X)\subseteq\psi-\mathcal{F}_{\alpha+3}(X)$ для слабодопустимых τ-операций.

Пространство X удовлетворяет условию $\psi-\Pi H$, если для любого $\alpha<\tau^+$ найдется такое $\beta<\tau^+$, что $\beta\geqq\alpha$ и $R^*_\beta-\psi(X)\neq\varnothing$.

Свойство 9. *Пусть $\cup\{\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\mid\alpha<\tau^+\}=\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)\mid\alpha<\tau^+\}$ и ψ — слабодопустимая τ-операция. Пространство X удовлетворяет условию $\psi-H$ тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условию $\psi-\Pi H$.*

Доказательство вытекает из неравенства $\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\subseteq\psi^*_{\alpha+2}(X)$ и следующего свойства.

Свойство 10. *Если τ-операция ψ слабодопустима, то*

$$\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)\subseteq\psi-\mathcal{F}_{\alpha+2}(X).$$

Доказательство. Для $\alpha<\omega_0$ имеем $\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)=\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)$. Предположим, что неравенство доказано для всех $\beta<\alpha$. Тогда:

1. $\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)=\psi(\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\alpha\})\subseteq\psi(\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)\mid\beta<\alpha+2\})$ $=\psi-\mathcal{F}_{\alpha+2}(X)$, если α — нечетное число.

2. $\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)=\psi^c(\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\alpha\})\subseteq\psi^c(\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)\mid\beta<\alpha+2\})$ $=\psi-\mathcal{F}_{\alpha+2}(X)$, если α непредельное четное число.

3. пусть α — предельное число. Тогда

$$\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\alpha\}\subseteq\cup\{\psi-\mathcal{F}_{\beta+2}(X)\mid\beta<\alpha\}=\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)\mid\beta<\alpha\}.$$

Следовательно,

$$\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)=\tau-P(\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\alpha\})\subseteq\tau-P(\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)\mid\beta<\alpha\})$$
$$\subseteq\cup\{\psi-\mathcal{F}_\beta(X)\mid\beta<\alpha+2\}\subseteq\psi-\mathcal{F}_{\alpha+2}(X).$$

Свойство 10 доказано.

Свойство 11. *Если ψ — слабодопустимая τ-операция, то*

$$\cup\{\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\mid\alpha<\tau^+\}=\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)\mid\alpha<\tau^+\}$$

и семейство $\cup\{\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\mid\alpha<\tau^+\}$ является ψ-алгеброй.

Доказательство вытекает из свойства 10.

Семейство τ-операций θ образует класс, если: 1) $\tau-S\in\theta$; 2) $\psi(\Phi_\alpha)\in\theta$, как только $\psi\in\theta$ и $\Phi_\alpha\in\theta$ для $\alpha\in J_\tau$; 3) если $\psi\in\theta$, то $\psi^c\in\theta$.

Семейство $\mathcal{E}$ экстенсивных τ-операций образует класс. Образует класс и семейство Ω всех слабодопустимых теоретико-множественных τ-операций. Семейства из допустимых τ-операций не образуют классов. Этот факт и свойство 11 выделяет класс слабодопустимых τ-операций из остальных классов.

Вообще говоря, семейство Ω является наибольшим „полноценным“ классом τ-операций. Операции $\mathbf{m}-P$ и $\mathbf{m}-S$ при $\mathbf{m}<\tau$ не являются слабодопустимыми, и для них условия $\mathbf{m}-P-H$ и $\mathbf{m}-S-H$ в топологических пространствах не выполняются.

Свойство 12. *Пусть ψ — экстенсивная τ-операция из класса θ. Тогда для любого $\alpha<\tau^+$ существует такая τ-операция $\psi^*_\alpha\in\theta$, что $\psi^*_\alpha(\tau-\mathcal{F}_0(X))=\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)$ для любого пространства X.*

Доказательство. Положим $\psi^*_0=T$. Пусть операции ψ^*_β построены для всех $\beta<\alpha$. Предположим, что α непредельное число. Тогда $\psi^*_\alpha=\psi(\psi^*_{\alpha-1})$, если α — нечетное число, и $\psi^*_\alpha=\psi^c(\psi^*_{\alpha-1})$, если α — четное число.

Пусть α — предельное число. Рассмотрим семейство $\sigma=\{\Phi_\xi\mid\xi\in J_\tau\}$, в котором каждая операция ψ^*_β повторяется ровно τ раз, а других операций семейство σ не содержит. Тогда $\psi^*_\alpha=\tau-P(\Phi_\xi)$. Свойство доказано.

Из свойства 12 вытекает, что для слабодопустимых τ-операций классы $\psi-E_\alpha(X)$ „хорошо“ аппроксимируются результатами τ-операций.

Свойство 13. *Пусть θ — класс экстенсивных τ-операций, и пространство X удовлетворяет свойству $\psi-C$ для любой операции $\psi\in\theta$. Если $\psi\in\theta$ и $\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)\mid\alpha<\tau^+\}$ является ψ-алгеброй, то пространство X удовлетворяет условию $\psi-\Pi H$.*

Доказательство. Допустим, что для некоторого $\alpha<\tau^+$ имеем $\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\tau^+\}=\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\alpha\}$. В силу экстенсивности операции ψ, $\cup\{\psi-\mathcal{F}^*_\beta(X)\mid\beta<\tau^+\}=\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)$. Следовательно, класс $\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)$ инвариантен относительно операции C. В силу свойства 12 найдется такая операция

$\psi^*_\alpha \in \theta$, что $\psi^*_\alpha(\tau - \mathcal{F}_0(X)) = \psi - \mathcal{F}^*_\alpha(X)$. Тогда X не удовлетворяет условию $\psi^*_\alpha - C$: противоречие. Доказательство завершено.

Таким образом, для доказательства непустоты классов достаточно доказать теоремы о неинвариантности относительного дополнения семейств $\psi - \mathcal{F}_1(X)$. Этот метод был предложен А. Н. Колмогоровым в работе [4], где он применяется для допустимых $\aleph_0$-операций.

В связи с этим определенный интерес представляют следующие теоремы.

Теорема 1 (В. Е. Шнейдер [8]). *Для любой теоретико-множественной τ-операции ψ семейство $\psi - \mathcal{F}_1(D^\tau)$ не инвариантно относительно операции взятия дополнения.*

На множестве $D^\tau = \Pi\{D_\alpha = \{0_\alpha, 1_\alpha\} | \alpha \in J_\tau\}$ введем топологию, в которой окрестностями точки $x = \{x_\beta | \beta \in J_\tau\}$ служат множества

$$O_\alpha x = \{x_\beta | \beta < \alpha\} \times \Pi\{D_\beta | \beta \geqq \alpha\}.$$

Множество D^τ в указанной топологии обозначим через D^τ_π. Если $\Sigma\{2^{\mathfrak{m}} | \mathfrak{m} < \tau\} = \tau$, то пространство D^τ_π имеет вес τ.

Теорема 2 (И. И. Паровиченко [5]). *Пусть $\Sigma\{2^{\mathfrak{m}} | \mathfrak{m} < \tau\} = \tau$. Тогда для любой теоретико-множественной τ-операции ψ семейство $\psi - \mathcal{F}_1(D^\tau_\pi)$ не инвариантно относительно операции взятия дополнения.*

В дальнейшем нам понадобится теорема 2. Заметим, что при $\tau = \aleph_0$ теоремы 1 и 2 тождественны теореме А. Н. Колмогорова [4].

2. Некоторые теоремы о классах множеств. Пусть X — топологическое пространство, Y — подпространство и ψ — τ-операция. Тогда для любого $\alpha < \tau^+$ имеем $\{Y \cap L | L \in \psi - \mathcal{F}_\alpha(X)\} \subseteq \psi - \mathcal{F}_\alpha(Y)$.

Ниже мы укажем некоторые условия, при которых имеет место равенство.

Пространство называется (τ, ∞)-компактным, если любое открытое покрытие содержит подпокрытие мощности τ.

Теорема 3. *Пусть Y — (τ, ∞)-компактное подпространство вполне регулярного пространства X. Тогда*

$$\tau - \mathcal{F}_0(Y) = \{Y \cap L | L \in \tau - \mathcal{F}_0(X)\}.$$

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{F}_0(Y)$. Тогда

$$Y \setminus L \in U_0(Y) = \{Y \setminus M | M \in \mathcal{F}_0(Y)\}.$$

Множество $Y \setminus L$ является открытым F_σ-множеством пространства Y. Следовательно, $Y \setminus L$ является (τ, ∞)-компактным подпространством. Существует такое открытое в X множество $И$, что $И \cap Y = Y \setminus L$. Для всякой точки $x \in Y \setminus L$ фиксируем такое открытое в X множество

$$И(x) \in U_0(X) = \{X \setminus M | M \in \mathcal{F}_0(X)\}, \text{ что } x \in И(x) \subseteq И.$$

Семейство $\{И(x) | x \in Y \setminus L\}$ образует открытое покрытие множества $Y \setminus L$. Выделим некоторое подпокрытие $\{И_\alpha | \alpha \in J_\tau\}$ мощности τ. Положим $F_\alpha = X \setminus И_\alpha$ и $F = \cap\{F_\alpha | \alpha \in J_\tau\}$. Тогда $F \in \tau - \mathcal{F}_0(X)$ и $F \cap Y = L$. Таким образом,

$$\tau - \mathcal{F}_0(Y) = \{Y \cap L | L \in \tau - \mathcal{F}_0(X)\}.$$

Доказательство завершено.

Следствие 1. *Пусть $Y-(\tau, \infty)$-компактное подпространство вполне регулярного пространства X. Тогда для любой теоретико-множественной τ-операции ψ и любого $\alpha<\tau^+$ имеем:*

$$\psi-\mathcal{F}_\alpha(Y)=\{Y\cap L \mid L\in\psi-\mathcal{F}_\alpha(X)\},$$
$$\psi-U_\alpha(Y)=\{Y\cap L \mid L\in\psi-U_\alpha(X)\},$$
$$\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(Y)=\{Y\cap L \mid L\in\psi-\mathcal{F}^*_\alpha(X)\}.$$

Следствие 2. *Пусть $Y-(\tau, \infty)$-компактное подпространство вполне регулярного пространства X. Если для некоторой теоретико-множественной τ-операции ψ пространство Y удовлетворяет свойству $\psi-H$, то и X удовлетворяет свойству $\psi-H$.*

Теорема 4. *Пусть $f: X\to Y$ — совершенное отображение вполне регулярного пространства X на вполне регулярное пространство Y веса τ. Если для некоторой слабодопустимой теоретико-множественной τ-операции ψ пространство Y удовлетворяет свойству $\psi-H$, то и пространство X удовлетворяет свойству $\psi-H$.*

Доказательство этого факта основано на построении бэровских сечений для многозначных отображений.

3. Модификация топологий. Пусть $\mathcal{S}$ — топология на множестве X. Семейство $\mathbf{m}-P(\mathcal{S})$ образует базис некоторой новой топологии $\mathcal{S}(\mathbf{m})$ на множестве X. Топологию $\mathcal{S}(\mathbf{m})$ назовем $\mathbf{m}$-модификацией топологии $\mathcal{S}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — класс τ-операций, $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — семейства подмножеств множества Z и $\mathfrak{L}_2=\Phi(\mathfrak{L}_1)$ для некоторой операции $\Phi\in\mathfrak{R}$. Если для любой операции $\psi\in\mathfrak{R}$ семейство $\psi(\mathfrak{L}_1)$ не инвариантно относительно дополнения, то и семейство $\psi(\mathfrak{L}_2)$ не инвариантно относительно дополнения для каждой операции $\psi\in\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Пусть $\psi\in\mathfrak{R}$. Положим $\psi^*=\psi(\Phi)$. Тогда $\psi(\mathfrak{L}_2) = \psi(\Phi(\mathfrak{L}_1)) = \psi^*(\mathfrak{L}_1)$. Поскольку $\psi^*\in\mathfrak{R}$, семейство $\psi(\mathfrak{L}_2)$ не инвариантно относительно дополнения. Предположение доказано.

Положим $\varphi_{\mathrm{m}} = \tau-S(\mathbf{m}-P)$, где $\mathbf{m}<\tau$. Если $(X, \mathcal{S})$ — топологическое пространство веса τ и $2^{\mathrm{m}}\leqq\tau$, то $\mathcal{S}(\mathbf{m})=\varphi_m(\mathcal{S})$.

Следствие 3. Пусть $(X, \mathcal{S})$ — *вполне регулярное пространство веса τ и $2^{\mathrm{m}}\leqq\tau$. Если для любой теоретико-множественной τ-операции ψ пространство $(X, \mathcal{S})$ удовлетворяет свойству $\psi-C$, то и пространство $(X, \mathcal{S}(\mathbf{m}))$ удовлетворяет свойству $\psi-C$ для любой теоретико-множественнай τ-операции ψ.*

В множестве J_τ рассмотрим семейство подмножеств N_1, где:

1) если $\gamma\in N_1$, то $|\gamma|<\tau$;

2) если $\gamma_1, \gamma_2\in N_1$ и $\gamma_1\neq\gamma_2$, то $\gamma_1\cap\gamma_2=\varnothing$;

3) $\varnothing\notin N_1$;

4) если $m<\tau_1$, то в N_1 имеется ровно τ различных элементов мощности m.

Теперь положим $K=\{\eta\subseteq J_\tau \mid \eta'\subseteq\eta$ для некоторого $\eta'\in N_1\}$. Положим $\varphi_\tau=\psi_K$. Операция φ_τ является положительной*. Пусть P_τ является операцией пересечения менее τ элементов. Тогда $\varphi_\tau=\tau-S(P_\tau)$.

* τ-операция ψ называется положительной, если для любых таблиц $\{E_\alpha \mid \alpha\in J_\tau\}$, $\{H_\alpha \mid \alpha\in J_\tau\}$ из $E_\alpha\subset H_\alpha$ вытекает $\psi\{E_\alpha\}\subset\psi\{H_\alpha\}$. Положительные теоретико-множественные τ-операции называются τ-δs-операциями.

Предложение 2. *Пусть* $\Sigma\{\tau^{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m}<\tau\}=\tau$ *и* $(X, \mathfrak{S})$ — *вполне регулярное пространство веса* τ. *Тогда* $\mathfrak{S}(\tau)=\varphi_\tau(\mathfrak{S})$ *является топологией на множестве* X. *Кроме того, если для любой теоретико-множественной* τ-*операции* ψ *пространство* $(X,\mathfrak{S})$ *удовлетворяет свойству* $\psi-C$, *то и пространство* $(X, \mathfrak{S}(\tau))$ *удовлетворяет свойству* $\psi-C$ *для любой теоретико-множественной* τ-*операции* ψ.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая база мощности τ топологии $\mathfrak{S}$. Тогда $P_\tau(\mathfrak{L})=\cup\{\mathbf{m}-P(\mathfrak{L}) \mid \mathbf{m}<\tau\}$ является базой топологии $\mathfrak{S}(\tau)$ мощности $\Sigma\{\tau^{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m}<\tau\}=\tau$. Следовательно, $(X,\mathfrak{S}(\tau))$—топологическое пространство веса τ. Поэтому $\mathfrak{S}(\tau)=\tau-S(P_\tau(\mathfrak{L}))=\tau-S(P_\tau(\mathfrak{S}))$. Первая часть предложения доказана. Вторая же часть вытекает из первой и из предложения 1.

Заметим, что для регулярных кардиналов τ топология пространства D^τ_π получается из тихоновской топологии на множестве D^τ при помощи операции φ_τ. Таким образом, для регулярных кардиналов теорема 2 (И. И. Паровиченко вытекает из теоремы 1 В. Е. Шнейдера).

Теперь рассмотрим более „плохие" модификации топологий.

Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ — две топологии на множестве X и ψ — некоторая τ-операция. Топология $\mathfrak{S}_2$ является ψ-модификацией класса $\alpha<\tau^+$ топологии $\mathfrak{S}_1$, если существует такое семейство $\mathfrak{L}\subseteq\cup\{\psi-U_\beta(X, \mathfrak{S}_1) \mid \beta<\alpha\}$, которое образует базис топологии $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_1\subseteq\mathfrak{S}_2$.

Заметим, что существуют различные ψ-модификации того же класса. Из определения ψ-модификации вытекает

Лемма 1. *Пусть топология* $\mathfrak{S}_2$ *является* ψ-*модификацией топологии* $\mathfrak{S}_1$. *Тогда* $\mathfrak{F}_0(X, \mathfrak{S}_1)\subseteq\mathfrak{F}_0(X, \mathfrak{S}_2)$.

Лемма 2. *Пусть топология* $\mathfrak{S}_2$ *является* ψ-*модификацией класса* α_0 *топологии* $\mathfrak{S}_1$ *и пространство* $(X, \mathfrak{S}_2)$ (τ, ∞)-*компактно. Тогда*

$$U_0(X, \mathfrak{S}_2)\subseteq\tau-S(\cup\{\psi-U_\alpha(X, \mathfrak{S}_1) \mid \alpha<\alpha_0\}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}\subseteq\cup\{\psi-U_\alpha(X, \mathfrak{S}_1) \mid \alpha<\alpha_0\}$ — база в $(X, \mathfrak{S}_2)$. Тогда, в силу (τ, ∞)-компактности пространства $(X, \mathfrak{S}_2)$, всякое открытое в $(X, \mathfrak{S}_2)$ F_σ-множество принадлежит семейству $\tau-S(\mathfrak{L})$. Поэтому $U_0(X, \mathfrak{S}_2)\subseteq\tau-S(\mathfrak{L})\subseteq\tau-S(\cup\{\psi-U_\alpha(X, \mathfrak{S}_1) \mid \alpha<\alpha_0\})$. Лемма доказана.

Предложение 3. *Пусть топология* $\mathfrak{S}_2$ *является* ψ-*модификацией класса* α_0 *топологии* $\mathfrak{S}_1$, *где* $(X, \mathfrak{S}_2)$ *есть* (τ, ∞)-*компактное пространство, а* ψ — τ-*операция. Тогда существует такое порядковое число* $\beta_0<\tau^+$, *что* $\psi-\mathfrak{F}^*_\alpha(X, \mathfrak{S}_1)=\psi-\mathfrak{F}^*_\alpha(X, \mathfrak{S}_2)$ *для любого* $\alpha\geq\beta_0$.

Доказательство. Пусть α_0' — первое предельное число, следующее за α_0. Тогда из лемм 1 и 2 вытекает $\tau-\mathfrak{F}_0(X, \mathfrak{S}_1)\subseteq\tau-\mathfrak{F}_0(X, \mathfrak{S}_2)\subseteq\psi-\mathfrak{F}^*_{\alpha_0'}(X, \mathfrak{S}_1)$. Поэтому для всякого числа $\beta<\tau^+$ имеем $\psi-\mathfrak{F}^*_\beta(X, \mathfrak{S}_1)\subseteq\psi-\mathfrak{F}^*_\beta(X, \mathfrak{S}_2)\subseteq\psi-\mathfrak{F}^*{}_{\alpha_0'+\beta}(X, \mathfrak{S}_1)$. Найдется такое число $\beta_0<\tau^+$, что $\alpha_0'+\beta_0=\beta_0$.

Тогда при $\beta\geq\beta_0$ $\psi-\mathfrak{F}^*_\beta(X, \mathfrak{S}_1)=\psi-\mathfrak{F}^*_\beta(X, \mathfrak{S}_2)$. Предложение доказано.

Лемма 3. *Пусть топология* $\mathfrak{S}_2$ *является* ψ-*модификацией класса* α *топологии* $\mathfrak{S}_1$. *Если* $\Phi\geq\psi$, *то топология* $\mathfrak{S}_2$ *есть* Φ-*модификация класса* α *топологии* $\mathfrak{S}_1$.

Доказательство леммы вытекает из неравенства $\psi-U_\alpha(X)\subseteq\Phi-U_\alpha(X)$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{S}_2$ *является* ψ-*модификацией класса* α *топологии* $\mathfrak{S}_1$. *Тогда* $\mathfrak{S}_2$ *есть* ψ^c-*модификация класса* $\alpha+1$ *топологии* $\mathfrak{S}_1$.

Доказательство вытекает из неравенства $\psi - U_\alpha(X) \subseteq \psi^c - U_{\alpha+1}(X)$.

Предложение 4. *Пусть топология* $\mathfrak{S}_2$ *является* ψ*-модификацией класса* α *топологии* $\mathfrak{S}_1$ *на множестве* X *и пространство* $(X, \mathfrak{S}_2)$ (τ, ∞)*-компактно. Пусть, далее,* $\mathfrak{R}$ *есть некоторая совокупность* τ*-операции, такая, что* $\Phi \geqq \psi$ *для любой операции* $\Phi \in \mathfrak{R}$. *Если для любой операции* $\Phi \in \mathfrak{R}$ *пространство* $(X, \mathfrak{S}_2)$ *удовлетворяет условию* $\psi - \Pi H$, *то и пространство* $(X, \mathfrak{S}_1)$ *удовлетворяет условию* $\psi - \Pi H$ *для всех операций* $\Phi \in \mathfrak{R}$. *Более того, если операции* $\mathfrak{R}$ *экстенсивны, то имеет место и обратное утверждение.*

Доказательство. Доказательство вытекает из леммы 3 и предложения 3.

Из свойств 5, 10 и предложения 4 вытекает

Теорема 5. *Пусть топология* $\mathfrak{S}_2$ *на множестве* X *получена* $\tau - P$*-модификацией класса* α *топологии* $\mathfrak{S}_1$ *и пространство* $(X, \mathfrak{S}_2)$ (τ, ∞)*-компактно. Пусть, далее,* ψ *— слабодопустимая* τ*-операция. В этом случае пространство* $(X, \mathfrak{S}_1)$ *удовлетворяет свойству* $\psi - H$ *тогда и только тогда, когда пространство* $(X, \mathfrak{S}_2)$ *удовлетворяет свойству* $\psi - H$.

Эта теорема будет играть главную роль при доказательстве непустоты классов.

4. Критерии для непустоты классов. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* X *— бикомпакт и характер* в каждой точке* $\geqq \tau$, а $\Sigma\{2^{\mathfrak{m}} | \mathfrak{m} < \tau\} = \tau$. *Тогда:*

1) *для любой слабодопустимой теоретико-множественной* τ*-операции* ψ *пространство* X *удовлетворяет условию* $\psi - H$;

2) *для любой допустимой теоретико-множественной* τ*-операции* ψ *пространство* X *удовлетворяет условию* $\psi - BK$, *то есть* $\mathfrak{R}_\alpha - \psi(X) \neq \emptyset$ *для любого* $\alpha < \tau^+$ и $\alpha \geqq 2$.

Доказательство. Пусть M — некоторое множество, а α — некоторое порядковое число. Кортежем длины α со значением в M называется отображение множества всех трансфинитов, меньших α, в M. Длину кортежа k обозначим через $l(k)$. Мы говорим, что кортеж k является продолжением кортежа k', если $l(k') \leqq l(k)$ и отображение k' есть сужение отображения k. В этом случае пишем $k' \leqq k$ и $k' < k$, если, кроме того, $k' \neq k$.

Пусть теперь $M = \{0, 1\}$. В этом случае кортежи длины τ можно отождествить с точками множества $D^\tau = \Pi\{\{0_\alpha, 1_\alpha\} | \alpha < \tau\}$. Каждой точке $x = \{i_\beta\} \in D^\tau$ поставим в соответствие последовательность кортежей $\{x_\alpha = \{i_\beta | \beta < \alpha\} \alpha < \tau\}$. Семейство кортежей $\{x_\alpha | x \in D^\tau, \alpha < \tau\}$ составляет совокупность всех кортежей** длины меньше τ со значением в множестве $\{0, 1\}$.

Построим семейство $\{F(x_\alpha) | x \in D^\tau, \alpha < \tau\}$ непустых подмножеств пространства X со следующими свойствами:

---

* Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы пространства X в точке x, называется характером пространства X в точке x и обозначается через $\chi_x X$ (см. [1]). Наименьшее кардинальное число $\psi_x X$, для которого существует семейство открытых множеств $\{И_\alpha | \alpha \in \theta, |\theta| \leqq \psi_x X\}$ со свойством $\cap\{И_\alpha | \alpha \in \theta\} = \cap\{И | x \in И$ и $И$ открыто в $X\}$, называется псевдохарактером пространства X в точке x.

** Если $x_\alpha = y_\alpha$ и $x \neq y$, то мы не будем считать, что x_α и y_α — различные кортежи.

1) $[F(x_\alpha)] \cap [F(y_\alpha)] = \emptyset$ при $x_\alpha \neq y_\alpha$;

2) $[F(x_{\alpha+1})] \subseteq F(x_\alpha)$;

3) $F(x_\alpha) = \cap \{F(x_\beta) | \beta < \alpha\}$, если α предельно;

4) $F(x_n) \in U_0(X)$ для любого натурального числа n и точки $x \in D^\tau$;

5) если $\alpha \geqq \omega_0$ (т. е. α бесконечно), то множества $F(x_\alpha)$ замкнуты в X и $F(x_\alpha) \in |\alpha| - PU_0(X)$), $|\alpha| = |\{\beta < \alpha\}|$.

Условие 5 имеет смысл только в случае, когда $\tau > \aleph_0$. Таким образом, каждое множество $F(x_\alpha)$ является пересечением менее τ открытых множеств из семейства $U_0(X)$. В силу условия $\chi_x X \geqq \tau$ для любой точки $x \in X$ и равенства $\psi_x X = \chi_x X$ для бикомпактов (см. [1], с. 48), множества $F(x_\alpha)$ неодноточечны.

Перейдем к построению множеств $F(x_\alpha)$. Кортежи x_1 пусты, и поэтому, если положим $F(x_1) = X$, то условия 1—4 выполняются. Пусть построены множества $F(x_m)$ для любых $m \leqq n$ и $x \in D^\tau$. В каждом множестве $F(x_n) = F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ фиксируем такие открытые непустые F_σ-множества $F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0)$ и $F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1)$, что $[F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0)] \cap [F(i_1, i_2, \ldots i_{n-1}, 1)] = \emptyset$ и $[F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0)] \cup [F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1)] \subseteq F(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$. Таким образом, построены множества $\{F(x_{n+1}) | x \in D^\tau\}$. Следовательно, множества $F(x_n)$ построены для всех натуральных чисел.

Пусть построены множества $F(x_\beta)$ для всех $x \in D^\tau$ и $\beta < \alpha \geqq \omega_0$. Если α предельно, то достаточно положить $F(x_\alpha) = \cap \{F(x_\beta) | \beta < \alpha\}$ для любой точки $x \in D^\tau$.

Предположим, что α непредельно. Фиксируем кортеж $x^0_{\alpha-1}$. Множество $F(x^0_{\alpha-1})$ неодноточечно. Выберем две различные точки a и b из $F(x^0_{\alpha-1})$. Найдется такая непрерывная функция g, что $a \in g^{-1}\{0\}$ и $b \in g^{-1}\{1\}$. Положим $F(x_\alpha) = F(x^0_{\alpha-1}) \cap g^{-1}\{0\}$, если $x_{\alpha-1} = x^0_{\alpha-1}$ и у точки x координата $\alpha-1$ равна 0 и $F(x_\alpha) = F(x^0_{\alpha-1}) \cap g^{-1}\{1\}$, если $x_{\alpha-1} = x^0_{\alpha-1}$ и у точки x координата $\alpha-1$ равна 1.

Таким образом, семейство $\{F(x_\alpha) | x \in D^\tau, \alpha < \tau\}$ построено.

Для всякой точки $x \in D^\tau$ положим $F(x) = \cap \{F(x_\alpha) | \alpha < \tau\}$. В силу бикомпактности пространства X и условия 2, множества $F(x)$ непусты и замкнуты в X. Кроме того, если $И$ открыто в X и $F(x) \subseteq И$, то найдется такое порядковое число $\alpha < \tau$, для которого $F(x_\alpha) \subseteq И$. Рассмотрим множество $F = \cup \{F(x) | x \in D^\tau\}$. Топологию на F, индуцированную из X, обозначим через $\mathfrak{S}_1$. Через $\mathfrak{S}_2$ обозначим топологию на F, индуцированную предбазой $U_0(F, \mathfrak{S}_1) \cup \{F(x_\alpha) \cap F | x \in D^\tau, \alpha < \tau\}$. База топологии $\mathfrak{S}_2$ является подсемейством семейства $\tau - P(U_0(F, \mathfrak{S}_1))$. Следовательно, топология $\mathfrak{S}_2$ является $\tau - P$-модификацией класса I топологии $\mathfrak{S}_1$.

Теперь рассмотрим отображение $f: F \to D^\tau_\pi$, где $f^{-1}x = F(x)$ для любой точки $x \in D^\tau_\pi$. Отображение f является отображением „на". Для любой точки $x \in D^\tau_\pi$ и порядкового числа $\alpha < \tau$ имеем $f^{-1}O_\alpha x = F(x_\alpha) \cap F$, где семейство $\{O_\alpha x = \{y \in D^\tau | y_\alpha = x_\alpha\} | \alpha < \tau, x \in D^\tau\}$ образует базис топологии пространства D^τ_π. Следовательно, отображение f пространства $(F, \mathfrak{S}_2)$ на D^τ_π непрерывно. Покажем, что отображение f совершенно. Поскольку $F(x) \cap F(y_\alpha) = \emptyset$ при $x_\alpha \neq y_\alpha$ и $F(x) \cap F(y_\alpha) = F(x)$ при $x_\alpha = y_\alpha$, то на множествах $F(x)$ топологии $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ совпадают. Таким образом, множества $F(x)$ бикомпактны в топологиях $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$. Бикомпактность отображения f доказана. Пусть множество $И$ открыто в $(F, \mathfrak{S}_2)$ и $F(x) \subseteq И$. Поскольку $F(x) \cap F(y_\alpha) = \emptyset$ только при $x_\alpha = y_\alpha$, то

$$И = \cup \{F(x_\alpha) \cap И_\alpha \mid И_\alpha \in U_0(F, \mathfrak{S}_1),\ \alpha < \tau\}.$$

В силу бикомпактности множества $F(x)$ найдется такое конечное число индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что $F(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{F(x_{\alpha_i}) \cap И_{\alpha_i}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} И_{\alpha_i} = V$. Так как множество V открыто в $(F, \mathfrak{S}_1)$, то найдется такое порядковое число α_0 что* $F(x_{\alpha_0}) \subseteq V$. Пусть $\alpha = \max\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Тогда $F(x) \subseteq F(x_\alpha) = F(x_\alpha) \cap V \subseteq И$. Множество $F(x_\alpha)$ открыто в $(F, \mathfrak{S}_2)$, $F(x) \subseteq F(x_\alpha) \subseteq И$ и $f^{-1} f F(x_\alpha) = f^{-1} O_\alpha x = F(x_\alpha)$. Следовательно, f есть совершенное отображение пространства $(F, \mathfrak{S}_2)$ на D^τ_π.

Так как $\Sigma\{2^{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} < \tau\} = \tau$, то D^τ_π является пространством веса τ и D^τ_π удовлетворяет условию $\psi - H$ для любой слабодопустимой теоретико-множественной τ-операции ψ. Последний факт вытекает из теоремы 2 и свойств 9, 11 и 13.

В силу теоремы 4, пространство $(F, \mathfrak{S}_2)$ удовлетворяет условию $\psi - H$ для всех слабодопустимых теоретико-множественных τ-операций ψ.

Так как f совершенно и D^τ_π — пространство веса τ, то $(F, \mathfrak{S}_2)$ является (τ, ∞)- компактным пространством. На основании теоремы 5, пространство $(F, \mathfrak{S}_1)$ удовлетворяет свойству $\psi - H$ для любой слабодопустимой теоретико-множественной τ-операции ψ.

Пространство $(F, \mathfrak{S}_1)$ (τ, ∞)-компактно, поскольку $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$ и свойство (τ, ∞)-компактности сохраняется при непрерывных отображениях. Следовательно, $(F, \mathfrak{S}_1)$ является (τ, ∞)-компактным подпространством пространства X. Из следствия 2 вытекает, что пространство X удовлетворяет свойству $\psi - H$ для любой слабодопустимой теоретико-множественной τ-операции ψ. Свойство 8 завершает доказательство теоремы.

Замечание. Одновременно мы доказали, что если для бикомпакта X $\psi_x X \geq \tau$ в любой точке $x \in X$, то мощность пространства $X \geq 2^\tau$ (см. [1, 2, 3, 7]).

Теорема 7. *Пусть X — полное в смысле Чеха пространство. Если $\chi_x X \geq \tau$, то существует такое бикомпактное подмножество $F \subseteq X$, что $\chi_x F \geq \tau$ для любой точки $x \in F$. Более того, существует подмножество $\Phi \subseteq F$ и такое однозначное бикомпактное отображение $f: \Phi \to D^\tau_\pi$ на D^τ_π, которое совершенно при некоторой τ — P-модификации класса 1 топологии на* X.

Доказательство. Достаточно доказать существование бикомпакта F. При $\tau = \aleph_0$ существует такое бикомпактное подмножество $F_1 \subseteq X$, которое совершенно отображается на конторово совершенное множество $D^{\aleph_0}_\pi$ (см. [10], теорема 1.1).

Фиксируем такое бикомпактное множество F, которое содержит F_1 и является G_δ-множеством пространства X. Множество F искомо при $\tau > \aleph_0$ и содержит нужное нам подмножество при $\tau = \aleph_0$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть X — полное в смысле Чеха пространство и $\chi_x X = \tau$ для любой точки $x \in X$ и $\Sigma\{2^{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} < \tau\} = \tau$. Тогда для любой слабодопустимой теоретико-множественной τ-операции ψ пространство X удовлетворяет свойству $\psi - H$.*

---

* $F(x_\alpha) \cap F$ обозначим также через $F(x_\alpha)$.

Следствие 5. *Пусть X — полное в смысле Чеха пространство и $\chi_x X \geq \tau$ для любой точки $x \in X$. Тогда мощность пространства $X \geq 2^\tau$.*

В заключение отметим, что в ряде работ в основном рассматриваются результаты τ-операций ко всем замкнутым подмножествам $\mathfrak{F}(X)$ топологического пространства X (см. [4, 5, 6, 9] и др.). В этом случае ψ-кольца, порожденные семействами $\mathfrak{F}(X)$, не являются ψ-алгебрами, вообще говоря, даже для допустимых операций. Последний факт затрудняет применение теорем типа теоремы А. Н. Колмогорова для доказательства непустоты классов. Кроме того, в такой общей форме невозможно доказать теоремы, аналогичные теореме 4. Как правило, такой подход плодотворен для пространств, в которых $\tau - \mathfrak{F}_0(X) = \mathfrak{F}(X)$. Тот факт, что мы рассматриваем результат применения τ-операции к семействам $\tau - \mathfrak{F}_0(X)$, избавляет нас от необходимости накладывать дополнительные условия на пространства и позволяет получить более глубокие результаты. Следует отметить, что результаты о непустоте классов, полученные в работах [5, 6, 10], являются частными случаями теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, П. С. Урысон. Мемуар о компактных топологических пространствах. Москва, 1971.
2. P. S. Alexandrov. Sur la puissance des ensembles mesurables B. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **126**, 1916, 323—325.
3. А. В. Архангельский. О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности. *Докл. АН СССР*, **187**, 1969, № 5, 967—970.
4. А. Н. Колмогоров. Об операциях над множествами. *Мат. сб.*, **35**, 1928, № 3—4, 415—423.
5. И. И. Паровиченко. К дескриптивной теории множеств в топологических пространствах. *Докл. АН СССР*, **196**, 1971, № 5, 1024—1027.
6. В. И. Пономарев. О борелевских множествах в совершенно нормальных бикомпактах. *Докл. АН СССР*, **170**, 1966, № 3, 520—523.
7. B. Pospišil. Sur la puissance... *Čas pěstov. mat. a fis.*, **67**, 1938, 89—96.
8. Б. Е. Шнейдер. Дескриптивная теория множеств в топологических пространствах. *Уч. зап. Моск. ун-та*, 135, матем. **2**, 1949, 37—85.
9. Ф. Хаусдорфф. Теория множеств. Москва, 1937.
10. М. М. Чобан. О бэровских множествах в полных топологических пространствах. *Укр. мат. ж.*, **22**, 1970, № 3, 330—342.

278000 Молдавская ССР, г. Тирасполь,
ул. Одесская, 90, кв, 50

Поступила 20. 9. 1973