Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА L_M

РУМЕН П. МАЛЕЕВ

В работе найдены достаточные условия для того, чтобы в пространстве Орлича L_M множество сумм условно сходящегося ряда (при произвольной перестановке его членов) было смещенным линейным замкнутым подпространством.

1. Введение. В [1] М. Кадец показал, что если ряд Σf_i в L_p сходится условно и $\Sigma \|f_i\|^p<\infty$, $1<p\leq 2$; $\Sigma\|f_i\|^2<\infty$, $p\geq 2$, то множество сумм этого ряда является смещенным линейным замкнутым подпространством пространства L_p. Заметим, что условие $\Sigma\|f_i\|^p<\infty$ еквивалентно условию $(\Sigma|f_i|^p)^{1/p}\in L_p$.

С. Троянским [5] было показано, что если в пространстве Банаха X ряд Σx_i сходится условно и $\Sigma\varrho_X(\|x_i\|)<\infty$, где

$$\varrho(\tau)=\frac{1}{2}\sup(\|x+\tau y\|+\|x-\tau y\|-2:\ \|x\|=\|y\|=1,\ x,y\in X)$$

есть модуль гладкости пространства X, то множество сумм ряда Σx_i является смещенным линейным замкнутым подпространством пространства X.

В [2] для модуля гладкости некоторого пространства Орлича L_N, изоморфного рефлексивному пространству Орлича L_M, получена оценка

$$\varrho_{L_N}(\tau)\leq AG_M(\tau), \tag{1}$$

где A — положительная постоянная, а

$$G_M(\tau)=\tau^2\sup\{x^2M(y)/M(xy):\quad 1\leq x\leq\tau^{-1},\quad y\geq 1\}.$$

Из этой оценки и результата Троянского следует, что если ряд Σf_i в рефлексивном пространстве Орлича L_M сходится условно и $\Sigma G_M(\|f_i\|)<\infty$, то множество сумм ряда Σf_i является смещенным линейным замкнутым подпространством пространства L_M. Заметим, что указанная выше оценка для модуля гладкости является наилучшей в классе всех пространств Банаха, изоморфных пространству L_M, так что этим путем нельзя улучшить последний результат.

Недавно Е. Никишиным [3] было получено следующее усиление результата Кадеца: если ряд Σf_i в L_p, $1\leq p\leq 2$, сходится условно и $(\Sigma f_i^2)^{1/2}\in L_p$, то множество сумм этого ряда является смещенным линейным замкнутым подпространством пространства L_p.

В настоящей заметке доказана

Теорема 1. *Пусть $M(t)$ — функция Орлича и*

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 178—182.

$$\inf\{x^2M(y)/M(xy):\quad x\geq 1,\quad y\geq 1\}>0.$$

Если ряд Σf_i сходится условно в L_M и $(\Sigma f_i^2)^{1/2}\in L_M$, то множество сумм ряда Σf_i является смещенным линейным замкнутым подпространством пространства L_M.

2. Ряд Σx_i в пространстве Банаха называется условно сходящимся, если существуют две сходящиеся его перестановки, имеющие различные суммы.

Функцию $M(t)$ называют функцией Орлича, если она непрерывна, строго возрастает, выпукла в $[0,\infty)$ и $M(0)=0$.

Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых в интервале $[0, 1]$ функций $f(x)$, таких, что $\int_0^1 M(|f(x)|/\lambda)dx<\infty$ для некоторого $\lambda>0$.

Норма в L_M вводится следующим образом:

$$\|f\|=\inf\left\{\lambda:\int_0^1 M(|f(x)|/\lambda)dx\leq 1\right\}.$$

Чтобы избежать недоразумений, норму в L_M иногда будем обозначать через $\|\cdot\|_M$.

Функции Орлича $M(t)$ и $N(t)$ называются эквивалентными, если существуют положителные постоянные c, k, C и K и $t_0\geqq 0$, такие, что $CM(ct)\leq N(t)\leq KM(kt)$ при $t\geqq t_0$. Если $M(t)$ и $N(t)$ — эквивалентные функции Орлича, то пространства L_M и L_N изоморфны.

3. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $M(t)$ — фунция Орлича и*

$$M(xy)\leq kx^2M(y),\quad x\geq 1, y\geq 1. \tag{2}$$

Тогда существуют положительная постоянная K и функция Орлича $N(t)$, эквивалентная $M(t)$, такие, что для всех x, $y\geq 0$ выполнено

$$N(xy)\leq Kx^2N(y)+N(y),\quad K=\max(1, k). \tag{3}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $M(1)=1$. Рассмотрим функцию

$$N(t)=\begin{cases} t, & 0\leq t\leq 1,\\ M(t), & t>1.\end{cases}$$

Очевидно, $N(t)$ — функция Орлича, эквивалентная $M(t)$.

Если $x\leq 1$, то (3) очевидно выполнено.

Пусть $x\geq 1$. Рассмотрим три случая.

а) $y\leq 1$, $xy\leq 1$; тогда $N(xy)=xy\leq x^2N(y)$;

б) $y\leq 1$, $xy>1$; тогда $N(xy)\leq yN(x)\leq kx^2N(y)$;

в) $y>1$; из (2) следует $N(xy)\leq kx^2N(y)$.

Лемма 2 (Е. Никишин [3]). *Пусть $\{a_i\}_1^n$ — конечный набор действительных чисел. Перестановке* $\pi=\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *сопоставим число* $S(\pi)=\max\limits_{1\leq j\leq n}\left|\sum\limits_{k=1}^{j}a_{i_k}\right|$. **Тогда существует абсолютная постоянная $c>1$, такая, что**

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi}S^2(\pi)\leqq c\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\right),\tag{4}$$

где Π — множество всех перестановок из n-элементов.

Лемма 3. *Пусть $M(t)$ — функция Орлича, выполняющая* (2). *Для любого конечного набора функций $\{f_i\}_1^n$ из L_M, для которого $\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)=0$, существует перестановка $\{f_{i_k}\}_1^n$, такая, что*

$$\left\|\sum_{k=1}^{j}f_{i_k}\right\|\leqq C\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}f_i^2\right)^{1/2}\right\|\left(1+\left(\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}f_i^2\right)^{1/2}\right\|\right)^{3/2}\right),\ j=1,2,\ldots,n,\tag{5}$$

где $C>0$ — постоянная, зависящая только от $M(t)$.

Доказательство. Пусть $N(t)$ — функция Орлича из леммы 1. Перестановке $\pi=\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ натуральных чисел от 1 до n сопоставим число

$$S(\pi)=\max_{1\leqq j\leqq n}\int_0^1 N\left(\left|\sum_{k=1}^{j}f_{i_k}(t)\right|\right)dt$$

и функцию

$$S(\pi, t)=\max_{1\leqq j\leqq n}\left|\sum_{k=1}^{j}f_{i_k}(t)\right|.$$

Положим

$$x=S(\pi, t)\,(n!)^{1/2}\left(\sum_{\pi\in\Pi}S^2(\pi, t)\right)^{-1/2},\ y=\left(\sum_{\pi\in\Pi}S^2(\pi, t)/n!\right)^{1/2}$$

в (3) и просуммируем по всем перестановкам $\pi\in\Pi$. Получим

$$\sum_{\pi\in\Pi}N(S(\pi, t))\leqq(K+1)n!\,N\left(\left(\sum_{\pi\in\Pi}S^2(\pi, t)/n!\right)^{1/2}\right).\tag{6}$$

Обозначим $g(t)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}f_i^2(t)\right)^{1/2}$. Из (4) и (6) следует

$$\sum_{\pi\in\Pi}N(S(\pi, t))/n!\leqq c(K+1)^2N(g(t)).\tag{7}$$

Так как $S(\pi)\leqq\int\limits_0^1 N(S(\pi, t))dt$, из (7) следует

$$\sum_{\pi\in\Pi}S(\pi)/n!\leqq c(K+1)^2\int_0^1 N(g(t))dt.$$

Следовательно, существует перестановка $\sigma=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и постоянная K_1, такие, что

$$(8)\qquad \int_0^1 N\left(\left|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}(t)\right|\right)dt \leq K_1 \int_0^1 N(g(t))dt, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $\|g\|_N \leqq 1$. Тогда

$$\int_0^1 N(g(t))dt \leqq \|g\|_N$$

и из (8) и леммы 1 легко получить

$$(9)\quad \int_0^1 N\left(\left|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}(t)\right| \Big/ kk_1 \|g\|_N^{1/2}\right)dt \leq (K_1\|g\|_N)^{-1} \int_0^1 N\left(\left|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}(t)\right|\right)dt \leq 1, j=1, 2, \ldots$$

Из (9) сразу следует

$$(10)\qquad \left\|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}\right\|_N \leqq KK_1 \|g\|_N^{1/2}, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $\|g\|_N \geqq 1$. Тогда из леммы 1 получим, что $\int_0^1 N(g(t))dt \leqq k\|g\|_N^2$. Отсюда при помощи (8) следует

$$\int_0^1 N\left(\left|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}(t)\right| \Big/ KK_1 \|g\|_N^2\right)dt \leq (KK_1\|g\|_N^2)^{-1} \int_0^1 N\left(\left|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}(t)\right|\right)dt \leq 1,$$
$$j=1, 2, \ldots, n,$$

т. е.

$$(11)\qquad \left\|\sum_{k=1}^{j} f_{i_k}\right\|_N \leq KK_1 \|g\|_N^2, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Из (10) и (11), используя эквивалентность функций $M(t)$ и $N(t)$, получим (5).

Лемма 4. *Пусть $M(t)$ — функция Орлича, которая выполняет* (2) *и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$* в *L_M, такой что $\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2\right)^{1/2} \in L_M$. Если некоторая подпоследовательность последовательности частичных сумм ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ сходится* в *L_M к некоторой функции $f \in L_M$, то существует перестановка ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$, сходящаяся в L_M к функции f.*

Доказательство сразу следует при помощи леммы 3.

При помощи леммы 4 доказательство теоремы 1 проводится, как и в [4].

4. Замечания. Если $M(t)=t^p$, $p\in[1,2]$, из теоремы 1 следует результат Е. М. Никишина. Условие (2) можно заменить более ограничительным условием

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, tM'(t)/M(t)<2, \tag{12}$$

которое легко проверяется.

В самом деле, если (12) выполнено, то $M'(t)/M(t)<2/t$, $t\geqq t_0$ для некоторого $t_0\in[1,\infty)$. Интегрированием получим $M(xy)\leqq x^2M(y)$, $x\geqq 1$, для всех $y\geqq t_0$. Отсюда следует

$$M(xy)\leqq (M(t_0)/M(1))x^2M(y), \quad x\geqq 1, \quad y\geqq 1,$$

т. е. (2).

Наконец укажем несколько примеров:

а) $M(t)=t^{p+a\cos(\ln\ln t)}$, $a\in(0, 1/2\sqrt{2})$, $p\in[1+a\sqrt{2},\ 2-a\sqrt{2}]$.

Функция $M(t)$ монотонно возрастает и является выпуклой для всех достаточно больших t. Следовательно, она может быть продолжена до функции Орлича на $[0,\infty)$. Ограничения на условно сходящийся ряд Σf_i в L_M для того, чтобы множество сумм ряда Σf_i было смещенным линейным замкнутым подпространством пространства L_M, вытекающие из результата Троянского, и оценка (1) более жесткие, чем ограничения, вытекающие из теоремы 1.

б) $M(t)=t\ln^a(1+t)$, $a>0$. Функция $M(t)$ — функция Орлича. Пространство Орлича L_M — нерефлексивно, и поэтому вообще нельзя использовать теорему Троянского. В этом случае теорема 1 указывает достаточные условия для того, чтобы множество сумм условно сходящегося ряда Σf_i в L_M было смещенным линейным замкнутым подпространством пространства L_M.

Автор выражает благодарность С. Л. Троянскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кадец. Об условно сходящихся рядах в пространствах L_p. *Успехи мат. наук* **9**, 1954, 107—109.
2. R. P. Maleev, S. L. Troyanski. On moduli of convexity and smoothness in Orlicz spaces. *Studia Math.* (в печати).
3. Е. М. Никишин. О перестановках рядов в L_p. *Мат. заметки*, **14**, 1973, 31—38.
4. Е. М. Никишин. О множестве сумм функционального ряда. *Мат. заметки*, **7**, 1970, 403—410.
5. С. Л. Троянски. Об условно сходящихся рядах и некоторых F-пространствах. *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, № 5, 1967, 102—107.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

София 1000 п. я. 373

Поступила 5. 5. 1974