Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ДИССИПАТИВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

КИРИЛ П. КИРЧЕВ

М. С. Лившиц и А. А. Янцевич (1968) ввели понятие линейно-представимого случайного процесса как непосредственного обобщения стационарного (в широком смысле) случайного процесса. Они нашли общий вид корреляционной функции и построили спектральные разложения линейно-представимых процессов для диссипативных ограниченных операторов с конечномерной мнимой компонентой и невещественным спектром или со спектром, сосредоточенным в точке ноль.

В настоящей работе построены спектральные разложения линейно-представимых процессов для диссипативных ограниченных операторов с конечномерной мнимой компонентой и произвольным спектром. Кроме того, результаты М. С. Лившица и А. А. Янцевича распространяются и на некоторые классы неограниченных операторов.

1. Спектральные разложения случайных процессов классов $K[\lambda_k, \alpha(x)]$ и $K_R[\alpha(x)]$. Этот параграф содержит развернутое изложение результатов, анонсированных в заметке [7]. Здесь мы используем обозначения, введенные в [6, 7]. М. С. Лившиц ввел понятие открытой системы [10] как совокупности гильбертовых пространств E и H, для которых определены отображения $h=Ru$, $v=Su$ $(u, v\in E,\ h\in H)$ пространства E в H и в E. Открытой случайной системой назовем открытую систему в том случае, когда E и H являются подпространствами пространства $\mathfrak{L}_2[\Omega]$ (Ω — пространство элементарных событий с вероятностной мерой).

Запишем уравнения открытой случайной системы, ассоциированной с диссипативным квазиэрмитовым узлом (A, H, K, I, E), где оператор A удовлетворяет условиям: $\operatorname{Im} A\geq 0$, $r=\dim\overline{(\operatorname{Im} A)H}<\infty$

$$i\frac{dh}{dt}+Ah=K[u],\quad h|_{t=0}=h_0, \tag{1.1}$$

$$v=u-iK^*h.$$

Так как $\operatorname{Im} A$ является самосопряженным оператором, то его можно представить в виде $2\operatorname{Im} A=\sum_{\alpha=1}^{r}\omega_\alpha(\,.\,,a_\alpha)a_\alpha$, где a_α — ортонормированная система собственных элементов оператора $2\operatorname{Im} A$, а ω_α — соответствующие собственные числа. Тогда систему каналовых векторов $g_1,\dots,g_r$ можно выбрать, полагая $g_\alpha=(\omega_\alpha)^{1/2}a_\alpha$.

В качестве K возьмем отображение вида $Ku=\sum_{\alpha=1}^{r}(u, a_\alpha)g_\alpha$. Тогда, полагая $(u, a_\alpha)=u_\alpha$, уравнения (1.1) можно записать в виде

$$i\frac{dh}{dt}+Ah=\sum_{\alpha=1}^{r}u_\alpha(t)g_\alpha,\quad h|_{t=0}=h_0, \tag{1.2}$$

$$v_\alpha(t)=u_\alpha(t)-i(h, g_\alpha),\ \text{где}\ v_\alpha(t)=(v, a^\alpha).$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 199—217.

Любой процесс $u(t)$, значения которого принадлежит E, называется каналовым процессом. Каналовые векторы g_α представляют собой в данном случае систему некоррелированных случайных величин $Mg_\alpha \bar{g}_\beta = 0$, $M|g_\alpha|^2 = \omega_\alpha$.

Заметим, что если подать на вход открытой системы $u=0$, то соответствующий внутренний процесс $h(t)$ будет совпадать с случайным процессом $e^{iAt}h_0 \in K[\lambda_k; \alpha(x)]$. М. С. Лившиц и А. А. Янцевич получили спектральные разложения [10] для случайного процесса $h(t)=e^{iAt}h_0$, где A является полным диссипативным оператором с конечномерной мнимой компонентной (т. е. оператор не имеет существенно непрерывный спектр). Они показали, что для такого процесса существуют две последовательности „элементарных“ случайных процессов $z_k(t)$, $u_k(t)$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

1. Процессы $z_k(t)=\psi_k(t)z_k$ условно детерминированы (т. е. $\psi_k(t)$ — детерминированная функция, z_k — фиксированная случайная величина) и $Mz_k\bar{z}_j=\delta_{k,j}$, где $\delta_{k,j}$ — символы Кронекера.

2. Имеет место разложение

$$h(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)z_k. \tag{1.3}$$

3. Процессы $u_k(t)$ являются каналовыми, т. е. их значения принадлежат фиксированному r-мерному пространству $E=(\operatorname{Im} A)H$:

$$\begin{gathered} u_k(t)=\sum_{\alpha=1}^{r}u_{k,\alpha}(t)a_\alpha, \\ u_{k,\alpha}(t)=Mu_k(t)\bar{a}_\alpha, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $Ma_\alpha \bar{a}_\beta=\delta_{\alpha\beta}$ и $a_\alpha \in E$.

4. Функции $\psi_k(t)$ и $u_{k,\alpha}(t)$ определются из системы рекуррентных уравнений

$$\begin{gathered} i\frac{d\psi_k}{dt}+\lambda_k\psi_k=\sum_{\alpha=1}^{r}(u_{k,\alpha}(t)-i\sqrt{\omega_\alpha}\,M(a_\alpha\bar{z}_k)), \\ u_{k+1,\alpha}(t)=u_{k,\alpha}(t)-i\sqrt{\omega_\alpha}\,M(z_k\bar{a}_\alpha)\psi_k(t), \\ \omega_k(t)_{\,t=0}=\psi_k(0),\quad u_{1,\alpha}(t)=0,\quad k=1,2,\ldots,\ \alpha=1,\ldots,r, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где λ_k, $k=1, 2, \ldots$ — собственные числа оператора A,

ω_α, $\alpha=1,\ldots,r$ — собственные числа оператора $2\operatorname{Im} A$.

Теперь мы обобщим результаты М. С. Лившица и А. А. Янцевича на случай, когда спектр оператора A произволен. Рассмотрим оператор $\hat{A}$, действующий в пространстве $\mathfrak{L}_2^{(p)}[0,l]$ по формуле

$$\hat{A}f(x)=\alpha(x)f(x)+i\int_0^x f(\xi)\pi(\xi)\pi^*(x)d\xi, \tag{1.6}$$

где $f(x)=\|f_1(x),\ldots,f_p(x)\|\in\mathfrak{L}_2^{(p)}[0,l]$,

$$\pi(x)=\left\|\begin{matrix}\pi_{11}(x) & \pi_{12}(x)\ldots\pi_{1r}(x)\\ \vdots & \\ \pi_{p1}(x) & \pi_{p2}(x)\ldots\pi_{pr}(x)\end{matrix}\right\|,$$

$\pi(x)$ — квадратная или прямоугольная матрица, имеющая r столбцов и p строк, $p\leqq r$, линейно независимых на некотором множестве положительной меры, и удовлетворяющая условию

$$\mathrm{sp}\,\pi^*(x)\,\pi(x)\equiv 1. \tag{1.7}$$

Включим оператор $\widehat{A}$ в комплекс

$$X=(\widehat{A};\ \mathfrak{L}_2^{(p)}[0,l];\ g_1,\ldots,g_r;\ I),$$

где $g_\alpha(x)=\|\bar{\pi}_{1\alpha}(x),\ldots,\bar{\pi}_{p\alpha}(x)\|$.

Условие (1.7) можно записать в виде $\sum\limits_{\alpha=1}^{r}g_\alpha(x)g_\alpha^*(x)\equiv 1$. Пусть $\Phi(\Delta)=(\Phi_1(\Delta),\ldots,\Phi_p(\Delta))$. Тогда под $\psi=\int\limits_0\psi(x)\Phi(dx)$ будем понимать вектор $(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_p)$, где $\psi_k=\int\limits_0^l\psi(x)\Phi_k(dx)$.

Введем функции

$$\mathring{Z}_\Delta(x)=\begin{cases}1, & x'\leqq x\leqq x''\\ 0, & x\notin\Delta=[x',x''],\end{cases}$$

$$\mathring{Z}_\Delta^k=\underbrace{[0,\ldots,\mathring{Z}_\Delta(x)}_{k},\ldots,0],\quad k=1,2,\ldots,p.$$

Очевидно, $(\mathring{Z}_{\Delta_1}^i,\mathring{Z}_{\Delta_2}^k)=d(\Delta_1\cap\Delta_2)\,.\,\delta_{ik}$, где $d(\Delta_1\cap\Delta_2)$ — длина общей части сегментов Δ_1 и Δ_2. Векторы $g_\alpha=\|\pi_{1\alpha}(x),\ldots,\pi_{p\alpha}(x)\|$ и $f=\|f_1(x),\ldots,f_p(x)\|$ как элементы H

$$f=\int\limits_0^l\sum_{i=1}^{p}f_i(x)\,d\mathring{Z}_{[0,x]},\qquad g_\alpha=\int\limits_0^l\sum_{i=1}^{p}\bar{\pi}_{i\alpha}(x)d\mathring{Z}_{[0,x]}^i. \tag{1.8}$$

Напишем уравнения открытой случайной системы, ассоциированной с комплексом X:

$$\begin{gathered}i\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\alpha(x)\psi(x,t)+i\int\limits_0^x\psi(\xi,t)\,\pi(\xi)\pi^*(x)d\xi=\sum_{\alpha=1}^{r}u_\alpha(t)\,g_\alpha(x),\\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\quad v_\alpha(t)=u_\alpha(t)-i\int\limits_0^l\psi(\xi,t)\,g_\alpha^*(\xi)d\xi.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Легко проверяется, что

$$\psi(\xi, t)\,\pi(\xi)\,\pi^*(x)=\sum_{\alpha=1}^{r}\psi(\xi, t)\,g_\alpha^*(\xi)g_\alpha(x).$$

Тогда первое уравнение из (1.9) можно переписать в виде

$$i\,\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}+\alpha(x)\psi(x, t)=\sum_{\alpha=1}^{r}\left(u_\alpha(t)-i\int_0^x\psi(\xi, t)\,g_\alpha^*(\xi)d\xi\right)g_\alpha(x).$$

Положим

$$u_\alpha(x, t)=u_\alpha(0, t)-i\int_0^x\psi(\xi, t)\,g_\alpha^*(\xi)d\xi,$$

где $u_\alpha(0, t)=u_\alpha(t)$, $u_\alpha(l, t)=v_\alpha(t)$.

Тогда уравнения (1.9) запишутся следующим образом:

$$i\,\frac{\partial\psi_k(x, t)}{\partial t}+\alpha(x)\psi_k(x, t)=\sum_{\alpha=1}^{r}u_\alpha(x, t)\,\overline{\pi_{k\alpha}}(x),$$

(1.10)

$$i\,\frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial x}=\sum_{m=1}^{p}\psi_m(x, t)\,\pi_{m\alpha}(x),\ \ \psi_k(x, 0)=\psi_{0k}(x),\ \ u_\alpha(0, t)=u_\alpha(t).$$

Пусть задан случайный процесс $h(t)=e^{iAt}h(0)\in K[\lambda_k, \alpha(x)]$ и оператор A — простой и $r=\dim(\operatorname{Im}A)H<\infty$. Известно [1], что оператор A унитарно эквивалентен с точностью до дополнительной компоненты своей треугольной модели $\mathbf{A}=A_1\curlyvee\widehat{A}=A_1P_1+\widehat{A}P_2+\Gamma$. $\mathbf{A}$ действует в пространстве $\mathbf{H}=l_2\oplus\mathfrak{L}_2^{(r)}[0, l]$, P_1 — ортопроектор на l_2, P_2 — ортопроектор на $\mathfrak{L}_2^{(r)}[0, l]$, A_1 — дискретная часть треугольной модели $\mathbf{A}$, $\widehat{A}$ — непрерывная часть, которая строится по формуле (1.6), причем дополнительная компонента оператора $\mathbf{A}$ совпадает с дополнительной компонентой оператора $\widehat{A}$.

Таким образом, существует унитарный оператор U_1, отображающий главное подпространство $\mathbf{H}_\theta$ оператора $\mathbf{A}$ на линейную замкнутую оболочку H (л. з. о.) величин $\{h(t)\}$, при этом $A=U_1\mathbf{A}_\theta U_1^{-1}$, где $\mathbf{A}_\theta$ — простая часть оператора $\mathbf{A}$.

Пусть гильбертово пространство N имеет одинаковую размерность с избыточным подпространством $\mathbf{H}_\theta^{(0)}$ оператора $\mathbf{A}$. Тогда существует унитарный оператор U_2, отображающий $\mathbf{H}_\theta^{(0)}$ на N. Рассмотрим оператор

$$U\mathbf{f}=\begin{cases}U_1\mathbf{f}, & \mathbf{f}\in\mathbf{H}_\theta,\\ U_2\mathbf{f}, & \mathbf{f}\in\mathbf{H}_\theta^{(0)}.\end{cases}$$

Очевидно U является унитарным оператором, отображающим $\mathbf{H}$ на $H_N=H\oplus N$, а оператор $B=A\oplus B_0$ ($B_0=U_2\mathbf{A}_\theta^{(0)}U_2^{-1}$, $\mathbf{A}_\theta^{(0)}$ — дополнительная компонента треугольной модели $\mathbf{A}$) унитарно эквивалентен оператору $\mathbf{A}$. Любая кривая $h(t)=e^{iBt}h=e^{iAt}h_0+e^{iB_0t}h_N$ (h_N — произвольный элемент из N) в пространстве H_N будем называть несущественным N-расширением случайного процесса $h(t)$. В частности, когда $h_N=0$, то несущественное

N-расширение совпадает со случайным процессом, но уже рассматриваемым как кривой в пространстве H_N.

Из всех этих рассмотрений, полагая $Z_x^k = U\overset{\circ}{Z}{}_x^k$ $(k=1, 2, \ldots, p)$, получаем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть дан случайный процесс* $h(t)=e^{iAt}h_0 \in K_R[\alpha(x)]$ *и пусть оператор* A *является простым оператором с конечным рангом неэрмитовости. Тогда в пространстве* H_N *существуют* p *случайных спектральных мер* $Z_x^k (0 \leq x \leq l)$ *и совокупность* r *векторных функций* $g_\alpha(x) = \| \overline{\pi_{1\alpha}}(x), \ldots, \overline{\pi_{p\alpha}}(x) \| (\alpha=1, \ldots, r)$, *удовлетворяющих условиям:*

1) $M(\Delta_1 Z_x^i \Delta_2 Z_x^k) = d(\Delta_1 \cap \Delta_2)\, \delta_{ik}$, где $\Delta_j Z_x^i$ — *приращения* Z_x^i *соответственно на интервалах* Δ_j, *а* $d(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ — *длина общей части интервалов* Δ_1 *и* Δ_2;

2) $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{r} g_\alpha(x)\, g_\alpha^*(x) = 1$;

3) *любое несущественное* N-*расширение* $\overline{h}(t)$ *случайного процесса* $h(t)$ *имеет вид*

$$\overline{h}(t) = \int_0^l \sum_{k=1}^{p} \psi_k(x, t)\, dZ_x^k, \tag{1.11}$$

где функции $\psi_k(x, t)$ *определяются из системы уравнения в частных производных* (1.10).

Исключая в системе (1.10) $\psi_k(x, t)$, приходим к системе уравнения гиперболического типа

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_\alpha(x, t)}{\partial x\, \partial t} - i\alpha(x)\frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial x} + \sum_{\beta=1}^{r} u_\beta(x, t)\, g_\beta(x)\, g_\alpha^*(x) = 0, \\ u_\alpha(0, t) = 0, \quad u_\alpha(x, 0) = -i\int_0^x \psi_0(\xi) g_\alpha^*(\xi)\, d\xi \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Легко убедиться, что если процесс $h(t)=e^{iAt}h(0) \in K_R[\alpha(x)]$ и A — простой оператор, то инфинитезимальная корреляционная функция (и. к. ф.) процесса $h(t)$ совпадает с и. к. ф. любого его несущественного N-расширения $\overline{h}(t)$. Так как и. к. ф. процесса $h(t)$ имеет вид $W(t, s) = \sum_{k=1}^{r} \Phi_\alpha(t)\overline{\Phi_\alpha(s)}$, где $\Phi_\alpha(t) = (e^{iAt}h(0), g_\alpha)$, g_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ — каналовые векторы оператора A, то $\Phi_\alpha(t) = iu_\alpha(l, t)$, и тогда

$$W(t, s) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha(l, t)\overline{u_\alpha(l, s)}. \tag{1.13}$$

Учитывая полученные соотношения, можно сформулировать следствие из теоремы 1.1.

Следствие. *Каждому процессу* $h(t) \in K_R[\alpha(x)]$ *отвечает система уравнения* (1.12), *решение которой позволяет определить и. к. ф. процесса* $h(t)$

по формуле (1.13), *а функции* $\psi_k(x, t)$ *в спектральном разложении определяются по формуле*

$$\psi_k(x, t) = e^{i\alpha(x)t}\psi_{0k}(x) - i\int_0^t e^{-i\alpha(x)\tau}\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha(x, \tau)\overline{\pi_{k\alpha}}(x)d\tau. \tag{1.14}$$

Пусть теперь случайный процесс $h(t) = e^{iAt}h(0)$ принадлежит классу $K[\lambda_k;\ \alpha(x)]$, оператор A — простой и $r = \dim\overline{(\operatorname{Im} A)H} < \infty$. Оператор A можно представить в виде сцепления операторов A_1 и A_2, где A_1 — полный диссипативный оператор, соответствующий невещественному спектру $\{\lambda_k\}$ оператора A, A_2 — диссипативной оператор с чисто вещественным спектром.

Пусть $X = X_1 \curlyvee X_2$ — соответствующее сцепление операторных комплексов. Так как для открытых систем $\mathcal{F}_{X_1}$ и $\mathcal{F}_{X_2}$ уже получены спектральные разложения, то, используя тот факт, что сцеплению комплексов $X_1 \curlyvee X_2$ соответствует сцепление открытых систем $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_{X_1} \curlyvee \mathcal{F}_{X_2}$, мы получаем следующую теорему:

Теорема 1.2. *Пусть случайный процесс* $h(t) = e^{iAt}h(0)$ *принадлежит классу* $K[\lambda_k;\ \alpha(x)]$, *оператор* A — *простой и* $r = \dim\overline{(\operatorname{Im} A)H} < \infty$. *Тогда в пространстве* $H_N \supset H$ (л. з. о. $\{h(t)\}$) *существуют* p *случайных спектральных мер* Z_x $(0 \le x \le l)$ *и последовательность некоррелированных случайных величин* $Z_k \in H$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *удовлетворяющих условиям*

1) $M(Z_x^i Z_k) = 0$ $(0 \le x \le l;\ k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, p)$;

2) *любое несущественное* N*-расширение* $\overline{h}(t)$ *случайного процесса* $h(t)$ *имеет вид*

$$h(t) = \int_0 \sum_{k=1}^{p}\psi_k(x, t)dZ_x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)Z_k, \tag{1.15}$$

где $\psi_k(x, t)$ *определяются из системы уравнения* (1.10), *а* $\varphi_k(t)$ *определяются из системы рекуррентных уравнений*

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi_k}{dt} + \lambda_k\varphi_k = \sum_{\alpha=1}^{r} u_{k,\alpha}(t)\sqrt{\omega_\alpha}\, M(a_\alpha \overline{Z}_k),\\ u_{k+1,\alpha}(t) = u_{k,\alpha}(t) - i\sqrt{\omega_\alpha}M(Z_k\overline{a}_\alpha)\varphi_k(t),\\ u_{1,\alpha}(t) = u_\alpha(l, t)\ (k = 1, 2, \ldots;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r),\end{gathered} \tag{1.16}$$

где $u_\alpha(x, t)$ — *решение системы* (1.12).

В частном случае, когда $\alpha(x) = x$ и ранг неэрмитовости $r = 1$, система (1.10) была решена в работе [5]. Таким образом, если задан процесс $h(t) = e^{iAt}h(0) \in K[\lambda_k, x]$ и $r = 1$, то $h(t)$ можно представить в виде

$$h(t) = \int_0^l \psi(x, t)\, dZ_x + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)Z_k,$$

где

$$\psi(x, t) = e^{ixt} \left(\psi_0(x) - t \int_0^x \psi_0(\xi) M(1-i, 2, it(\xi - x)) d\xi \right),$$

а $\varphi_k(t)$ определяются из системы рекуррентных уравнений

$$\frac{d\varphi_k}{dt} + \lambda_k \varphi_k = u_{k,1}(t) \sqrt{\omega} M(\alpha \bar{Z}_k),$$

$$u_{k+1,1}(t) = u_{k,1}(t) - i\sqrt{\omega} M(z_k \bar{a}) \varphi_k(t),$$

где

$$u(l, t) = -ie^{ilt} \int_0^l \psi_0(\xi) M(1-i, 1, it(\xi - x))\, d\xi,$$

$M(a, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Замечание. Результаты этого параграфа легко распространяются и на случай, когда $r = \dim \overline{(\operatorname{Im} A)H} = \infty$, $\operatorname{sp}(\operatorname{Im} A) < \infty$.

2. Линейно-представимые случайные процессы с неограниченным инфинитезимальным оператором

2.1. Пусть задан линейный замкнутый оператор A с плотной областью определения D_A в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющий следующим условиям:

а) оператор A — диссипативен, т. е. $\operatorname{Im}(Af, f) \geq 0$ $(f \in D_A)$;

б) $\lambda = -i$ — регулярная точка оператора A.

Тогда по теореме Филипса и Люмера [4] существует единственным образом определенная сильно непрерывная, сжимающая полугруппа операторов $T(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, причем оператор iA является инфинитезимальным оператором полугруппы $T(t)$. Наоборот, инфинитезимальный оператор любой сжимающей, сильно непрерывной полугруппы операторов $T(t)$ удовлетворяет условиям а) и б).

Определение 1. *Будем говорить, что случайный процесс $h(t) \in H$ (л. з. о. $\{h(t)\}$) является линейно представимым диссипативным процессом, если существует сжимающая, сильно непрерывная полугруппа операторов $T(t)$ в пространстве H, такая что $h(t) = T(t)h(0)$.*

Обозначим через G_A множество векторов $f \in D_A$, для которых $(Af, g) = (f, Ag)$ при любом $g \in D_A$. Многообразие G_A называется областью эрмитовости оператора A и является наиболее широкое многообразие, на котором $A = A^*$, а из замкнутости оператора A вытекает, что $G_A = G_{A^*}$ и замкнутость оператора $A|_{G_A}$.

Следуя А. В. Кужелю [8, 9], введем следующее

Определение 2. *Линейный замкнутый оператор A с плотной областью определения D_A называется квазиэрмитовым оператором ранга r (K^r-оператором), если $A|_{G_A}$ — эрмитов оператор с индексами дефекта (r, r) и $0 < r < \infty$,* $\dim D_A = r \pmod{G_A}$.

Заметим, что область определения G_A-эрмитового оператора $A|_{G_A}$ не обязательно плотна в пространстве H.

Всякий ограниченный несамосопряженный оператор с конечномерной мнимой компонентой является K^r-оператором. В дальнейшем будем рассматривать только такие K^r-операторы, для которых i и $-i$ являются регулярными точками.

Рассмотрим подпространства $M_\lambda=(A-\lambda I)G_A$, $N_\lambda=H\ominus M_\lambda$. Подпространства N_λ и $N_{\bar\lambda}$ называются дефектными подпространствами оператора $A|_{G_A}$ и $\dim N_\lambda=\dim N_{\bar\lambda}=r<\infty$.

Определение 3. *Будем говорить, что случайный процесс $h(t)=T(t)h(0)$ принадлежит классу K^r, если диссипативный оператор A является K^r-оператором.*

В настоящем пункте некоторые из результатов, изложенные в [6, 7], будут распространены на случайные процессы класса K^r.

Аналогично, как в ограниченном случае, можно показать, что существует $s.\lim T(t).T(t)^*=R$, а отсюда $\lim\limits_{\tau\to\infty} V(t+\tau,\ s+\tau)=V_\infty(t-s)=(RT(t-s)h(0),\ h(0))$.

Если $h(t)=T(t)h_0$, где $h_0\in D_A$, то существует инфинитезимальная корреляционная функция

$$W(t,\ s)=-\frac{\partial}{\partial\tau}V(t+\tau,\ s+\tau)_{\tau=0}, \tag{2.1}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}W(t+\tau,\ s+\tau)=0,$$

$$V(t,\ s)=V_\infty(t-s)+\int_0^\infty W(t+\tau,\ s+\tau)\,d\tau. \tag{2.2}$$

Обозначим $T=(A-iI)\ (A+iI)^{-1}$ когенератор полугруппы $T(t)$. Так как A — диссипативный оператор и $-i$ — регулярная точка оператора A, то T является сжатием.

Пусть A является диссипативным K^r-оператором. Рассмотрим операторы

$$I-T^*T=2B=2(iR_{-i}-iR^*_{-i}-2R^*_{-i}R_{-i}),$$
$$I-TT^*=2B_*=2(iR_{-i}-iR^*_{-i}-2R_{-i}R^*_{-i}),$$

где $R_{-i}=(A+iI)^{-1}$.

Нетрудно показать, что $B\geqq 0$ и $B_*\geqq 0$, причем $BH=N_{-i}$ и $B_*H=N_i$. Таким образом, T является слабым сжатием (сжатие называют слабым, если спектр $\sigma(T)$ не покрывает единичного круга и оператор $I-T^*T$ является ядерным), и дефектные числа сжатия T $\delta_T=\delta_{T^*}=r<\infty$. Так как B и B_* являются неотрицательными r-мерными операторами, их можно представить в виде

$$Bf=\sum_{\alpha=1}^r(f,\ g_\alpha)g_\alpha\ ,\qquad B_*f=\sum_{\alpha=1}^r(f,\ g_{*\alpha})g_{*\alpha}.$$

Треугольные модели K^r-операторов были построены А. Кужелем [8, 9] при помощи введенной им характеристической матрицы функции (х. м. ф.) K^r-оператора. Для диссипативного оператора х. м. ф. имеет вид

$$S_A(\lambda)\,S_A(i)=I+i(\lambda+i)\|((A^*-iI)(A^*-\lambda I)^{-1}g_k,\ g_i)\|, \tag{2.3}$$

где $S_A(i)$ — эрмитово неотрицательная матрица.

Условимся подпространство $H_1 \subset H$ называть инвариантным относительно оператора A, если $\overline{D_A \cap H_1} = H_1$, $A(D_A \cap H_1) \subset H_1$. Наибольшее инвариантное подпространство H_A оператора A называется дополнительным подпространством оператора A, если $H_A \cap D_A \subset G_A$ и оператор A индуцирует в H_A самосопряженный оператор.

Оператор $A_p = A|_{(H \ominus H_A) \cap D_A}$ называется простой частью оператора A. Оператор A называется простым, если $A = A_p$. А. В. Кужель показал [8, 9], что

а) дополнительное подпространство H_A приводит операторы

$$A,\ A^*,\ R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1},\ \ \widetilde{R}_z = (A^* - zI)^{-1},$$

где λ и z — регулярные точки операторов A и A^* соответственно;

б) простая часть K^r-оператора есть K^r-оператор;

в) дополнительное подпрансво H_A совпадает с ортогональным дополнением линейной замкнутой оболочки всех многообразий вида

$$R_{-i}^n N_{-i} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2.2. Случайные K^r-процессы с инфинитезимальным оператором без спектра в конечной части плоскости. Обозначим класс случайных K^r-процессов с инфинитезимальным оператором (и. о.) без спектра в конечной части плоскости через $K^r[\lambda = \infty]$. Если A является диссипативным K^r-оператором без спектра в конечной части плоскости, то оператор $B_0 = A^{-1}$ ограничен и

$$(B_0 - \lambda I) = \lambda^{-1} A (A - \lambda^{-1} I)^{-1}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) (так как A — замкнутый оператор) вытекает, что спектр оператора B_0 сосредоточен в точке $\lambda = 0$. Из диссипативности оператора A следует, что B_0 имеет неположительную мнимую компоненту. Вычислим ранг неэрмитовости оператора B_0. Пусть $H = M_0 \oplus N_0$, где $M_0 = AG_A$. По определению G_A, если $\varphi \in G_A$, то для любого $g \in D_A$ $(A\varphi, g) = (\varphi, Ag)$. Положим $\varphi = B_0 u$ $(u \in M_0)$, $g = B_0 v$ $(v \in H)$, тогда $(B_0 u, v) = (u, B_0 v)$ для любого $v \in H$. Таким образом,

$$\dim \left(\frac{B_0 - B_0^*}{i} \right) H = \dim N_0 = r < \infty.$$

Отсюда следует, что B_0 является вольтерровым оператором с рангом неэрмитовости r и неположительной мнимой компонентой. Так как у B_0 существует обратный (в широком смысле) оператор A, то B_0 является простым вольтерровым оператором, и следовательно, A — тоже простой. Таким образом, K^r-оператор без спектра в конечной части плоскости всегда простой.

Рассмотрим оператор $\hat{B}_0 f = -i \int_0^x f(\xi)\, d\xi$, действующий в пространстве $\mathfrak{L}_2 [0, l]$, и построим операторы

$$\widetilde{B}_0 f = (\underbrace{\hat{B}_0 \oplus \cdots \oplus \hat{B}_0}_{r}) f \quad (f(x) \in \mathfrak{L}_2^{(r)} [0, l],$$

$$\hat{A}\,f(x)=\hat{B}_0^{-1}f(x)=-\frac{1}{i}\frac{df}{dx}.$$

Область определения $D_{\hat{A}}$ состоит из абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций $f(x)$, при этом $f'(x)\in \mathfrak{L}_2[0, l]$, $f(0)=0$. Обозначим через $\widetilde{A}$ прямую сумму операторов

$$\widetilde{A}\,f(x)=\widetilde{B}_0^{-1}f(x)=(\underbrace{\hat{A}\oplus\cdots\oplus\hat{A}}_{r})\,f(x)$$

$$D_{\widetilde{A}}=\underbrace{D_{\hat{A}}\oplus\cdots\oplus D_{\hat{A}}}_{r}.$$

Оператор $\widetilde{A}$ будем называть универсальной моделью оператора A. Имеет место следующая теорема;

Теорема 2.1. *Существует инвариантное подпространство H_1 универсальной модели $\widetilde{A}$, на котором индуцируется оператор $\widetilde{A}|_{H_1\cap D_{\widetilde{A}}}$, унитарно эквивалентный оператору A.*

Доказательство. Так как $B_0=A^{-1}$ является простым вольтерровым оператором ранга r, то существует инвариантное подпространство H_1 оператора $\widetilde{B}_0$ [2], и, если обозначим $B_1=\widetilde{B}_0|_{H_1}$, то $B_0=UB_1U^{-1}$, где U — унитарный оператор, отображающий H_1 на H. Покажем, что H_1 является инвариантным подпространством оператора $\widetilde{A}$.

Действительно, $\widetilde{B}_0H_1\subset D_{\widetilde{A}}\cap H_1$, а с другой стороны $\overline{\widetilde{B}_0H_1}=H_1$, так как в противном случае $\widetilde{B}_0$ не был бы простым вольтерровым оператором. Следовательно, $\overline{D_{\widetilde{A}}\cap H_1}=H_1$.

Если допустить $\widetilde{A}h_1=g_1+g_2$ $(h_1\in D_{\widetilde{A}}\cap H_1)$, $0\neq g_2\in H_2=\mathfrak{L}_2^{(r)}[0, l]\ominus H_1$, то $h_1=\widetilde{B}_0g_1+\widetilde{B}_0g_2$, т. е. $P_2\widetilde{B}_0g_2=0$, что невозможно, так как оператор $P_2\widetilde{B}_0|_{H_2}=(\widetilde{B}_0^*|_{H_2})^*$ является простым вольтерровым оператором. Следовательно, $g_2=0$.

Таким образом, H_1 является инвариантным подпространством оператора $\widetilde{A}$ и $A=UA_1U^{-1}$, где $A_1=\widetilde{A}|_{H_1\cap D_{\widetilde{A}}}$. Теорема доказана.

Теперь построим сжимающую полугруппу с и. о. $i\widetilde{A}$. Очевидно, $\widetilde{T}(t)=\underbrace{\hat{T}(t)\oplus\cdots\oplus\hat{T}(t)}_{r}$, где $\hat{T}(t)$ — сжимающая полугруппа с и. о. $i\hat{A}$.

Лемма 2.1. а. *Две сжимающие полугруппы операторов унитарно эквивалентны в том и только в том случае, когда унитарно эквивалентны соответствующие инфинитезимальные операторы.*

б. *Пусть $T(t)$ — сжимающая полугруппа операторов в пространстве H с и. о. iA. Пусть H_0 — инвариантное подпространство оператора A. Если оператор $A_0=A|_{H_0}$ имеет хотя бы одну регулярную точку, лежащую в нижней полуплоскости, то H_0 является инвариантным подпространством операторов $T(t)$, и сжимающая полугруппа $\mathring{T}(t)=T(t)_{H_0}$ имеет и. о. оператор A_0.*

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из конструкции сжимающей полугруппы с заданным инфинитезимальным оператором [4].

Докажем второе утверждение. Заметим предварительно, что точка λ ($\operatorname{Im}\lambda<0$) регулярна для оператора A_0 в том и только в том случае, если $(A-\lambda I)^{-1}H_0\subseteq H_0$. Для произвольной точки λ_1 ($\operatorname{Im}\lambda_1<0$) построим прямую L, соединяющую λ_0 с λ_1. Выберем $\varepsilon>0$ и точки $\lambda_0=\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n=\lambda_1$ на L таким образом, чтобы круги K_j ($|\lambda-\mu_j|<\varepsilon$, $j=0, 1, \ldots, n-1$) лежали внутри нижней полуплоскости и выполнялись неравенства $|\mu_{j+1}-\mu_j|<\varepsilon$. Поскольку $(A-\mu_0 I)^{-1}H_0\subseteq H_0$ и имеет место сходящееся по норме разложение $R_\lambda=R_{\mu_0}+(\lambda-\mu_0)R^2_{\mu_0}+\cdots$ ($\lambda\in K_0$), то $(A-\lambda I)^{-1}H_0\subseteq H_0$ ($\lambda\in K_0$) и, в частности, $(A-\mu_1 I)^{-1}H_0\subseteq H_0$. Продолжая этот процесс, придем к соотношению $(A-\lambda_1 I)^{-1}H_0\subseteq H_0$.

Таким образом, нижняя полуплоскость принадлежит резольвентному множеству оператора A_0. Так как, кроме того, оператор A_0 диссипативен, то существует единственным образом определенная сжимающая полугруппа $\mathring{T}(t)$ с и. о. iA_0.

Теперь, исходя из того, что $(A-\lambda I)^{-1}H_0\subseteq H_0$, и припоминая конструкцию сжимающей полугруппы [4], нетрудно убедиться, что H_0 является инвариантным подпространством операторов $T(t)$ и $\mathring{T}(t)=T(t)|_{H_0}$. Лемма доказана.

Обозначим $\hat{\psi}(x, t)=\hat{T}(t)\psi_0$. Очевидно, $\hat{\psi}(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t}=-\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x},\quad \hat{\psi}(x, 0)=\hat{\psi}_0(x)\quad (0\leqq t<\infty,\ 0\leqq x\leqq l). \tag{2.5}$$

Теперь, используя (2.5) и очевидное $\hat{T}(t)D_{\hat{A}}\subseteq D_{\hat{A}}$, легко показать, что

$$\hat{\psi}(x, t)=\begin{cases}\psi_0(x-t), & x\in[t, \infty)\cap[0, l],\\ \text{при прочих} & x\in[0, l].\end{cases} \tag{2.6}$$

Таким образом, для корреляционной функции $\hat{V}(t, s)$ случайного процесса $\hat{T}(t)\psi_0$ получаем

$$\hat{V}(t, s)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{\max[t\,;\,s]}^{l}\psi_0(x-t)\,\overline{\psi_0(x-s)}\,dx, & t, s\in[0, l],\\ 0 \text{ при прочих } t, s.\end{cases} \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) для модельного процесса $\widetilde{\Psi}(x, t)=\widetilde{T}(t)\Psi_0$ получаем

$$\widetilde{\Psi}(x, t)=\Psi_0(x-t)(x\in[t,\infty)\cap[0, l]),\ \widetilde{\Psi}(x, t)=0 \text{ при прочих } x\in[0, l] \tag{2.8}$$

$$\widetilde{V}(t, s)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{\max[t\,;\,s]}^{l}\Psi_0(x-t)\Psi_0^*(x-s)\,dx \text{ при } t, s\in[0, l],\\ 0 \text{ при прочих } t, s.\end{cases} \tag{2.9}$$

Аналогично, как в ограниченном случае [5], используя теорему 2.1 и лемму 2.1, можно доказать следующие две теоремы.

Теорема 2.2 (эта теорема сформулирована в [10] без доказательства). *Пусть случайный процесс* $h(t)$ *принадлежит классу* $K^r[\lambda=\infty]$. *Тогда корреляционная функция процесса* $h(t)$ *представима в виде* (2.9).

Теорема 2.3. *Если заданная функция* $V(t, s)$ *представима в виде* (2.9), *то существует гауссовский процесс* $h(t)\in K^r[\lambda=\infty]$, *корреляционная функция которого совпадает с* $V(t, s)$.

Теперь найдем спектральное разложение случайного процесса класса $K^r[\lambda=\infty]$. Известно [2], что простой вольтерровый оператор B_0 ранга $r\,(\operatorname{Im} B_0\leq 0)$ унитарно эквивалентен оператору

$$\overset{\circ}{B} f(x)=-i\int_0^x f(t)q(t)q^*(x)dt,\ 0\leq x\leq l,\ f\in \mathfrak{L}_2\,[0, l], \tag{2.10}$$

$$q(x)=\|\,\overline{\varphi_1}(x),\,\ldots,\,\varphi_r(x)\,\|,\ \varphi_\alpha(x)\in \mathfrak{L}_2\,[0, l],$$

$$\int_0^l q^*(x)q(x)dx=\|\,\omega_\alpha\,\delta_{\alpha\beta}\,\|.$$

Таким образом, оператор $A=B_0^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору $\overset{\circ}{A}=\overset{\circ}{B}{}^{-1}$.

Пусть $\overset{\circ}{T}(t)$ — сжимающая полугруппа с и. о. оператором $i\overset{\circ}{A}$. Обозначим $\psi(x, t)=\overset{\circ}{T}(t)\psi_0$. Далее нетрудно заметить, что

$$-i\int_0^x \frac{\partial\psi(u, t)}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^r \varphi_\alpha\,\overline{(u)}\,\varphi_\alpha(x)\,du=i\psi(x, t).$$

Обозначим

$$u_\alpha(x, t)=\int_0^x \psi(u, t)\,\varphi_\alpha(u)\,du.$$

Отсюда получаем

$$\psi(x, t)=-\sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial t}\,\varphi_\alpha(x),\quad \frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial x}=\psi(x, t)\,\overline{\varphi_\alpha(x)}, \tag{2.11}$$

$$\psi(x, 0)=\psi_0(x),\ u_\alpha(0, t)=0,\ \alpha=1, 2, \ldots, r.$$

Обозначим

$$Y(t, s)=\sum_{\alpha=1}^r u_\alpha(l, t)\,\overline{u_\alpha(l, s)}. \tag{2.12}$$

Введем функцию

$$\overset{\circ}{Z}_\Delta(x)=\begin{cases}1, & x'\leq x\leq x'',\\ 0, & x\notin[x', x''].\end{cases}$$

Ясно, что $(\overset{\circ}{Z}_{\Delta_1}, \overset{\circ}{Z}_{\Delta_2})=d(\Delta_1\cap\Delta_2)$. Очевидно f как элемент пространства $\mathfrak{L}_2\,[0, l]$

можно представить в виде $f = \int\limits_0^l f(x)\, d\mathring{Z}_{[0,x]}$, причем $f(x) = \frac{d}{dx}(f, \mathring{Z}_{[0,x]})$.

Так как $A = U\mathring{A}U^{-1}$, где U — унитарный оператор, отображающий $\mathfrak{L}_2[0, l]$ на H, то полагая $Z_x = U\mathring{Z}_x$ и используя лемму 2.1, получаем следующую теорему:

Теорема 2.4. *Для каждого случайного процесса $h(t)$ класса $K^r[\lambda = \infty]$ существует случайная спектральная мера Z_x $(0 \leq x \leq l)$ в пространстве H (л. з. о. $\{h(t)\}$), r функции $\varphi_\alpha(x)$, удовлетворяющих условиям:*

а) *$M(\Delta_1 Z_x \overline{\Delta_2 Z_x}) = d(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, где $\Delta_k Z_x$ — приращения Z_x соответственно на интервалах Δ_k, $d(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ — длина общей части интервалов Δ_1, Δ_2;*

б) $\sum\limits_{\alpha=1}^{r} |\varphi_\alpha(x)|^2 = 1$ *и* $\int\limits_0^l \varphi_\alpha(x)\overline{\varphi_\beta(x)}dx = \omega_\alpha - \delta_{\alpha\beta}$;

в) *Случайный процесс $h(t)$ может быть представлен в виде*

$$h(t) = \int\limits_0^l \psi(x, t)dZ_x, \tag{2.13}$$

где функций $\psi(x, t)$ определяется из системы уравнений (2.11).

Следствие 1. *Каждому процессу $h(t) \in K^r$ $[\lambda = \infty]$ отвечает система уравнений вида*

$$\frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial x} = -\overline{\varphi_\alpha(x)} \sum_{\beta=1}^{r} \frac{\partial u_\beta(x, t)}{\partial t} \varphi_\beta(x) \quad (\alpha = 1, \ldots, r) \tag{2.14}$$

с условиями

$$u_\alpha(x, 0) = \int\limits_0^x \psi_0(\xi)\varphi_\alpha(\xi)d\xi, \; u_\alpha(0, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

решение которой позволяет определить функцию $\psi(x, t)$ в спектральном разложении (2.13) *по формуле*

$$\psi(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial x} \varphi_\alpha(x) = -\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial t} \varphi_\alpha(x) \tag{2.15}$$

$$(0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq x \leq l).$$

Заметим, что в случае, когда $\psi_0(x) \in D_{\mathring{A}}$, инфинитезимальная корреляционная функция процесса $h(t)$ существует и определяется равенством

$$W(t, s) = \left. \frac{\partial^2 Y(t + \tau_1, s + \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right|_{\substack{\tau_1 = 0 \\ \tau_2 = 0}}, \tag{2.16}$$

где

$$Y(t, s) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha(l, t)\overline{u_\alpha(l, s)}.$$

2.3. Случайные K^r-процессы с инфинитезимальным оператором с чисто дискретным спектром. Результаты этого пункта были получены совместно с Г. М. Губреевым и анонсированы в заметке [3]. Пусть задан случайный K^r-процесс с и. о. iA. Если диссипативный оператор A не имеет непрерывного спектра и существенной особенности в бесконечности, то мультипликативное резложение х. м. ф. (2.3) имеет вид [8, 9]

$$S_A(\lambda)=U\prod_{k=1}^{N}[L(k)-\lambda I]\,[L^*(k)-\lambda I]^{-1}\gamma(k)U_k^{-1}U^* \quad (N\leq\infty), \tag{2.17}$$

где U и U_k — унитарные матрицы, $L(k)$ — диагональные матрицы, все отличные от нуля элементы которых равны между собой, $\gamma(k)$ — диагональные и унитарные матрицы. Из (2.17) вытекает, что

$$|\det S_A(\lambda)|=\prod_{k=1}^{N}\left|\frac{\lambda_k-\lambda}{\bar\lambda_k-\lambda}\right|, \tag{2.18}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

а) множество $\{\lambda_k\}$ лежит в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda_k>0$;

б) предельные точки множества $\{\lambda_k\}$ лежат на вещественной оси и $\sum_k\left(1-\frac{|\lambda_k-i|}{|\lambda_k+i|}\right)<\infty$.

Такое множество $\{\lambda_k\}$ будем называть λ-множеством.

В дальнейшем класс случайных K^r-процессов, удовлетворяющих вышеизложенным условиям, будем обозначать через $K^r[\lambda_k]$.

Из результатов А. В. Кужеля [8, 9] вытекает, что если случайный K^r-процесс $h(t)=T(t)h_0$ с и. о. iA принадлежит классу $K^r[\lambda_k]$ и оператор A — простой, то A является полным диссипативным оператором (т. е. линейная замкнутая оболочка конечномерных инвариантных пространств, отвечающих невещественным собственным числам оператора A, совпадает с H).

Наоборот, нетрудно показать, что если задан случайный K^r-процесс $h(t)=T(t)h_0$ с и. о. iA и A является полным диссипативным оператором, то $h(t)\in K^r[\lambda_k]$ и оператор A — простой.

Лемма 2.2. *Естественное сцепление $A=A_1\curlyvee A_2$ полных диссипативных K^r-операторов A_1 и A_2 является полным диссипативным K^r-оператором.*

Доказательство. Пусть заданы полные диссипативные операторы A_1 и A_2, действующие в пространствах H_1 и H_2. Пусть $g_1^{(k)},\ldots, g_r^{(k)}$ ортогональный базис в пространстве $N_{-i}^{(k)}$ $(k=1, 2)$, такой, что $B^{(k)}f=\sum_{j=1}^{r}(f, g_j^{(k)})g_j^{(k)}$ $(k=1, 2)$, где оператор $B^{(k)}$ задается равенством $B^{(k)}=i(A_k+iI)^{-1}-i(A_k^*-iI)^{-1}-2(A_k^*-iI)^{-1}(A_k+iI)^{-1}$ $(k=1, 2)$.

По определению А. В. Кужеля [8, 9] естественное сцепление $A=A_1\curlyvee A_2$ определяется по формуле

$$A=A_1P_1S^{-1}+A_2P_2+A_{12}P_2, \tag{2.19}$$

где $D_A = S[D_{A_1} \oplus D_{A_2}]$, $S = I + iA_{12}P_2$, $A_{12}\bullet = \sum_{k=1}^{r}((A_2+iI)\bullet,\ g_k^{(2)})\tau_k^{(1)-1}g_k^{(1)}$, $\tau_k^{(1)}$ — диагональный элемент матрицы $S_{A_1}(i)$.

Выберем в пространстве H_1 ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots$, такой, что $A_1e_k = a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \cdots + a_{kk}e_k$, $a_{kk} = \lambda_k^{(1)} = (A_1e_k,\ e_k)$ (существование такого базиса вытекает из полноты оператора A_1).

Пусть H_A—дополнительное подпространство оператора $A = A_1 \curlyvee A_2$, P_A— ортопроектор на H_A. Очевидно, $e_k \in D_{A_1} = D_A \cap H_1 \subset D_A$, а так как H_A приводит A, то $P_Ae_k \in D_A$. Тогда $AP_Ae_1 = P_AAe_1 = P_AA\,.\,e_1 = \lambda_1^{(1)}P_Ae_1$. Таким образом, P_Ae_1 — собственный вектор оператора A, соответствующий невещественному собственному числу $\lambda_1^{(1)}$. Поскольку вектор P_Ae_1 принадлежит дополнительной компоненте, в которой оператор A является самосопряженным, то $P_Ae_1 = 0$. Аналогично найдем, что

$$AP_Ae_2 = P_AAe_2 = P_AA_1e_2 = P_A(a_{21}e_1 + \lambda_2^{(1)}e_2) = \lambda_2^{(1)}P_Ae_2,$$

и, следовательно, $P_Ae_2 = 0$. Продолжая эти вычисления, приходим к выводу, что $H_A \subset H_2$.

С другой стороны, дополнительное подпространство H_A совпадает с ортогональным дополнением л. з. о. всех многообразий вида $R_{-i}^n\ N_{-i}$, $n = 0, 1, \ldots$, где $R_{-i} = (A+iI)^{-1}$.

Можно показать, что векторы $g_k = g_k^{(1)} + \tau_k^{(1)}g_k^{(2)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, образуют ортогональный базис в пространстве N_{-i} и $R_{-i} = R_{-i}^{(1)}P_1 + R_{-i}^{(2)}P_2 + R_0P_2$,

где $R_0\bullet = i\sum_{k=1}^{r}(\bullet,\ g_k^{(2)})\varphi_k^{(1)}$; $\varphi_k^{(1)} = \tau_k^{(1)^{-1}}(I - 2iR_{-i}^{(1)}g_k^{(1)})$.

Пусть $h_A \in H_A$ • Так как $H_A \subset H_2$, то $0 = (h_A,\ g_k) = (h_A,\ g_k^{(2)})\tau_k^{(1)}$,

$$0 = (h_A,\ R_{-i}g_k) = (h_A,\ R_{-i}^{(1)}g_k^{(1)})$$
$$+ (h_A,\ R_{-i}^{(2)}g_k^{(2)})\tau_k^{(1)} + (h_A, R_0\,g_k^{(2)}) = (h_A, R_{-i}^{(2)}g_k^{(2)})\tau_k^{(1)}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$(h_A,\ R_{-i}^{(2)n}g_k^{(2)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r;\quad n = 0, 1, \ldots).$$

Но оператор A_2 простой, поэтому л. з. о. всех многообразий вида $R_{-i}^{(2)n}N_{-i}^{(2)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ совпадает со всем пространством H_2.

Таким образом, мы получили, что оператор A простой. Полнота конечномерных инвариантных подпространств, отвечающих невещественным собственным числам оператора A, теперь вытекает из теоремы умножения и критерия полноты для диссипативных K^r-операторов. Лемма доказана.

Пусть задано λ-множество $\{\lambda_k\}$. Построим оператор

$$\hat{A}f = \{f(k)\lambda_k + i\sum_{j=k+1}^{\infty} f(j)\beta(j)\beta(k)\},$$
(2.20)
$$f = \{f(k)\} \in D_{\hat{A}} \subset l_2,\quad \lambda_k = \alpha(k) + \frac{i}{2}\beta^2(k).$$

Х. м. ф. оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$S_{\hat{A}}(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\bar{\lambda}_k-\lambda}\,\gamma(k)\quad(|\gamma(k)|=1). \tag{2.21}$$

Покажем, что $\hat{A}$ является полным диссипативным оператором. Для этого, что очевидно из (2.21), достаточно показать, что оператор $\hat{A}$ является простым оператором. Пусть $H_{\hat{A}}$ — дополнительное подпространства оператора $\hat{A}$ и $P_{\hat{A}}$ — соответствующий ортопроектор. Выберем базис в пространстве l_2 $e_k=(\delta_{k1},\delta_{k2},\ldots,\delta_{kk},\ldots)$. Очевидно $e_k\in D_{\hat{A}}$ и

$$\hat{A}e_1=\lambda_1 e_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\hat{A}e_k=a_{k1}e_1+\cdots+a_{k,k-1}e_{k-1}+\lambda_k e_k.$$

Теперь, повтаряя рассуждения, использованные для доказательства леммы 2.2, получаем, что векторы $\{e_k\}$ ортогональны пространству $H_{\hat{A}}$. Следовательно, $H_{\hat{A}}=0$.

Теперь построим оператор

$$\underbrace{\tilde{A}=\hat{A}\oplus\ldots\oplus\hat{A}}_{r},\quad D_{\tilde{A}}=\underbrace{D_{\hat{A}}\oplus\ldots\oplus D_{\hat{A}}}_{r}\subset l_2^{(r)}\ (0<r<\infty).$$

Х. м. ф. оператора $\tilde{A}$ имеет вид

$$S_{\tilde{A}}(\lambda)=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\bar{\lambda}_k-\lambda}\,\gamma(k)\right)I. \tag{2.22}$$

Так как оператор $\hat{A}$ простой, то нетрудно показать, что $\tilde{A}$ — тоже простой оператор. Из (2.22) и критерия полноты получаем, что $\tilde{A}$ является полным диссипативным оператором.

Теорема 2.5. *На инвариантных подпространствах универсальной модели $\tilde{A}$ индуцируются с точностью до унитарной эквивалентности все полные диссипативные K^r-операторы, невещественный спектр которых принадлежит заданному λ-множеству $\{\lambda_k\}$ и ранг неэрмитовости не превосходит r.*

Доказательство. Пусть задан полный диссипативный K^r-оператор с невещественным спектром $\{\mu_k\}\subset\{\lambda_k\}$. Точно так же, как в [5], можно показать, что

$$\begin{aligned} &S_A^*(\lambda)S_A(\lambda)\geq|\det S_A(\lambda)|^2 I &&(\operatorname{Im}\lambda>0),\\ &S_A^*(\lambda)S_A(\lambda)=|\det S_A(\lambda)|^2 I &&(\operatorname{Im}\lambda=0),\\ &S_A^*(\lambda)S_A(\lambda)\leq|\det S_A(\lambda)|^2 I &&(\operatorname{Im}\lambda<0).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Обозначим $\{\lambda'_k\}=\{\lambda_k\}\setminus\{\mu_k\}$. Тогда

$$S_{\widetilde{A}}(\lambda)=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{\overline{\mu_k}-\lambda}\gamma(k)\right)\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k'-\lambda}{\overline{\lambda_k'}-\lambda}\gamma'(k)\right)I\ (|\gamma(k)|=|\gamma'(k)|=1). \tag{2.24}$$

Так как A — полный диссипативный оператор, то

$$|\det S_A(\lambda)|=\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\mu_k-\lambda}{\overline{\mu_k}-\lambda}\right|. \tag{2.25}$$

Из (2.23), (2.24) и (2.25) получаем, что

$$S_{\widetilde{A}}(\lambda)=S_A(\lambda)S_1(\lambda), \tag{2.26}$$

где $S_1(\lambda)$ — нерастягивающая в верхней полуплоскости с неисчезающим тождественно определителем. Используя мультипликативное разложение матрицы-функции $S_1(\lambda)$, построим [8, 9] треугольную модель $\mathring{A}$ $S_{\mathring{A}}(\lambda)=S_1(\lambda)$.

Пусть $\mathring{A}_1$ простая часть оператора $\mathring{A}$. Из (2.26) вытекает, что $|\det S_{\mathring{A}}(\lambda)|=|\det S_A(\lambda)|^{r-1}$, а это означает, что оператор $\mathring{A}$ является K^r-оператором без непрерывного спектра и существенной особенности в бесконечности. Следовательно, $\mathring{A}_1$ является полным диссипативным K^r-оператором.

Обозначим через $B=A\curlyvee\mathring{A}_1$ естественное сцепление операторов A и $\mathring{A}_1$. Используя лемму 2.2, получаем, что B является полным диссипативным K^r-оператором. По теореме умножения и (2.26) имеем $S_{\widetilde{A}}(\lambda)=S_B(\lambda)$. Следовательно, простые операторы B и $\widetilde{A}$ унитарно эквивалентны, и у оператора $\widetilde{A}$ существует инвариантное подпространство, на котором индуцируется оператор, унитарно эквивалентный оператору A. Теорема доказана.

Можно показать, что резольвента оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$\{R_\lambda f\}_k=\left\{\frac{f(k)}{\lambda_k-\lambda}-i\sum_{j=k+1}^{\infty}f(j)S(j,\overline{\lambda})\overline{S(k,\lambda)},\right. \tag{2.27}$$

где

$$S(k,\lambda)=\frac{\beta(k)}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\overline{\lambda_j}-\lambda}{\lambda_j-\lambda}.$$

Используя (2.27), нетрудно получить, что

$$\hat{B}f=\left\{\sum_{\alpha=1}^{\infty}f(\alpha)S(\alpha,i)S(k,i)\right\}=(f,g)g,$$

где

$$g=\{S(k,i)\}=\left\{\frac{\beta(k)}{\lambda_k-i}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\overline{\lambda_j}-i}{\lambda_j-i}\right\},$$

$$\hat{B}=i\hat{R}_{-i}-i\hat{R}^*_{-i}-2\hat{R}^*_{-i}\hat{R}_{-i}.$$

Построим процесс $\hat{T}(t)h_0$ с. и. о. $i\hat{A}$, где $h_0 \in D_{\hat{A}}$. Нетрудно заметить, что и. к. ф. процесса $\hat{T}(t)h_0$ можно представить в виде

$$\hat{W}(t, s) = (\hat{B}\hat{T}(t)(\hat{A}+iI)h_0, \quad \hat{T}(s)(\hat{A}+iI)h_0)$$
$$= (\hat{T}(t)(\hat{A}+iI)h_0, g)(g, \hat{T}(s)(\hat{A}+iI)h_0).$$

Таким образом, $W(t, s) = \Phi(t)\overline{\Phi(s)}$, где $\Phi(t) = Q(t) - Q'(t)$, $Q(t) = (\hat{T}(t)h_0, g)$.

Пусть P_n — ортопроектор на подпространстве $H_n \subset l_2$, состоящем из элементов $f = (f(1), f(2), \ldots, f(n), 0, \ldots, 0)$. Обозначим

$$Q_n(t) = (\hat{T}(t)P_n h_0, g) = (e^{i\hat{A}_n t}P_n h_0, P_n g) \quad (\hat{A_n} = A \restriction H_n).$$

Из оценки $\|\hat{T}(t)\| \leq 1$ вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(t) = Q(t). \tag{2.28}$$

Вычисляя $Q_n(t)$, получаем

$$Q_n(t) = \sum_{k=1}^{n} h_0(k)\Lambda_k(t), \tag{2.29}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= \frac{\beta(1)}{\lambda_1 + i}\, e^{i\lambda_1 t}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Lambda_k(t) &= \frac{1}{2\pi i}\,\beta(k)\int_{\gamma_k} e^{i\lambda t}\,\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda+i)}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\bar{\lambda}_j - \lambda}{\lambda_j - \lambda}\,d\lambda \quad (k>1), \end{aligned} \tag{2.30}$$

где γ_k — произвольный замкнутый контур, расположенный в верхней полуплоскости и содержащий множество $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$.

Из (2.28) вытекает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h_0(k)\Lambda_k(t)$ сходится равномерно по t. Следовательно, $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_0(k)\Lambda_k(t)$. Если $\{h_0(k)\} \in D_{\hat{A}}$, функция $Q(t)$ будет дифференцируемой.

Очевидно, случайный процесс $\hat{T}(t)h_0$ асимптотически затухает, так как оператор $\hat{A}$ является полным диссипативным оператором. Таким образом, корреляционная функция процесса $\hat{T}(t)h_0$ имеет вид

$$\hat{V}(t, s) = \int_0^{\infty} \Phi(t+\tau)\overline{\Phi(s+\tau)}\,d\tau. \tag{2.31}$$

Отсюда для корреляционной функции модельного процесса $\tilde{h}(t) = \tilde{T}(t)h_0$ с и. о. iA, где $\tilde{h}_0 \in D_{\tilde{A}}$, получаем представление

$$\widetilde{V}(t, s)=\int_{0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r}\Phi_m(t+\tau)\overline{\Phi_m(s+\tau)}d\tau, \tag{2.32}$$

где

$$\Phi_m(t)=Q_m(t)-Q'_m(t), \quad Q_m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_0^{(m)}(k)\Lambda_k(t),$$

а функции $\Lambda_k(t)$ определяются по формулам (2.30).

Случайный K^r-процесс $h(t)=T(t)h_0$ с и. о. iA условимся называть дифференцируемым K^r-процессом, если $h_0\in D_A$. При помощи теоремы 2. 5, как раньше, можно доказать следующие две теоремы:

Теорема 2.6. *Пусть задан дифференцируемый K^r-процесс $h(t)=T(t)h_0\in K^r[\lambda_k]$ с и. о. iA и оператор A — простой. Тогда корреляционная функция процесса $h(t)$ представима в виде* (2.32).

Теорема 2.7. *Если заданная функция $V(t, s)$ представима в виде* (2.32), *то существует гауссовский дифференцируемый K^r-процесс $h(t)=T(t)h_0\in K^r[\lambda_k]$, корреляционная функция которого совпадает с $V(t, s)$.*

Замечание. В том случае, когда $\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}\lambda_k<\infty$, функция $Q(t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_0(k)\Lambda_k(t)$ дифференцируема для любого $\{h_0(k)\}\in l_2$ и, следовательно, представление (2.32) корреляционной функции $v(t, s)$ процесса $h(t)$ имеет место и в случае, когда $h_0\bar{\in} D_A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. *Успехи мат. наук*, **13**, 1958, № 1, 3—85.
2. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Москва, 1969.
3. Г. М. Губреев, К. П. Кирчев. Об одном классе нестационарных случайных процессов с неограниченным инфинитезимальным оператором. *Доклады БАН*, **25**, 1972, № 8, 1021—1023.
4. К. Иосида. Функциональный анализ. Москва, 1967.
5. К. П. Кирчев. Об одном классе нестационарных случайных процессов. Сб. Теория функции, функциональный анализ и их приложения, 1971, № 14.
6. К. П. Кирчев. Общий вид корреляционной функции одного класса нестационарных случайных процессов. *Доклады БАН*, **24**, 1971, № 11, 1441—1443.
7. К. П. Кирчев. Спектральные разложения некоторых классов нестационарных случайных процессов. *Доклады БАН*, **24**, 1971, № 12, 1601—1603.
8. А. В. Кужель. О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду. *Доклады АН СССР*, **119**, 1958, № 5.
9. А. В. Кужель. Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов. *Доклады АН СССР*, **125**, 1959, № 1.
10. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков, 1971.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике София 1000 п. я. 373

Поступила 16. 5. 1974