Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СИЛОВСКИЕ p-ПОДГРУППЫ ГРУПП ЕДИНИЦ МОДУЛЯРНЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть LG — групповая алгебра абелевой p-группы G над полем L характеристики p и $S(LG)$ — силовская p-подгруппа группы единиц алгебры LG. В настоящей работе дается описание группы $S(LG)$, когда

а) L — совершенное поле характеристики p произвольной мощности, а G — такая абелева p-группа, что если P — ее максимальная полная подгруппа и $G^{(0)}=G$, а $G^{(i)}$ — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы $G^{(i-1)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то или 1) G — полная группа, или 2) фактор-группа $A=G/P$ является прямым произведением счетных групп и/или 2.1) A имеет конечный ульмовский тип, или 2.2) A имеет бесконечный ульмовский тип τ, однако для некоторого натурального s группы $G^{(s)}$ и поле L являются счетными;

б) L — произвольное счетное поле характеристики p, а G — счетная абелева p-группа.

Случаем б) закончено описание группы $S(LG)$ в счетном случае.

Пусть G — абелева p-группа, L — поле характеристики p и $S(LG)$ — силовская p-подгруппа группы единиц групповой алгебры LG:

$$S(LG)=\{\sum_{g\in G}a_g g \mid \sum a_g=1,\ a_g\in L\}. \tag{1}$$

В [1] дано описание группы $S(LG)$, когда G — счетная группа, а L — счетное поле. Следует отметить однако, что это описание неполно: оно имеет место, когда поле L совершенно или группа G является прямым произведением циклических групп. В [6] характеризуется группа $S(LG)$, определенная формулой (1), когда G — прямое произведение произвольного множества циклических p-групп, а L — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики p. В настоящей работе продолжается изучение группы $S(LG)$ в несчетном случае. Формулировки некоторых теорем опубликованы в [8].

Терминология абелевых p-групп, которую будем употреблять, соответствует монографии [5], однако, в отличие от [5], групповую операцию абелевых p-групп будем записывать мультипликативно. Укажем на некоторые дополнительные обозначения и понятия, которые будем употреблять постоянно в этой работе:

G — абелева p-группа с мощностью μ;

$G^{p^k}(L^{p^k})$, где $k=0, 1, 2, \ldots$ — множество p^k-х степеней элементов группы G (поля L), которое, очевидно, является группой (полем);

$N(H)$ — нижний слой абелевой p-группы H;

$|M|$ — мощность множества M, $\mu_i=|G^{p^i}|$ $(i=0, 1, 2, \ldots, \mu_0=\mu)$;

$\aleph_0$ — первое бесконечное кардинальное число;

знак Π или $\times$ — знак прямого произведения групп; если α — порядковое число, то G^{p^α} определяем индуктивно: $G^{p^0}=G$; если $\alpha=\beta+1$,

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 249—260.

то $G^{p^\alpha}=(G^{p^\beta})^p$; если α — предельное порядковое число, то $G^{p^\alpha}=\bigcap_{\beta<\alpha} G^{p^\beta}$; $G^{(\alpha)}=G^{p^{\omega\alpha}}$, где ω — первое бесконечное ординальное число ($G^{(\alpha)}$ соответствует обозначению G^α в [5, с. 159], в случае, когда G — редуцированная группа).

Пусть i и n — натуральные числа и $n>i$, а γ — произвольное кардинальное число. Через $C_\gamma^{i,n}$ (соответственно через C_γ^i) обозначим прямое произведение циклических групп порядков $p^i, p^{i+1},\dots,p^n$ (соответственно порядков $p^i, p^{i+1},\dots,p^{i+s},\dots$, где s — произвольное натуральное число), причем каждая из циклических групп порядка p^k, $i\leq k\leq n$ (соответственно каждая из циклических групп порядка p^l, $l\geq i$), встречается γ раз. Кроме того, обозначим $C_\gamma^{i+s,i}=1$, где s — натуральное число.

Предложение 1. *Пусть G — абелева p-группа, H — ее подгруппа и L — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики p. Если фактор-группа G/H — прямое произведение циклических групп, то фактор-группа $S(LG)/S(LH)$ — также прямое произведение циклических групп.*

Доказательство (см. [7]). Согласно критерию Куликова [5, с. 144] фактор-группу G/H можно представить в виде объединения возрастающей последовательности $G_1/H\subseteq G_2/H\subseteq\dots\subseteq G_n/H\subseteq\dots$ таких ее подгрупп, что высоты элементов каждой группы G_n/H в группе G/H конечны и ограничены в совокупности. Пусть N — точная верхняя грань высот элементов группы G_n/H в группе G/H.

Группа $S^*=S(LG)/S(LH)$ является объединением возрастающей последовательности $S(LG_1)/S(LH)\subseteq S(LG_2)/S(LH)\subseteq\dots\subseteq S(LG_n)/S(LH)\subseteq\dots$ своих подгрупп. Высоты элементов группы $S_n^*=S(LG_n)/S(LH)$ в группе S^* не превосходят N. Допустим обратное. Пусть элемент $(\sum_{i=1}^s \alpha_i g_i)\,S(LH)\neq S(LH)$, принадлежащий группе S_n^*, имеет высоту $m>N$ в группе S^*, т. е. существует элемент $\sum\beta_j g_j\in S(LG)$, так что имеет место

$$(\sum_j \beta_j g_j)^{p^m} S(LH)=(\sum_{i=1}^s \alpha_i g_i)S(LH). \tag{2}$$

Так как элемент $z=\Sigma\alpha_i g_i$ не принадлежит группе $S(LH)$, то некоторое $g_i=g$, которое участвует в записи элемента z, не принадлежит группе H. Тогда из равенства (2) получим

$$g=g_j^{p^m}h_r,\quad (h_r\in H). \tag{3}$$

Из (3) следует $gH=(g_jH)^{p^m}$, т. е. неединичный элемент gH фактор-группы G_n/H имеет высоту m $(m>N)$ в фактор-группе G/H, что является противоречием. Согласно критерию Куликова фактор-группа $S(LG)/S(LH)$ разлагается в прямое произведение циклических групп.

Лемма 1. *Пусть $G^{(1)}$ — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы G и P — ее максимальная полная подгруппа, а L — поле характеристики p и K — максимальное совершенное подполе по-*

ля L. Тогда группы $S(KG^{(1)})$ и $S(KP)$ являются соответственно подгруппой всех элементов бесконечной высоты и максимальной полной подгруппой группы $S(LG)$. Кроме того, если $P \neq G$, то фактор-группы G/P и $S(LG)/S(KP)$ имеют один и тот же тип τ.

Доказательство. Обозначим $L^{(1)} = L^{p^\omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty} L^{p^n}$. Тогда $L^{(1)} = K$. Для этой цели сначала покажем, что $L^{(1)}$ — совершенное подполе поля L, т. е. $L^{(1)} \subseteq K$. Действительно, если $x \in L^{(1)}$, то $x = y^p$, где $y \in L$. Однако $y \in L^{(1)}$, так как $x = z_n^{p^{n+1}}$, $z_n \in L$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $(y - z_n^{p^n})^p = 0$, откуда $y = z_n^{p^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. $y \in L^{(1)}$. Влючение $K \subseteq L^{(1)}$ очевидно.

Если $a = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ является элементом бесконечной высоты группы $S(LG)$, то для произвольного натурального s имеем $\Sigma a_i g_i = (\Sigma \beta_j g_j)^{p^s}$, откуда получаем $g_i = g_{i_1}^{p^s} = \ldots = g_{i_r}^{p^s}$ и $a_i = \beta_{i_1}^{p^s} + \ldots + \beta_{i_r}^{p^s}$, следовательно, $g_i \in G^{(1)}$ $a_i \in L^{(1)} = K$ и $a \in S(KG^{(1)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. подгруппа элементов бесконечной высоты группы $S(LG)$ содержится в $S(KG^{(1)})$. Обратное включение очевидно.

Совпадание группы $S(KP)$ с максимальной полной подгруппой группы $S(LG)$ устанавливается аналогичным способом. Остальная часть доказательства проводится так же, как доказательство леммы 1.2′ статьи [1].

Лемма 2. *Пусть $G^{(1)} \neq 1$, $|G^{p^k}| = \mu_k$, $|(G/G^{(1)})^{p^k}| = \nu_k$ и $|G^{(1)}| = \varrho$. Тогда $\mu_k = \max(\nu_k, \varrho)$.*

Доказательство (см. [7]). Легко получается, что $(G/G^{(1)})^{p^k} = G^{p^k}/G^{(1)}$, откуда для мощности группы G^{p^k} имеем $\mu_k = \nu_k \varrho$. Однако ν_k при $P = 1$ — бесконечное кардинальное число, так как порядки элементов группы $(G/G^{(1)})^{p^k}$ неограничены в совокупности. Следовательно, $\mu_k = \max(\nu_k, \varrho)$.

Лемма 3. *Пусть H — бесконечная группа, b — ее фиксированный элемент и A — ее подгруппа с мощностью $\varrho \geq \aleph_0$. Тогда мы можем вполне упорядочить элементы группы A таким образом, чтобы в A найти подмножество $F: g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots$ с мощностью ϱ со следующим свойством: для любых двух элементов g_α и g_β этого подмножества, для которых $\alpha < \beta$, равенство $g_\alpha = g_\beta b$ является невозможным.*

Доказательство (см. [7]). Положим $g_1 = 1$. Пусть α — произвольное порядковое число, мощность которого не превосходит ϱ. Допустим, что выбраны все элементы g_γ искомого подмножества для $\gamma < \alpha$. Пусть x_γ являются решениями уравнений $g_\gamma = x_\gamma b$, $\gamma < \alpha$. Тогда выбираем элемент $g_\alpha \in A$, $g_\alpha \neq g_\gamma$, x_γ, $\gamma < \alpha$ в качестве элемента искомого подмножества. Таким образом получаем подмножества элементов $g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots$ и $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots$, имеющие мощность ϱ. Легко увидеть, что первое из них является искомым подмножеством F.

Лемма 4. *Пусть K — совершенное поле характеристики p мощности Λ и G — абелева p-группа (не обязательно редуцированная). Пусть $G \neq G^{(1)} \neq 1$, фактор-группа $G/G^{(1)}$ — прямое произведение циклических групп и $\varepsilon_k = \max(\mu_k, \Lambda)$. Тогда*

I) если порядки элементов фактор-группы $G/G^{(1)}$ неограничены в совокупности, то

$$S(KG)/S(KG^{(1)}) \cong \prod_{k=0}^{\infty} C^{k+1,\,k+1}_{\nu_k};$$

2) *если показатель фактор-группы* $G/G^{(1)}$ *равняется числу* p^a, *то*

$$S(KG)/S(KG^{(1)}) \cong \prod_{k=0}^{a-1} C^{k+1,\,k+1}_{\nu_k}.$$

Доказательство. По предложению 1 фактор-группа $B=S(KG)/S(KG^{(1)})$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Пусть $(G/G^{(1)})^{p^k} \neq 1$. Обозначим $|G^{(1)}|=\varrho$, $|G^{p^k}/G^{(1)}|=\nu_k$, $D=G/G^{(1)}$, $N(B^{p^s})=\tilde{N}_s$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$ и

$$D^{p^k}=\prod_{i\in I}(a_i G^{(1)}). \tag{4}$$

Будем использовать обстоятельство, что по лемме 2 $\mu_k=\max(\nu_k, \varrho)$. Различаем следующие случаи.

1) $\max(\varrho, \nu_k) \leqq \Lambda$. Пусть

1.1) $(a_i G^{(1)})^p = G^{(1)}$ для каждого $i \in I$. Так как $(G/G^{(1)})^{p^k}=G^{p^k}/G^{(1)}$ — прямое произведение циклических групп порядков p, то фактор-группа $S(KG^{p^k})/S(KG^{(1)})=B^{p^k}$ разлагается в прямое произведение циклических групп порядка p. Мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется мощности множества прямых множителей порядка p в прямом разложении группы B^{p^k} на циклические группы. Так как $(a_i G^{(1)})^p=G^{(1)}$ и $G^{(1)}$ — подгруппа элементов бесконечной высоты, то можно предполагать, что $a_i^p=1$ для некоторого фиксированного $i \in I$. Обозначим $a_i=a$ и образуем элементы $A(\alpha)=(\alpha+a-\alpha a)S(KG^{(1)})$, $\alpha \in K$. Покажем, что $A(\alpha) \neq A(\beta)$, если $\alpha \neq \beta$, $\beta \in K$. Действительно, в противном случае $\alpha+a-\alpha a=(\beta+a-\beta a)\sum_i \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in K$, $g_i \in G^{(1)}$, $\sum_{\alpha_i \in K} \alpha_i=1$. В этом равенстве единичному классу $G^{(1)}$ группы G по подгруппе $G^{(1)}$ принадлежат слева только единичный элемент 1, а справа — различные g_i. Следовательно, каждое $g_i=1$, и $\sum \alpha_i=1$, откуда получаем $\alpha+a-\alpha a=\beta+a-\beta a$ и $\alpha=\beta$, а это является противоречием. Следовательно, $|B^{p^k}| \geqq \Lambda$, однако $|B^{p^k}| \leqq |S(KG^{p^k})|=\Lambda$ (см. следствие 2 леммы 4 работы [6]) т. е. $|B^{p^k}|=\Lambda$. Отсюда вытекает, что мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется Λ.

1.2) Пусть для некоторого $i \in I$ порядок класса $a_i G^{(1)}$ как элемент фактор-группы $G/G^{(1)}$ равняется p^m, где $m>1$, m — целое число. Можем предполагать, что порядок элемента a_i равняется p^m. Обозначим $a_i=a$, $A(\beta)=1+\beta a-\beta a^{1+p^{m-1}}$ и образуем элементы $A_\beta=\bar{A}_\beta S(KG^{(1)})$, где $\beta \in K$. Очевидно, $A_\beta \in \tilde{N}_k$. Если $\gamma \in K$ и $\gamma \neq \beta$, то элементы A_β и A_γ лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае — $A_\beta S(KG^{(1)})=\bar{A}_\gamma S(KG^{(1)})E$, где $E \in B^{p^{k+1}}$. Так как произвольный элемент группы $S(KG^{p^{k+1}})$ записывается в виде $A=\sum_{i_1,\ldots,i_r} a_{i_1}^{p\alpha_{i_1}}\ldots a_{i_r}^{p\alpha_{i_r}} A_{i_1\ldots i_r}$, где $A_{i_1\ldots i_r}\in S(KG^{(1)})$, то из вышеуказанного равенства получим $\bar A_\beta=\bar A_\gamma AC$, или $1+\beta a-\beta a^{1+p^{m-1}}=(1+\gamma a-\gamma a^{1+p^{m-1}})AC$, где $C\in S(KG^{(1)})$. В правой части этого равенства при умножении единицы 1 на элементы произведения AC являются всегда степенями элемента a, показатели которого кратны числу p, а при умножении элементов γa и $-\gamma a^{1+p^{m-1}}$ на элементы, входящие в AC, поскольку $1+lp\not\equiv 0 \pmod p$ и $1+p^{m-1}+lp\not\equiv 0 \pmod p$, $m-1\geq 1$, не получаем таких степеней. Следовательно, $1=AC$, что противоречит предположению, что $\beta\neq\gamma$. Следовательно, $|\tilde N_k/\tilde N_{k+1}|\geq A$. Однако, $|B^{p^k}|\leq A$, значит, $\tilde N_k/\tilde N_{k+1}=A$, откуда следует, что мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется A.

2) $\max(A,\nu_k)<\varrho$. Пусть

2.1) $(a_iG^{(1)})^p=G^{(1)}$ для каждого $i\in I$. Группа B^{p^k} разлагается в прямое произведение циклических групп порядков p (см. случай 1). Можем предполагать, что $a_i^p=1$ для некоторого $i\in I$. Обозначим $a_i=a$ и образуем элементы $A(g_\alpha)=(g_\alpha+a-g_\alpha a)S(KG^{(1)})$, $g_\alpha\in G^{(1)}$. Очевидно, $A(g_\alpha)\in B^{p^k}$. При $g_\alpha\neq g_\beta$, $g_\beta\in G^{(1)}$, имеем $A(g_\alpha)\neq A(g_\beta)$. В противном случае получаем

$$g_\alpha+a-g_\alpha a=(g_\beta+a-g_\beta a)\sum_i \alpha_i g_i,\qquad g_i\in G^{(1)}. \tag{5}$$

В левой части этого равенства единичному классу $G^{(1)}$ группы G^{p^k} по подгруппе $G^{(1)}$ принадлежит только элемент g_α, а в его правой части — все элементы $g_\beta g_i$, $i\in I$, откуда следует, что $\sum\alpha_i g_i=g'\in G^{(1)}$. Тогда из равенства (5) получим $g_\alpha=g_\beta g'$ и $a-g_\alpha a=ag'-g_\beta g'a$. Если g' определим из первого равенства и подставим его во втором равенстве, то получим $a=ag_\alpha g_\beta^{-1}$, т. е. $g_\alpha=g_\beta$, а это есть противоречие. Следовательно, $|B^{p^k}|=\varrho$. Однако $|B^{p^k}|\leq |S(KG^{p^k})|=\max(A,\mu_k)=\varrho$, т. е. $|B^{p^k}|=\varrho\geq\aleph_0$, чем случай закончен.

2.2) Пусть для некоторого $i\in I$ порядок класса $a_iG^{(1)}$ как элемент фактор-группы $G/G^{(1)}$ равняется p^m, $m>1$, m — целое число. Можем предполагать, что порядок элемента a_i равняется p^m. Обозначим $a_i=a$ и $a^{p^{m-1}}=b$. Согласно лемме 3 элементы подгруппы $G^{(1)}$ группы G^{p^k} можно вполне упорядочить и из ней выделить такое подмножество $F: g_1,\ldots,g_\omega,\ldots$ с мощностью ϱ, что равенство $g_\alpha=g_\beta b$ невозможно при $\alpha<\beta$. Образуем элементы

$$A(g_\alpha)=(1+g_\alpha a-g_\alpha a^{1+p^{m-1}})S(KG^{(1)}),\qquad g_\alpha\in F.$$

Очевидно, $A(g_\alpha)\in\tilde N_k$. Если $g_\alpha, g_\beta\in F$ и $g_\alpha\neq g_\beta$, $\alpha<\beta$, то $A(g_\alpha)$ и $A(g_\beta)$ лежат в различных смежных классах группы $\tilde N_k$ по подгруппе $\tilde N_{k+1}$. Если допустим противное, то аналогично случаю 1.2) получим

$$g_\alpha a-g_\alpha a^{1+p^{m-1}}=g_\beta a-g_\beta a^{1+p^{m-1}}.$$

Если $p \neq 2$, то это равенство невозможно. Если $p = 2$, то должно было быть $g_\alpha = g_\beta a^{2^{m-1}}$, что согласно рассматриванию в начале случая ($a^{2^{m-1}} = b$) также невозможно. Следовательно, $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \geqq \varrho$. Однако $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \leqq \varrho$, так как $|B^{p^k}| \leqq \varrho$. Мы получили, что мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\varrho = \mu_k$.

3) Пусть $\max(\varrho, A) \leqq \nu_k$.

Образуем элементы $A_j = [1 + a_j(g'-1)]S(KG^{(1)})$ $(j \in I)$, где $g' \neq 1$, $g' \in G^{(1)}$ и $g'^p = 1$. Очевидно, $A_j \in \tilde{N}_k$. Обозначим $\bar{A}_j = 1 + a_j(g'-1)$. Элементы A_i и A_j при $i \neq j$, $i \in I$ лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. Если допустим противное, то, используя обозначения случая 1), получим

$$1 + a_i(g'-1) = [1 + a_j(g'-1)] \sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1}^{p\alpha_{i_1}} \dots a_{i_r}^{p\alpha_{i_r}} A_{i_1 \dots i_r}.$$

Это равенство, однако, невозможно, так как в его левой части классу $a_i G^{(1)}$ принадлежат только элементы $a_i g'$ и a_i, в то время как в его правой части не встречаются элементы этого класса. Следовательно, $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \geqq \nu_k$. С другой стороны, $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \leqq |S(KG^{p^k})| = \max(A, \mu_k) = \mu_k = \nu_k$. Следовательно, $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| = \nu_k$, т. е. число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\nu_k = \mu_k$. Лемма доказана.

Определение 1. *Пусть бесконечная абелева p-группа G разлагается в прямое произведение циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^n равняется τ_n. Последовательность*

$$(6) \qquad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

назовем последовательностью первого рода группы G, если

1) порядки элементов группы G неограничены в совокупности и (i) $\mu > \tau_n$ *для каждого натурального n, или* (ii) $\mu = \tau_n$ *для бесконечно многих индексов n;*

2) показатель группы G равняется p^a и $\mu = \tau_a$.

В противном случае последовательность (6) *назовем последовательностью второго рода* (см. [6]).

Лемма 5. *Если* (6) — *последовательность второго рода группы G, то существует конечная подпоследовательность последовательности* (6), *состоящая из бесконечных кардинальных чисел, а именно*

$$\tau_{i_1} = \mu, \ \tau_{a_2}, \dots, \tau_{a_s},$$

где $a_1 < a_2 < \dots < a_s$, со следующими свойствами:

$$\tau_{a_1} > \tau_{a_2} > \dots > \tau_{a_s},$$

$$\tau_{a_1} = \max_{i \geq 1} \tau_i \quad \text{и} \quad \tau_{a_1} > \tau_i, \quad \text{если} \quad i > a_1,$$

$$\tau_{\alpha_2} = \max_{i > \alpha_1} \tau_i \quad \text{и} \quad \tau_{\alpha_2} > \tau_i, \quad \text{если} \quad i > \alpha_2,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\tau_{\alpha_s} = \max_{i > \alpha_{s-1}} \tau_i \quad \text{и} \quad \tau_{\alpha_s} > \tau_i, \quad \text{если} \quad i > \alpha_s,$$

причем, если порядки элементов группы G неограничены в совокупности, то последовательность $\tau_{\alpha_s+1}, \tau_{\alpha_s+2}, \ldots$ является последовательностью первого рода, а если p^a — показатель группы G, то последовательность $\tau_{\alpha_s+1}, \tau_{\alpha_s+2}, \ldots, \tau_a$ (при положении, что вообще существует) состоит из конечных кардинальных чисел (см. [6]).

Определение 2. *Кардинальные числа $\tau_{\alpha_1}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$, определенные в лемме 5, или число τ_a, определенное в случае 2 определения 1, назовем критическими числами прямого произведения G циклических p-групп* (см. [6]).

Теорема А. *Пусть K — совершенное поле характеристики p мощности Λ, G — такая абелева p-группа (не обязательно редуцированная), что $G \neq G^{(1)} \neq 1$, и фактор-группа $A = G/G^{(1)}$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем если A — бесконечная, то (6) — ее последовательность. Тогда фактор-группа $B = S(KG)/S(KG^{(1)})$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем*

I) если A — конечная группа с показателем p^a, то $B \simeq C_{\omega}^{1,a}$, где $\omega = \max(\Lambda, \mu)$;

II) если A — бесконечная группа и

1) если (6) — последовательность первого рода, причем порядки элементов группы A неограничены в совокупности (имеют показатель p^a), то $B \simeq C_{\omega}^{1}$ ($B \simeq C_{\omega}^{1,a}$), где $\omega = \max(\Lambda, \mu)$;

2) если (6) — последовательность второго рода группы A с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$ и

2.1) $\Lambda \geq \mu$, то *$B \simeq C_{\Lambda}^{1}$ или $B \simeq C_{\Lambda}^{1,a}$ (если группа A имеет показатель p^a);*

2.2) если $\mu_{\alpha_i} \geq \Lambda \geq \mu_{\alpha_{i+1}}$, $0 \leq i \leq s-1$ ($\alpha_0 = 0$), то

$$B \simeq C_{\mu_{\alpha_0}}^{1,\alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1+1,\alpha_2} \times \ldots \times C_{\mu_{\alpha_i}}^{\alpha_i+1,\alpha_{i+1}} \times B',$$

где $B' \simeq C_{\Lambda}^{\alpha_{i+1}+1}$ или $B' \simeq C_{\Lambda}^{\alpha_{i+1}+1,a}$, в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы A неограниченными в совокупности или показатель этой группы равняется числу p^a;

2.3) если $\mu_{\alpha_s} > \Lambda$, то

$$B \simeq C_{\mu_{\alpha_0}}^{1,\alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1+1,\alpha_2} \times \ldots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s} \times B',$$

где $B' \simeq C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1}$ или $B' \simeq C_{\varrho}^{\alpha_s+1,a}$, $\varrho = |G^{(1)}|$, в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы A неограниченными в совокупности или показатель этой группы равняется числу p^a.

Доказательство. По предложению 1 группа B разлагается в прямое произведение циклических групп. Будем использовать лемму 4.

Пусть имеют место предположения случая I. Тогда $\mu_k = \mu$, $k = 1, 2, \ldots, a$. Действительно, пусть $G = P \times R$. Тогда $G^{(1)} = P \times R^{(1)}$ и $R/R^{(1)} \cong G/G^{(1)}$ — конечная группа. Следовательно, $R^{(1)} = 1$, т. е. R — конечная группа, откуда вытекает $\mu_k = \mu$. По лемме 4 мощность множества прямых множителей порядка p^k в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\max(\Lambda, \mu)$.

Если имеют место предположения случая II) 1), то по лемме 2 работы [6] имеем $\mu_k = \mu$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ (соответственно, $k = 0, 1, 2, \ldots, a-1$).

Случай II) 2) 2.1) очевиден.

Пусть имеют место предположения случая II) 2) 2.2) и r — фиксированное целое число, $0 \leq r \leq i$. По лемме 4 мощность множества прямых множителей порядка $p^{a_r + k}$, где $k = 1, 2, \ldots, a_{r+1} - a_r$, в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\max(\Lambda, \mu_{a_r + k - 1})$. Однако по лемме 3 работы [6] имеем $|G^{p^{a_r}}| = |G^{p^{a_r+1}}| = \ldots = |G^{p^{a_{r+1}-1}}| = \tau_{a_{r+1}}$, т. е. $\mu_{a_r+1} = \mu_{a_r+2} = \ldots = \mu_{a_{r+1}-1} = \mu_{a_r}$. Следовательно, $\max(\Lambda, \mu_{a_r} + k - 1) = \max(\Lambda, \mu_{a_r})$, где $k = 1, 2, \ldots, a_{r+1} - a_r$, чем случай закончен.

Случай II) 2) 2.3) аналогичен предыдущему случаю. Установим формулы разложения группы B'. По лемме 4 мощность множества прямых множителей порядка $p^{a_s + k + 1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (соответственно $k = 0, 1, \ldots, a - a_s - 1$) в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\max(\Lambda, \mu_{a_s + k}) = \mu_{a_s}$, так как $\mu_{a_s + k} = \mu_{a_s} > \Lambda$. Действительно, по лемме 2 $\mu_{a_s + k} = \max(\varrho, \nu_{a_s + k})$, где $\nu_i = |A^{p^i}|$, а $\mu_{a_s} = \max(\varrho, \nu_{a_s})$. Однако $|A^{p^{a_s + k}}| = \nu_{a_s + k}$, и если $A^{p^{a_s}} = D$ — бесконечная, то $\tau_{a_s+1}, \tau_{a_s+2}, \ldots$ — последовательность первого рода группы D, следовательно, по лемме 2 работы [6] будем иметь $|D^{p^k}| = |D|$, т. е. $\nu_{a_s+k} = \nu_{a_s}$. Для установления второй формулы разложения группы B' необходимо отметить, что D — конечная группа, и тогда $\mu_{a_s+k} = \mu_{a_s} = \varrho$.

Теорема Б. *Если G — полная абелева p-группа мощности μ, а K — совершенное поле характеристики p мощности Λ, то группа $S(KG)$ разлагается в прямое произведение $\omega = \max(\Lambda, \mu)$ групп типа p^∞.*

Доказательство. По лемме 1 группа $S(KG)$ является полной и, следователно, она разлагается в прямое произведение групп типа p^∞.

1) Пусть $\mu \geq \Lambda$. При $\mu = \aleph_0$ имеет место доказателство леммы 1.12 статьи [1]. Пусть $\mu > \aleph_0$. Тогда по следствию 2 леммы 4 работы [6] имеем $|S(KG)| = \mu$. Пусть $S(KG) = \prod_{i \in I} P_i$, где P_i — группы типа p^∞. Опять по этому следствию получим $|I| = \mu = \omega$.

2) Пусть $\Lambda > \mu$. Этот случай аналогичен случаю 1.

Теорема В. *Если G — счетная полная абелева p-группа, L — счетное поле характеристики p, которое не совпадает со своим максимальным совершенным подполем K, то фактор-группа $S(LG)/SKG) \cong C^1_{\aleph_0}$.*

Доказательство. Мощность фактор-группы $S = S(LG)/S(KG)$ не превосходит $\aleph_0$ (см. следствие 2 леммы 4 статьи [6]). Группа S не содержит элементов бесконечной высоты, ибо по лемме 1 группа $S(KG)$ совпадает с подгруппой элементов бесконечной высоты группы $S(LG)$ и, следовательно, S разлагается в прямое произведение циклических групп. Обозначим $\tilde{N}_k = N(S^{p^k})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Для группы S^{p^k} получим $S^{p^k} = S(L^{p^k}G)/S(KG)$.

Так как L не является совершенным полем, то для любого натурального s имеем $L^{p^s} \neq L^{p^{s+1}}$. Допустим обратное, что $L^{p^s} = L^{p^{s+1}}$ для некоторого натурального s. Пусть α — произвольный элемент поля L. Тогда $\alpha^{p^s} \in L^{p^s}$ и, следовательно, существует элемент $\beta \in L$, так что $\alpha^{p^s} = \beta^{p^{s+1}}$, откуда $(\alpha - \beta^p)^{p^s} = 0$. Так как поле L не содержит нильпотентных элементов, то $\alpha = \beta^p \in L^p$, т. е. $L = L^p$, или поле L совершенно. Пусть одна из групп типа p^∞, которая содержится в группе G, задается образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и определяющими соотношениями $a_1^p = 1$, $a_{n+1}^p = a_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Рассмотрим элементы $A_i = [1 + \alpha a_i(1 - a_i)]S(KG^{(1)})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где элемент α таков, что $\alpha \in L^{p^k}$ и $\alpha \notin L^{p^{k+1}}$. Очевидно, $A_i \in \tilde{N}_k$. При $i \neq j$ элементы A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае получим

$$1 + \alpha a_i(1 - a_i) = [1 + \alpha a_j(1 - a_1)]\sum_s \alpha_s^p g_s^p, \quad \alpha_s \in L^{p^k}, \quad g_s \in G.$$

В левой части этого равенства корень p^{k+1}-й степени извлекается только из элемента 1, а в его правой части — из элементов $1 \cdot \sum \alpha_s^p g_s^p$ и только из них, следовательно, $\sum \alpha_s^p g_s^p = 1$ и $\alpha a_i - \alpha a_i a_1 = \alpha a_j - \alpha a_j a_1$. Отсюда вытекает $p = 2$, $a_i = a_j a_1$, $a_i a_1 = a_j$ и получаем $a_i^2 = a_j^2$, т. е. $a_{i-1} = a_{j-1}$, что невозможно. Следовательно, $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \geq \aleph_0$, чем теорема доказана.

Теорема Г. *Если G — счетная абелева p-группа (не обязательно редуцированная), $G \neq G^{(1)} \neq 1$ и L — счетное поле характеристики p, которое не совпадает со своим максимальным совершенным подполем K, то $S(LG)/S(KG^{(1)}) = C^1_{\aleph_0}$.*

Доказательство. Мощность фактор-группы $B = S(LG)/S(KG^{(1)})$ не превосходит $\aleph_0$, и так как B не содержит элементов бесконечной высоты, то она разлагается в прямое произведение циклических групп. Если порядки элементов фактор-группы $G/G^{(1)}$ неограничены в совокупности, то рассуждаем как в случае 3 леммы 4, имея в виду, что $\nu_k = \aleph_0$. Если фактор-группа $G/G^{(1)}$ имеет показатель p^n, то для фиксированного натурального i мощность множества прямых множителей порядка p^{n+i} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется кардинальному число $\aleph_0$. Действительно, так как в этом случае $G^{p^k} = P$, то мощность множества прямых множителей порядка p^{n+i} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется мощности множества прямых множителей порядка p^i в прямом разложении группы $B^{p^k} = S(L^{p^n}P)/S(KP)$, а эта мощность по теореме B действительно равняется $\aleph_0$.

Теорема 1. *Пусть K — совершенное поле характеристики p мощности $\mathcal{A}$, а G — такая абелева p-группа, что если P — ее максимальная полная подгруппа, то фактор-группа $A = G/P$ — прямое произведение счетных групп (единичная группа) и или 1) A имеет конечный тип n или 2) A имеет бесконечный тип τ, причем группа $G^{(s)}$ (s — натуральное) и поле K являются счетными.*

Тогда $S(KP)$ — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$. Если $P = 1$, то $S(KP) = 1$, а если $P \neq 1$, то $S(KP)$ разлагается в прямое произведение $\omega = \max(\mathcal{A}, \gamma)$ групп типа p^{∞}, где $\gamma = |P|$.

Пусть Q — редуцированная подгруппа группы $S(KG)$. Если G — полная группа, то $Q = 1$.

Пусть G не является полной. Группа Q имеет тип n (соответственно τ) и является прямым произведением счетных групп. Ее ульмовские факторы $Q_\alpha \simeq S(KG^{(\alpha)})/S(KG^{(\alpha+1)})$, где α — порядковое число, $\alpha < n$ (соответственно $\alpha < \tau$), считая $G^{(0)} = G$. Все факторы Q_α, за исключением последнего, а при $P \neq 1$ и последний ульмовский фактор группы Q, если он существует, разлагаются в прямые произведения циклических групп и описываются теоремой А (при подходящем изменении обозначений). При $P = 1$ последний ульмовский фактор $Q_{n-1} \simeq S(KG^{(n-1)})$ (соответственно $Q_{\tau-1} \simeq S(KG^{(\tau-1)})$, если τ — непредельное порядковое число) описывается теоремой А статьи [6].

Доказательство. При предположении случая 1 теорема следует из леммы 1, теорем А* работы [6], А, Б, и теоремы Grawley [4]. Считаемся с тем, что порядки элементов групп $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-2$) неограничены в совокупности, так как $G^{(i)}/G^{(i+1)} \simeq A^{(i)}/A^{(i+1)}$ ([5], с. 161) и с тем, что ряд Ульма группы Q состоит из членов, соответственно изоморфных членам ряда $S(KG)/S(KP) \supset S(KG^{(1)})/S(KP) \supset \ldots \supset S(KG^{(n-1)}/S(KP) \supset 1$.

Пусть имеют место предположения случая 2. По лемме 1 группа Q имеет тип τ. Так как $G^{(s)} \neq P$ и $G^{(s)}$ — счетная, то из теоремы А следует, что группа $Q^{(s)} \simeq S(KG^{(s)})/S(KP)$ является также счетной. Фактор-группа $A = G/P$ — прямое произведение счетных групп, следовательно, фактор-группы $G^{(i-1)}/G^{(i)} \simeq A^{(i-1)}/A^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ — прямые произведения циклических групп, откуда по предложению 1 вытекает, что фактор-группы $S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, являются прямыми произведениями циклических групп. Однако $Q^{(i-1)}/Q^{(i)} \simeq S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$, т. е. $Q^{(i-1)}/Q^{(i)}$ — прямые произведения циклических групп, $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда из работы [2] Ирвина и Ричмена вытекает, что группа Q является прямым произведением счетных групп, следовательно, по теореме Колеттиса [3], группа Q определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами, описание которых дано в формулировке теоремы.

Когда группа G и поле L — счетные, группа $S(LG)$ изучается в [1] и [7] при некоторых ограничениях относительно L. Следующая теорема заканчивает описание группы $S(LG)$ в счетном случае.

Теорема 2. *Пусть L — произвольное счетное поле ненулевой характеристики p и K — его максимальное совершенное подполе, а G — конечная или счетная абелева p-группа, P — ее максимальная полная подгруппа и фактор-группа $A = G/P$ единичная или имеет ульмовский* *тип* τ. *Тогда* $S(KP)$ — *максимальная полная подгруппа группы* $S(LG)$, *и если* $P \neq 1$, *то она разлагается в прямое произведение счетного числа групп типа* p^{∞}.

Пусть Q — *редуцированная подгруппа группы* $S(LG)$. *Если* G — *полная абелева* p-*группа, то* $Q \cong C^{1}_{\aleph_0}$ *при* $L \neq K$ *и* $Q = 1$ *при* $L = K$.

Пусть G *не является полной абелевой* p-*группой. Группа* Q *имеет тип* τ *и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами, которые, за исключением последнего, при положении, что тот существует, являются изоморфными группе* $C^{1}_{\aleph_0}$. *Пусть* τ *не является предельным порядковым числом. Для последнего ульмовского фактора* $Q_{\tau-1} \cong S(KG_{\tau-1})/S(KP)$ $(Q_0 \cong S(LG/S(KP)$, *если* $\tau = 1)$ *при* $P \neq 1$ *в силе следующие утверждения: а) если группа* $A^{(\tau-1)}$ *имеет конечный показатель* p^{n} *при* $\tau = 1$, *поле* L *совпадает с* K, *то* $Q_{\tau-1} \cong C^{1,n}_{\aleph_0}$; *б) если же или порядки элементов группы* $A^{(\tau-1)}$ *неограничены в совокупности, или при* $\tau = 1$ *поле* L *не совпадает с* K, *то* $Q_{\tau-1} \cong C^{1}_{\aleph_0}$. *При* $P = 1$ *ульмовский фактор* $Q_{\tau-1}$ *является прямым произведением циклических групп (его точное описание дано в теореме* А [6]).

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из леммы 1, теорем А, Б, В, Г и из теоремы Ульма.

Условия изоморфизма. Пусть абелева p-группа G и коммутативное кольцо L с единицей характеристики p, а также абелева p-группа G_1 и коммутативное кольцо L_1 с единицей характеристики p такие, что они удовлетворяют условиям некоторых формулированных теорем настоящей работы и работы [6]. В таком случае можно указать на необходимые и достаточные условия изоморфизма групп $S(LG)$ и $S(L_1G_1)$. Мы не будем останавливаться на этом вопросе из-за большого числа возможных случаев, и, главным образом, из-за того, что, руководствуясь формулировками уже доказанных теорем работы [6] и настоящей статьи, указание на изоморфизм происходит без затруднений (это указание состоит из обычного комбинирования случаев разложения группы $S(LG)$ со случаями разложения группы $S(L_1G_1)$ и описания непротиворечивых комбинированных случаев на основании вышедоказанных теорем).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. Debrecen*, **14**, 1967, 365—405.
2. J. Irwin, F. Richman. Direct sums of countable groups and related concepts. *J. Algebra*, **2**, 1965, 443—450.
3. G. Kolettis. Direct sums of countable groups. *Duke Math. J.*, **27**, 1960, 111—125.
4. P. Grawley. Abelian p-groups determined by their Ulm sequence. *Pacif. J. Math.*, **22**, 1967, 235—239.
5. А. Г. Курош. Теория групп. Москва, 1967. с. 648.
6. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I, *Publ. Math. Debrecen*, **18**, 1971, 9—21.
7. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности, II. *Publ. Math. Debrecen*, **19**, 1972, 87—96.
8. Т. Ж. Моллов. О силовских p-подгруппах групп единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп. *Доклады БАН*, **25**, 1972, 1463—1466.

Пловдивский университет, кафедра Алгебры
4000 Пловдив

Поступила 10. 3. 1972