Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

АННА А. ПОПОВА, МИТКО М. ЦВЕТАНОВ

Рассматривается задача о нижней грани выпуклой полунепрерывной снизу функции, заданной на произведении линейных пространств. Дано несколько видов ограничений. Указанная задача сопоставляется с другой, т. н. двойственной, и доказываются некоторые соотношения между ними. Полученные результаты применяются к одной задаче вариационного исчисления с производными порядка выше первого, в которой подинтегральная функция предполагается выпуклой и непрерывной. Дифференцируемость не предполагается.

В теории экстремальных задач существенное место занимают те задачи, в которых рассматриваемые функции являются выпуклыми в общепринятом смысле. В исследовании выпуклых экстремальных задач большую роль в последнее время играют двойственные методы.

В основе теории двойственности стоит тот факт, что любой функции f можно сопоставить другую, называемую „двойственной", которая независимо от вида функции f является выпуклой и полунепрерывной снизу. Изученние двойственной функции часто ведет к важным результатам, дающим не только необходимые и достаточные условия для того, чтобы в рассматриваемой задаче достигался экстремум, но и характеристики экстремальных точек.

В настоящей работе двойственные методы используются для решения одной задачи вариационного исчисления.

Работа состоит из трех параграфов.

В первом параграфе изложены некоторые основные положения из теории двойственности, используемые в дальнейшем.

Второй параграф посвящен следующей задаче.

Пусть $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$ — вещественные линейные пространства и $\mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_n$ — двойственные к ним относительно билинейной формы $\langle x_i, y_i \rangle$, $i = 0, 1, \dots, n$, соответственно, где $x_i \in \mathfrak{X}_i$, $y_i \in \mathfrak{Y}_i$. Пусть $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — выпуклая полунепрерывная снизу по совокупности переменных функция, заданная в $\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_n$. Ищется нижняя грань функции f при условиях

1) $x_i = A_{0i} x_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $A_{0i} : \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{X}_i$ — замкнутые линейные операторы;

2) $x_0 \in X_0$, где $X_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$ — заданное множество.

Доказывается, что при некоторых ограничениях, наложенных на f, имеет место равенство

$$\inf_{x \in X_0} f(x, A_{01}x, \dots, A_{0n}x) + \min_{y_0 + A^*_{01} y_1 + \dots + A^*_{0n} y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \dots, y_n) = 0,$$

где

$$\tilde{f}^*(y_0, y_1, \dots, y_n) = \sup_{\substack{x_0, x_1, \dots, x_n \\ x_i \in X_i}} [\langle x_0, y_0 \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle + \dots + \langle x_n, y_n \rangle - f(x_0, x_1, \dots, x_n)],$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 269—284.

а $A_{0i}^{*}:\mathfrak{Y}_i \to \mathfrak{Y}_0$ — сопряженные к A_{0i} операторы.

Эти результаты используются в последнем, третьем параграфе при исследовании задачи о нижней грани интегрального функционала

$$F(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))\, dt,$$

рассматриваемого над совокупностью функций $x(t)$ с абсолютно непрерывной $n-1$-й производной. Рассмотрены обе задачи: с фиксированными и со свободными концами.

1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — вещественные линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно (канонической) билинейной формы $\langle x, y\rangle$ (см. [1, 2]). Пусть в пространстве $\mathfrak{X}$ задана функция $f(x)$, принимающая значения в $[-\infty, +\infty]$.

Функцию f называют собственной, если $f(x)>-\infty$ для всех $x\in\mathfrak{X}$ и $f(x)<\infty$, по крайней мере, для одного $x\in\mathfrak{X}$.

С функцией f связывают множества

$$\operatorname{dom} f=\{x : f(x)<\infty\}\subseteq\mathfrak{X},$$
$$\det f=\{(x, \lambda) : f(x)\leq\lambda\}\subseteq R\times\mathfrak{X}.$$

Множество $\operatorname{dom} f$ называют эффективной областью определения, а $\det f$ — надграфиком функции f.

Функцию f называют выпуклой, если $\det f$ выпукло, и замкнутой (полунепрерывной снизу), если $\det f$ замкнуто.

Функцию $g(y)$, определяемую формулой

$$g(y)=\sup\{\langle x, y\rangle-f(x) \mid x\in\mathfrak{X}\} \tag{1}$$

называют сопряженной или двойственной к f и обозначают f^*. Функция f^* всегда выпукла и замкнута.

Из (1) следует важное неравенство $f(x)+f^*(y)\geq\langle x, y\rangle$, для любого $x\in\mathfrak{X}$, $y\in\mathfrak{Y}$, называемое неравенством Юнга. Из (1) следует еще, что $\inf f(x)=-f^*(0)$. Функцию

$$f^{**}(x)=\sup\{\langle x, y\rangle-f^*(y) \mid y\in\mathfrak{Y}\}$$

называют второй сопряженной к f. Всегда имеет место $f^{**}\leq f$, а $f^{**}=f$ тогда и только тогда, когда f выпукла и замкнута.

Поскольку всегда

$$f^*(y)=f^{***}(y)[=\sup_x(\langle x, y\rangle-f^{**}(x))],$$

то имеет место $\inf f(x)=\inf f^{**}(x)$.

Таким образом, задачу об $\inf f(x)$ всегдо можно свести к задаче об инфимуме выпуклой замкнутой функции. Поэтому, не уменьшая общности, будем всюду в дальнейшем предполагать функцию f выпуклой и замкнутой.

Для суммы двух выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеет место следующая

Теорема (Рокафеллар). *Пусть f_1 и f_2 — выпуклые замкнутые функции и* $\inf(f_1(x)+f_2(x))>-\infty$. *Пусть существует точка* $x_0 \in \operatorname{dom} f_1$, *в которой функция f_2 непрерывна. Тогда*

$$(f_1 \oplus f_2)^* = f_1^* \oplus f_2^*,$$

где функцию $(f_1^* \oplus f_2^*)(y) = \inf\limits_{y_1+y_2=y} [f_1^*(y_1)+f_2^*(y_2)]$ *называют конволющией функций f_1^* и f_2^*.*

Пусть в пространстве $\mathfrak{X}$ задано множество X.

Определение. *Множество* $X^0=\{y \in \mathfrak{Y}:\langle x, y\rangle \leq 1$ *для всех* $x \in X\}$ *называют полярой множества X. Если $X=L$ — подпространство, то очевидно,* $X^0=\{y:\langle x, y\rangle = 0$ *для всех* $x \in X\} \subset \mathfrak{Y}$ *есть тоже подпространство, называемое ортогональным к подпространству L и обозначаемое $L^\perp$.*

Функцию

$$\delta_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \in X, \\ \infty, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

называют индикаторной функцией множества X, а функцию $(\delta_X)^*=\mu_X(y)$ — опорной функцией множества X. Если $X=L$, то $\mu L^\perp(y)=\delta_{L^\perp}(y)$.

2. Пусть $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ и $\mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ — вещественные линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной (канонической) формы; $\langle x_0, y_0\rangle, \langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle$ соответственно $(x_i \in \mathfrak{X}_i$, $y_i \in \mathfrak{Y}_i$, $i=0, 1, \ldots, n)$. Пусть в пространстве $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_n$ задана выпуклая замкнутая по совокупности переменных функция, $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, принимающая значения в $(-\infty, +\infty]$. Здесь

$$\operatorname{dom} f=\{(x_0, x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathfrak{X}_i,\ i=0, 1, \ldots, n: f(x_0, x_1, \ldots, x_n)<\infty\},$$

$$\det f=\{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda),\ \ x_i \in \mathfrak{X}_1,\ \ i=0, 1, \ldots, n,\ \ \lambda \in R: f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leq \lambda\}$$

При сделанных выше предположениях о функции f, множество $\operatorname{dom} f$ выпукло, а $\det f$ — выпукло и замкнуто.

Двойственная к f функция, очевидно, задается формулой

$$f_*(y_0, y_1, \ldots, y_n)=\sup_{\substack{x_i \in \mathfrak{X}_i \\ i=0, 1, \ldots, n}} [\langle x_0, y_0\rangle+\langle x_1, y_1\rangle+\cdots+\langle x_n, y_n\rangle-f(x_0, x_1, \ldots, x_n)].$$

Неравенство Юнга будет иметь вид

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)+f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) \geq \langle x_0, y_0\rangle+\langle x_1, y_1\rangle+\cdots+\langle x_n, y_n\rangle. \tag{2}$$

Пусть $A_{0i}: \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathfrak{X}_i$, $i=1, \ldots, n$ — замкнутые линейные операторы и $A_{0i}^*: \mathfrak{Y}_i \rightarrow \mathfrak{Y}_0$ — их сопряженные операторы, т. е.

$$\langle A_{0i} x_0, y_i\rangle=\langle x_0, A_{0i}^* y_i\rangle, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим задачу об отыскании нижней грани функции $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ при условиях

$$x_i=A_{0i} x_0,\ \ x_0 \in X_0 \subset \mathfrak{X}_0.$$

В зависимости от X_0 мы будем рассматривать следующие четыре случая:

1) $X_0=\mathfrak{X}_0$,
2) $X_0=L\subset\mathfrak{X}_0$ — подпространство,
3) $X_0=\xi_0+L_0$, где $\xi_0\in\mathfrak{X}_0$, а $L_0\subset\mathfrak{X}_0$ — подпространство,
4) X_0 — выпуклое замкнутое множество.

Эта задача эквивалентна следующей: найти нижнюю грань функции

$$\tilde{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)=f(x_0, x_1, \ldots, x_n)+\delta_X(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

при условиях $x_i=A_{0i}\,x_0$, $i=1, \ldots, n$, где

$$X=X_0\times X_1\times\ldots\times X_n\subset\mathfrak{X}_0\times\mathfrak{X}_1\times\ldots\times\mathfrak{X}_n,\quad X_i=A_{0i}(X_0).$$

Из неравенства Юнга легко получить, что

$$\text{(3)}\qquad \inf\tilde{f}(x, A_{01}\,x, \ldots, A_{0n}\,x)+\inf_{y_0+A^*_{01}y_1+\cdots+A^*_{0n}y_n=0}\tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)\geqq 0$$

(здесь $\tilde{f}^*$ — двойственная к $\tilde{f}$ функция). Действительно, для всех $x\in\mathfrak{X}$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$, $y_i\in\mathfrak{Y}_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, удовлетворяющих равенству $y_0+A^*_{01}\,y_1+\cdots+A^*_{0n}\,y_n=0$, имеем

$$\tilde{f}(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\geqq\langle x, y_0\rangle+\langle A_{01}x, y_1\rangle+\cdots+\langle A_{0n}x, y_n\rangle=\langle x, y_0+A^*_{01}\,y_1+\cdots+A^*_{0n}\,y_n\rangle=0,$$

откуда и следует (3).

Нас будет интересовать случай, когда в (3) имеет место равенство. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)=\inf_x\tilde{f}(x, A_{01}\,x+\xi_1, \ldots, A_{0n}x+\xi_n).$$

Функция φ выпукла. Докажем это:

$$\varphi(\lambda\xi_1'+(1-\lambda)\xi_1'',\ \lambda\xi_2'+(1-\lambda)\xi_2'', \ldots, \lambda\xi_n'+(1-\lambda)\xi_n'')$$
$$=\inf_x\tilde{f}(x, A_{01}x+\lambda\xi_1'+(1-\lambda)\xi_1'', \ldots, A_{0n}x+\lambda\xi_n'+(1-\lambda)\xi_n'')$$
$$=\inf_{x_1,\,x_2}\tilde{f}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda(A_{01}x_1+\xi_1')+(1-\lambda)(A_{01}x_2+\xi_1''), \ldots, \lambda(A_{0n}x_1+\xi_n'$$
$$+(1-\lambda)(A_{0n}x_2+\xi_n''))\leqq\inf_{x_1,\,x_2}[\lambda\tilde{f}(x_1, A_{01}x_1+\xi_1', \ldots, A_{0n}x_1+\xi_n')$$
$$+(1-\lambda)\tilde{f}(x_2, A_{01}x_2+\xi_1'', \ldots, A_{0n}x_2+\xi_n'')]$$
$$=\lambda\inf_{x_1}\tilde{f}(x_1,\ A_{01}\,x_1+\xi_1', \ldots, A_{0n}x_1+\xi_n')$$
$$+(1-\lambda)\inf_{x_2}\tilde{f}(x_2, A_{01}x_2+\xi_1'', \ldots, A_{0n}x_2+\xi_n'')$$
$$=\lambda\varphi(\xi_1',\ \xi_2', \ldots, \xi_n')+(1-\lambda)\varphi(\xi_1'',\ \xi_2'', \ldots, \xi_n'').$$

Найдем функцию $\varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\sup_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}[\langle\xi_1, y_1\rangle+\langle\xi_2, y_2\rangle+\cdots+\langle\xi_n, y_n\rangle$$
$$-\inf_x\tilde{f}(x, A_{01}x+\xi_1, A_{02}x+\xi_2, \ldots, A_{0n}x+\xi_n)]$$

$$= \sup_{x, \xi_1, \ldots, \xi_n} [\langle \xi_1, y_1\rangle + \langle \xi_2, y_2\rangle + \cdots + \langle \xi_n, y_n\rangle - \tilde{f}(x, A_{01}x + \xi_1, \ldots, A_{0n}x + \xi_n)]$$
$$= \sup_{x, \xi_1, \ldots, \xi_n} [\langle A_{01}x + \xi_1, y_1\rangle + \langle A_{02}x + \xi_2, y_2\rangle + \cdots + \langle A_{0n}x + \xi_n, y_n\rangle$$
$$- \langle A_{01}x, y_1\rangle - \langle A_{02}x, y_2\rangle - \cdots - \langle A_{0n}x, y_n\rangle - \tilde{f}(x, A_{01}x + \xi_1, \ldots, A_{0n}x + \xi_n)]$$
$$= \sup_{x, \xi_1, \ldots, \xi_n} [\langle x, -A_{01}^* y_1 - A_{02}^* y_2 - \cdots - A_{0n}^* y_n\rangle + \langle A_{01}x + \xi_1, y_1\rangle + \langle A_{02}x + \xi_2, y_2\rangle$$
$$+ \cdots + \langle A_{0n}x + \xi_n, y_n\rangle - \tilde{f}(x, A_{01}x + \xi_1, \ldots, A_{0n}x + \xi_n)].$$

Обозначим $A_{0i}x + \xi_i = x_i$, $-A_{01}^* y_1 - A_{02}^* y_2 - \cdots - A_{0n}^* y_n = y_0$.

Тогда
$$\varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sup_{x, x_1, \ldots, x_n} [\langle x, y_0\rangle + \langle x_1, y_1\rangle + \cdots + \langle x_n, y_n\rangle$$
$$- \tilde{f}(x, x_1, \ldots, x_n)] = \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Итак, мы получили, что
$$\varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n),$$
где $y_0 + A_{01}^* y_1 + \ldots + A_{0n}^* y_n = 0$.

Определение. *Мы назовем функцию $f(x)$ замкнутой в точке x_0, если $f(x_0) = f^{**}(x_0)$.*

Теорема 1.

а) *Для того, чтобы имело место равенство*

$$\inf_x \tilde{f}(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x) + \inf_{y_0 + A_{01}^* y_1 + \ldots + A_{0n}^* y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция φ была замкнутой в нуле.

б) *Равенство*

$$\inf \tilde{f}(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x) + \min_{y_0 + A_{01}^* y_1 + \ldots + A_{0n}^* y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

достигается тогда и только тогда, когда функция φ замкнута и субдифференцируема в нуле.

Доказательство. Пусть (4) имеет место. Тогда
$$\varphi(0, 0, \ldots, 0) = \inf_x \tilde{f}(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)$$
$$= -\inf_{y_0 + A_{01}^* y_1 + \ldots + A_{0n}^* y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) = -\inf \varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Пусть $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = \varphi^{**}(0, 0, \ldots, 0)$. Тогда
$$\inf \tilde{f}(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x) = \varphi(0, 0, \ldots, 0) = -\inf \varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= -\inf_{y_0 + A_{01}^* y_1 + \ldots + A_{0n}^* y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Если функция φ замкнута и субдифференцируема в нуле, то
$$\varphi(0, 0, \ldots, 0) = -\min_{y_1, y_2, \ldots, y_n} \varphi^*(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

и доказательство дословно повторяет доказательство первой части, меняя только inf на min.

Найдем условия, обеспечивающие замкнутость функции $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в нуле.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ была замкнута в нуле, необходимо и достаточно, чтобы существовала гиперплоскость L, отделяющая множества*

$$\det \tilde{f} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda) : \tilde{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq \lambda\},$$

$$A = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n, z) : x_i = A_{0i} x_0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ x_0 \in X_0,\ z \leq M - \varepsilon\},$$

где $M = \inf\limits_{x} \tilde{f}(x, A_{01} x, \ldots, A_{0n} x)$, *а* $\varepsilon > 0$ — *произвольно.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функция φ замкнута в нуле. Тогда справедливо (4), а это дает

$$\inf_{y_0 + A^*_{01} y_1 + \cdots + A^*_{0n} y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) = -M,$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon < 0$ существуют такие $y^0_0, y^0_1, \ldots, y^0_n$, удовлетворяющие равенству $y^0_0 + A^*_{01} y^0_1 + \cdots + A^*_{0n} y^0_n = 0$, для которых

$$\tilde{f}^*(y^0_0, y^0_1, \ldots, y^0_n) < -M + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n} [\langle x_0, y^0_0\rangle + \langle x_1, y^0_1\rangle + \cdots + \langle x_n, y^0_n\rangle - \tilde{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)] < M + \varepsilon$$

$$= \inf_{\substack{x_0, x_1, \ldots, x_n \\ x_i = A_{0i} x_0 \\ z \leq M - \varepsilon,\ x_0 \in X_0}} [\langle x_0, y^0_0\rangle + \langle x_1, y^0_1\rangle + \cdots + \langle x_n, y^0_n\rangle - z],$$

а это и означает, что множества $\det \tilde{f}$ и A отделимы гиперплоскостью $(y^0_0, y^0_1, \ldots, y^0_n, -1)$.

Докажем достаточность. Пусть множества $\det \tilde{f}$ и A отделимы гиперплоскостью. Тогда отделимы и множества $\det \tilde{f}$ и

$$\tilde{A} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n, z) : x_i = A_{0i} x_0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ x_0 \in \mathfrak{X}_0,\ z \leq M - \varepsilon\},$$

поскольку для всех $x_0 \in X_0$ $\tilde{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = +\infty$.

Итак,

$$\inf_{\substack{x_i = A_{0i} x_0 \\ z \leq M - \varepsilon}} [\langle x_0, y_0\rangle + \langle x_1, y_1\rangle + \cdots + \langle x_n, y_n\rangle + \mu z]$$

$$> \sup_{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda) \in \det \tilde{f}} [\langle x_0, y_0\rangle + \langle x_1, y_1\rangle + \cdots + \langle x_n, y_n\rangle + \mu\lambda].$$

Понятно, что не может быть $\mu > 0$, поскольку иначе sup справа равнялся бы $+\infty$, а ввиду того, что множества $P = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) : x_i = A_{0i} x_0,\ x_0 \in X_0\}$ и $\operatorname{dom} \tilde{f}$ пересекаются, μ отлично от нуля. Следовательно, $\mu < 0$, и мы можем предположить $\mu = -1$ (иначе поделим на $-\mu > 0$). Тогда

$$\inf_{x_i=A_{0i}x_0}[\langle x_0, y_0\rangle+\langle x_1, y_1\rangle+\cdots+\langle x_n, y_n\rangle-\inf_x \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\varepsilon]$$
$$\geq \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n}[\langle x_0, y_0\rangle+\langle x_1, y_1\rangle+\cdots+\langle x_n, y_n\rangle-\tilde f(x_0, x_1, \ldots, x_n)]$$
$$=\tilde f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

что дает

$$\inf_x \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\tilde f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)$$
$$<\varepsilon+\inf_x\langle x,\ y_0+A_{01}^*y_1+\cdots+A_{0n}^*y_n\rangle.$$

Отсюда следует, что $y_0+A_{01}^*y_1+\ldots+A_{0n}y_n=0$ (иначе inf справа равнялся бы $-\infty$). Таким образом,

$$\inf \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\tilde f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)<\varepsilon,$$

и тем более

$$\inf_x \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\inf_{y_0+A_{01}^*y_1+\ldots+A_{0n}^*y_n=0}\tilde f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)<\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то

(5) $$\inf \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\inf_{y_0+A_{01}^*y_1+\ldots+A_{0n}^*y_n=0}\tilde f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)\leq 0.$$

Сравнивая (3) и (5), получаем (4), что и доказывает замкнутость функции φ в нуле.

Определение. *Функцию $\tilde f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ назовем N-функцией, если существует точка $(x_0, A_{01}x_0, \ldots, A_{0n}x_0)\in \operatorname{dom}\tilde f$, в которой функция $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна.*

Следующая теорема дает одно достаточное условие для замкнутости и субдифференцируемости функции φ в нуле.

Теорема 3. *Если $\tilde f$ есть N-функция, то* inf *в двойственной задаче достигается, и*

$$\inf_x \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+\min_{y_0+A_{01}^*y_1+\ldots+A_{0n}^*y_n=0}\tilde f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)=0.$$

Доказательство. Используя доказанное в [3] для случая $n=1$, мы получаем, что существуют такие $y_i\in\mathfrak{Y}_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, для которых справедливо следующее соотношение:

(6) $$\inf \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)+f^*(y_0, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\leq\inf_{x\in X_0}\langle x, y_0+A_{01}^*y_1+\cdots+A_{0n}^*y_n\rangle.$$

Соотношение (6) получается применением теоремы Хана — Банаха об отделимости для множеств $A=\{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda): x_i=A_{0i}x_0, i=1, \ldots, n, x_0\in X_0, \lambda\leq\lambda_0\leq \inf \tilde f(x, A_{01}x, \ldots, A_{0n}x)\}$ и det f, что возможно ввиду того, что $\inf \det f \neq \emptyset$, поскольку существует точка, а которой f непрерывна согласно определению N-функции.

Поскольку $\tilde{f}$ является N-функцией, то $\det \tilde{f} \cap \inf \det f \neq \emptyset$. Этим обеспечена нестрогая отделимость множеств $\det \tilde{f}$ и A, т. е. здесь применима теорема 2 для $\varepsilon = 0$, и мы получаем

$$(7) \qquad \inf_x \tilde{f}(x, A_{01}x, \dots, A_{0n}x) + \tilde{f}^*(y_0, y_1, \dots, y_n) = 0$$

при условии $y_0 + A_{01}^* + \dots + A_{0n}^* y_n = 0$.

Из сравнения (7) и (3) следует, что

$$\inf_x \tilde{f}(x, A_{01}x, \dots, A_{0n}x) + \min_{y_0 + A_{01}^* y_1 + \dots + A_{0n}^* y_n = 0} \tilde{f}^*(y_0, y_1, \dots, y_n) = 0,$$

чем теорема доказана.

Вернемся к неравенству (6). Рассмотрим все четыре случая:

а) $X_0 = \mathfrak{X}_0$, тогда $y_0 + A_{01}^* y_1 + \dots + A_{0n}^* y_n = 0$ и $f^* \equiv \tilde{f}^*$.

б) $X_0 = L_0 \subset \mathfrak{X}_0$ — подпространство. Тогда $y_0 + A_{01}^* y_1 + \dots + A_{0n}^* y_n \in L_0^{\perp}$ (иначе inf в (6) равнялся бы $-\infty$). Поскольку условия теоремы Рокафеллара выполнены ($\tilde{f}$ есть N-функция, и, следовательно, существует точка множества $\operatorname{dom} \delta_L$, где $L = L_0 \times A_{01}(L_0) \times \dots \times A_{0n}(L_0)$, в которой f непрерывна), то

$$\tilde{f}^*(z_0, z_1, \dots, z_n) = (f^* \oplus (\delta_L)^*)(z_0, z_1, \dots, z_n) = (f^* \oplus \delta_{L^\perp})(z_0, z_1, \dots, z_n)$$
$$= \inf_{\substack{z_i^1 + z_i^2 = z_i \\ i = 0, 1, \dots, n}} [f^*(z_0^1, z_1^1, \dots, z_n^1) + \delta_{L^\perp}(z_0^2, z_1^2, \dots, z_n^2)]$$
$$= \inf_{(z_0^2, z_1^2, \dots, z_n^2) \in L^\perp} f^*(z_0 - z_0^2, z_1 - z_1^2, \dots, z_n - z_n^2).$$

Итак, функцию f^*, входящую в (6), можно представить в виде

$$f^*(y_0, y_1, \dots, y_n) = \inf_{(z_0^2, z_1^2, \dots, z_n^2) \in L^\perp} f^*(z_0 - z_0^2, z_1 - z_1^2, \dots, z_n - z_n^2)$$
$$= \tilde{f}^*(z_0, z_1, \dots, z_n), \quad \text{где} \quad z_0 + A_{01}^* z_1 + \dots + A_{0n}^* z_n = 0,$$

согласно доказанному в теореме 3.

в) $X_0 = L_0 + \xi_0$. Из (6) следует, что

$$\inf_x \tilde{f}(x, A_{01}x, \dots, A_{0n}x) + f^*(y_0, y_1, \dots, y_n) = \langle \xi_0, y_0 + A_{01}^* y_1 + \dots + A_{0n}^* y_n \rangle,$$

где $y_0 + A_{01}^* y_1 + \dots + A_{0n}^* y_n \in (L_0 + \xi_0)^{\perp} = L_0^{\perp}$.

Обозначим

$$\langle \xi_0, y_0 + A_{01}^* y_1 + \dots + A_{0n}^* y_n \rangle = \psi(y_0, y_1, \dots, y_n).$$

Тогда

$$\tilde{f}^*(z_0, z_1, \ldots, z_n) = (f^* \oplus \psi)(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \inf_{\substack{z_i^1 + z_i^2 = z_i \\ (z_0^2, z_1^2, \ldots, z_n^2) \in L^\perp}} [f^*(z_0^1, z_1^1, \ldots, z_n^1) + \psi(z_0^2, z_1^2, \ldots, z_n^2)]$$

(здесь тоже $z_0 + A_{01}^* z_1 + \cdots + A_{0n}^* z_n = 0$).

г) $X_0 \subset \mathfrak{X}_0$ — выпуклое замкнутое множество. Тогда из (6) получаем как и в предыдущем случае

$$\tilde{f}^*(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \inf_{\substack{z_i^1 + z_i^2 = z_i \\ i=0,1,\ldots,n}} [f^*(z_0^1, z_1^1, \ldots, z_n^1) + \mu_{X^0}(z_0^2, z_1^2, \ldots, z_n^2)],$$

где X^0 — поляра множества $X = X_0 \times A_{01}(X_0) \times \cdots \times A_{0n}(X_0)$ и снова $z_0 + A_{01}^* z_1 + \cdots + A_{0n}^* z_n = 0$.

Аналогичные результаты получаются и в том случае, когда на x_i наложены ограничения $x_i \in X_i \subset \mathfrak{X}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, при условии, что $\tilde{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ является N-функцией, т. е. существует точка $(x_0, A_{01}x_0, \ldots A_{0n}x_0) \in X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n$, в которой f непрерывна.

Определение. *Точку* $(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \mathfrak{Y}_0 \times \mathfrak{Y}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Y}_n$ *назовем субградиентом функции* f *в точке* $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *если для любого* $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}_1 \times \cdots \times \mathfrak{X}_n$ *справедливо*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) - f(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \geqq \langle x_0 - x_0^0, y_0^0 \rangle + \langle x_1 - x_1^0, y_1^0 \rangle + \cdots + \langle x_n - x_n^0, y_n^0 \rangle. \tag{8}$$

Множество всех субградиентов функции f *в точке* $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *назовем субдифференциалом и будем обозначать через* $\partial f(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Из неравенств (8) и (2) легко получить, что если $(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \partial f(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то

$$f(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + f^*(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0) = \langle x_0^0, y_0^0 \rangle + \langle x_1^0, y_1^0 \rangle + \cdots + \langle x_n^0, y_n^0 \rangle,$$

откуда следует, что и $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \partial f^*(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$.

Теорема 4. *Для того, чтобы N-функция*

$$\tilde{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \delta_X(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

достигала минимума в точке $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *при условии* $x_i = A_{0i} x_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_0 \in X_0$, *необходимо и достаточно существование таких* $(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \partial f(x_0, A_{01} x_0, \ldots, A_{0n} x_0)$, *чтобы удовлетворялись следующие соотношения (которые мы будем называть уравнениями Эйлера):*

а) $X_0 = \mathfrak{X}_0$, $y_0^0 + A_{01}^* y_1^0 + \cdots + A_{0n}^* y_n^0 = 0$,

б) $X_0 = L_0 \subset \mathfrak{X}_0$ — *подпространство,*

$$y_0^0 + A_{01}^* y_1^0 + \ldots + A_{0n}^* y_n^0 \in L_0^\perp,$$

в) $X_0 = \xi_0 + L_0 \subset \mathfrak{X}_0$, *где* L_0 — *подпространство, а* $\xi_0 \in \mathfrak{X}_0$

$$y_0^0 + A_{01}^* y_1^0 + \cdots + A_{0n}^* y_n^0 \in L_0^\perp.$$

Доказательство следует из теоремы 3 и [3, теорема 6].

3. Одна из простейших задач, рассматриваемых в вариационном исчислении, следующая: найти нижнюю грань функционала

$$F(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t))\, dt, \tag{9}$$

где на подынтегральную функцию f накладываются некоторые ограничения, а кривые $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ могут иметь свободные или фиксированные концы.

Задачу о нижней грани функционала (9) мы заменим следующей эквивалентной ей задачей, к которой применим результаты второго параграфа:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), \dots, x_n(t))\, dt \to \inf, \tag{10}$$

где f выпукла по $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывна по $(t, x_0, \dots, x_n)$ на $[t_0, t_1]\times R\times\dots\times R$ при условиях

$$x_i(t)=\frac{d^i}{dt^i}\, x_0(t),\ x_i\in B^{n-1-i}[t_0, t_1],\ i=0, 1, \dots, n, \tag{11}$$

где $B^k[t_0, t_1]=\{x : x^{(k)}$ — абсолютно непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]\}$,

$$B^{-1}[t_0, t_1]=L_1[t_0, t_1].$$

Эта задача укладывается в схему второго параграфа, положив

$$\mathfrak{X}_i=B^{n-1-i}[t_0, t_1],\ i=0, 1, \dots, n,\ \ A_{0i}=\frac{d^i}{dt^i},\ i=1, 2, \dots, n.$$

Для X_0 мы будем предполагать следующие два случая:

а) задача со свободными концами: $X_0=B^{n-1}[t_0, t_1]$;

б) задача с фиксированными концами:

$$X_0=\{x_0\in B^{n-1}[t_0, t_1] : x^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)},\ x^{(i)}(t_1)=x_1^{(i)},\ i=0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Общий вид непрерывного линейного функционала, заданного в пространстве $B^k[t_0, t_1]$, следующий:

$$y(x)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x^{(i)}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)y(t)\, dt,$$

где $\alpha_i\in R$, $i=0, 1, \dots, k$, а $y\in L^\infty[t_0, t_1]$.

Если в $B^k[t_0, t_1]$ задан функционал $F(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))\, dt$, где f выпукла по x для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывна по (t, x) на $[t_0, t_1]\times R$, то (см. [4]) функционал, двойственный к нему и получаемый формулой

$$F^*(y)=\sup_x \Big[\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x^{(i)}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x^{(k+1)}(t)\, y(t)\, dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))\, dt\Big],$$

имеет

$$\operatorname{dom} F^* = \{(a_0, a_1, \ldots, a_k, y) : y \in B^k[t_0, t_1],$$

(12)

$$y^{(i)}(t_1) = 0,\ y^{(i)}(t_0) = (-1)^{i+1} a_{k-i},\ i = 0, 1, \ldots, k,\ \int_{t_0}^{t_1} f^*(t),\ y^{(k+1)}(t) dt < \infty\}.$$

Двойственный к функционалу (10) определяется формулой

$$F^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) = F^*((a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0\,n-1}, y_0), (a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1\,n-2}, y_1), \ldots,$$

$$(a_{n-1,0}\, y_{n-1}, y_n)) = \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n} [\sum_{i=0}^{n-1} a_{0i} x_0^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(n)}(t)\, y_0(t) dt + \sum_{i=0}^{n-2} a_{1i} x_1^{(i)}(t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} x_1^{(n-1)}(t)\, y_1(t)\, dt + \cdots + a_{n-1,0} x_{n-1}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_{n-1}(t) y_{n-1}(t)\, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} x_n(t)\, y_n(t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))\, dt\,].$$

Применяя доказанную в [4] лемму, утверждающую справедливость (12), мы получаем (в случае $X_0 = B^{n-1}$)

$$F^*(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n} \int_{t_0}^{t_1} [(-1)^n x_0(t)\, y_0^{(n)}(t) + (-1)^{n-1} x_1(t)\, y_1^{(n-1)}(t) + \cdots$$

$$+ x_n(t)\, y_n(t) - f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))]\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))\, dt,$$

где $f^*(t, z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup\limits_{x_0, x_1, \ldots, x_n} [x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n - f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)]$.

Поскольку при сделанных предположениях относительно подынтегральной функции f в (10) функционал F является N-функцией в нормированной топологии, то справедлива следующая

Теорема 5 (теорема двойственности). *Для задачи* (10)—(11) *имеет место*

а) *Задача со свободными концами:*

$$\inf_{x \in B^{n-1}[t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))\, dt$$

$$+ \min \int_{t_0}^{t_1} f^*((-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))\, dt = 0,$$

где минимум берется по всем $y_i \in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, *для которых*

$$y_0(t)+y_1(t)+\cdots+y_n(t)=0,$$

$$y_k^{(n-k-1)}(t_1)=y_k^{(n-k-2)}(t_1)=\cdots=y_k(t_1)=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

$$y_0^{(n-1)}(t_0)=0,\ y_0^{(n-2)}(t_0)+y_1^{(n-2)}(t_0)=0,\ldots,\sum_{i=0}^{n-1} y_i^{(n-1-i)}(t_0)=0;$$

б) *задача с фиксированными концами*

$$\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))\, dt$$

$$+\min_{\substack{y_i \in B^{n-i-1} \\ y_0(t)+y_1(t)+\ldots+y_n(t)=0}} \Big[\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), \ldots, y_n(t))\, dt$$

$$+\Big|(-1)^{n-1}x(t)\, y_0^{(n-1)}(t)+(-1)^{n-2}\dot{x}(t)\sum_{i=0}^{1} y_i^{(n-2)}(t)+\cdots$$

$$+x^{(n-1)}(t)\sum_{i=0}^{n-1} y_i(t)\Big|_{t_0}^{t_1}\Big]=0.$$

Доказательство. Рассмотрим случай а). Поскольку функционал $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, является N-функцией, то, применяя теорему 1 (здесь $X_0=\mathfrak{X}_0=B^{n-1}[t_0, t_1]$, $A_{0i}=\dfrac{d^i}{dt^i}$, $i=0,1,\ldots,n$), получаем

$$\inf_{x \in B^{n-1}} F(x)+\min_{v_0+A_{01}^* v_1+\ldots+A_{0n}^* v_n=0} F^*(v_0, v_1, \ldots, v_n)=0,$$

где $v_i \in [B^{n-1-i}[t_0, t_1]]^*=R^{n-i}\times L^\infty[t_0, t_1]$, $i=0,1,\ldots,n$, т. е.

$$\begin{aligned}
v_0 &=(\alpha_0^0, \alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^{n-1}, y_0),\\
v_1 &=(\alpha_1^0, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^{n-2}, y_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v^{n-1} &=(\alpha_{n-1}^0, y_{n-1}),\\
v_n &=y_n.
\end{aligned}$$

Найдем вид оператора A_{0k}^*. Для любого $x \in B^{n-1}[t_0, t_1]$ и $v_k=(\alpha_k^0, \alpha_k^1, \ldots, \alpha_k^{n-k-1}, y_k)$ имеем

$$\langle x, A_{0k}^* v_k\rangle=\langle A_{0k}\, x, v_k\rangle=\langle \frac{d^k}{dt^k}\, x, v_k\rangle$$

$$=\alpha_k^0\, x^{(k)}(t_0)+\alpha_k^1\, x^{(k+1)}(t_0)+\cdots+\alpha_k^{n-k-1}\, x^{(n-1)}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x^{(n)}(t)\, y_k(t)\, dt,$$

т. е. $A^*_{0k} v_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, \alpha^0_k, \alpha^1_k, \ldots, \alpha^{n-k-1}_k, y_k)$, и условие $v_0 + A^*_{01} v_1 + \ldots + A^*_{0n} v_n = 0$ записывается следующим образом:

$$(\alpha^0_0, \alpha^1_0, \ldots, \alpha^{n-1}_0, y_0) + (0, \alpha^0_1, \alpha^1_1, \ldots, \alpha^{n-2}_1, y_1) + \cdots$$
$$+ (0, 0, \ldots, 0, \alpha^0_{n-1}, y_{n-1}) + (0, 0, \ldots, 0, y_n) = (0, 0, \ldots, 0),$$

откуда

$$\alpha^0_0 = 0, \alpha^0_1 + \alpha^1_0 = 0, \ldots, \alpha^0_{n-1} + \alpha^1_{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1}_0 = 0,$$
(13)
$$y_0 + y_1 + \cdots + y_n = 0,$$

и (согласно теореме 3)

$$\inf_{x \in B^{n-1}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\, dt$$
$$+ \min \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))\, dt = 0,$$

где минимум берется по всем $y_i \in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y_n(t) \in L[t_0, t_1]$, для которых

$$y_0(t) + y_1(t) + \cdots + y_n(t) = 0 \text{ и } y_k^{(n-k-1)}(t_1) = y_k^{(n-k-2)}(t_1) = \cdots = y_k(t_1) = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1; \; y_0^{(n-1)}(t_0) = 0, \sum_{i=0}^{1} y_i^{(n-2)}(t_0) = 0, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} y_i^{(n-1-i)}(t_0) = 0.$$

Рассмотрим случай б). Множество $X_0 \subset \mathfrak{X}_0$, имеющее вид

$$X_0 = \{x \in B^{n-1}[t_0, t_1] : x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}, \; x^{(i)}(t_1) = x_1^{(i)}, \; i = 0, 1, \ldots, n-1\},$$

есть сдвинутое подпространство. Для $\widetilde{F}^*$ получаем

$$\widetilde{F}^*(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n \in X} [\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0^i x_0^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x_0^{(n)}(t)\, y_0(t)\, dt + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_1^i x_1^{(i)}(t_0)$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} x_1^{(n-1)}(t)\, y_1(t)\, dt + \cdots + \int_{t_0}^{t_1} x_n(t)\, y_n(t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))\, dt\,],$$

где $X = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in B^{n-1} \times B^{n-2} \times \cdots \times L : x_i(t_0) = x_0^{(i)}, x_i(t_1) = x_1^{(i)}, \; i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ и $y_k \in B^{n-1-k}[t_0, t_1]$. После интегрирования k раз по частям выражения

$$\int_{t_0}^{t_1} x_{n-k}^{(k)}(t)\, y_{n-k}(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

получаем

$$\widetilde{F}^*(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^0 x_0^{(k)} + \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k^1 x_0^{(k+1)} + \cdots + \alpha_{n-1}^0 x_0^{(n-1)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x_1^{(n-1-k)} y_0^{(k)}(t_1) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k x_1^{(n-1-k)} y_1^{(k)}(t_1) + \cdots + x_1^{(n-1)} y_{n-1}(t_1)$$

$$-[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x_0^{(n-1-k)} y_0^{(k)}(t_0) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k x_0^{(n-1-k)} y_1^{(k)}(t_0) + \cdots + x_0^{(n-1)} y_{n-1}(t_0)]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))\, dt.$$

Условия (13) дают, что

$$\widetilde{F}^*(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \Big| (-1)^{n-1} x(t)\, y_0^{(n-1)}(t) + (-1)^{n-2} \dot{x}(t) \sum_{i=0}^{1} y_i^{(n-2)}(t) + \cdots$$

$$+ x^{(n-1)}(t) \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{(n-1)} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))\, dt.$$

Теорема 6 (Уравнение Эйлера). *Для того, чтобы функционал $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ достигал минимума в точке $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in B^{n-1}[t_0, t_1] \times B^{n-2}[t_0, t_1] \times \cdots \times L_1[t_0, t_1]$ при условиях $x_i^0(t) = \frac{d^i}{dt^i} x_0^0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, необходимо и достаточно существование таких $(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, $y_i^0 \in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

а) *задача со свободным концами:*

$$y_0^0(t) + y_1^0(t) + \cdots + y_n^0(t) = 0,$$

$$y_k^{(n-k-1)}(t_1) = y_k^{(n-k-2)}(t_1) = \cdots = y_k(t_1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$y_0^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-2)}(t_0) + y_1^{(n-2)}(t_0) = \cdots = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t_0) = 0,$$

$$((-1)^n y_0^{0\,(n)}(t),\ (-1)^{n-1} y_1^{0\,(n-1)}(t), \ldots, y_n^0(t)) \in \partial f(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)),$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

б) *Задача с фиксированными концами*

$$y_0^0(t) + y_1^0(t) + \cdots + y_n^0(t) = 0,$$

(14)

$$((-1)^n y^{0\,(n)}(t),\ (-1)^{n-1} y_1^{0\,(n-1)}(t), \ldots, y_n^0(t)) \in \partial f(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)),$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Рассмотрим только случай б). Докажем необходимость. Пусть функционал F достигает минимума на кривой x_0. Согласно теореме 5 существуют $y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, $y_i^0 \in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $y_n^0 \in L[t_0, t_1]$, для которых $y_0^0(t) + y_1^0(t) + \cdots + y_n^0(t) = 0$ и

$$(15)\quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t))\,dt + \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{0\,(n)}(t), \ldots, y_n^0(t)\,dt$$

$$= [(-1)^n x_0(t)\, y_0^{0\,(n-1)}(t) + (-1)^{n-1}\dot{x}_0(t) \sum_{i=0}^{1} y_i^{0\,(n-2)}(t) + \cdots$$

$$- x_0^{(n-1)}(t) \sum_{i=0}^{n-1} y_i^0(t)]\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} [(-1)^n (x_0(t)\, y_0^{0\,(n)}(t)$$

$$+ (-1)^{n-1}\dot{x}_0(t)\, y_1^{0\,(n-1)}(t) + \cdots + x_0^{(n-1)}(t)\, y_0^n(t)]\,dt.$$

Справедливость последнего равенства легко получить, проинтегрировав k раз по частям выражения

$$\int_{t_0}^{t_1} (-1)^k x_0^{(n-k)}(t)\, y_{n-k}^{0\,(k)}(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

сумма которых стоит в правой части (15), и использовав равенство $y_0^0(t) + y_1^0(t) + \cdots + y_n^0(t) = 0$.

По неравенству Юнга для двойственных друг к другу функций $f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t))$ и $f^*(t, (-1)^n y_0^{0\,(n)}(t), \ldots, y_n^0(t)$ получаем

$$f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)) + f^*(t, (-1)^n y_0^{0\,(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{0\,(n-1)}(t), \ldots, y_n^0(t))$$

$$\geqq (-1)^n x_0(t)\, y_0^{0\,(n)}(t) + (-1)^{n-1}\dot{x}_0(t)\, y_1^{0\,(n-1)}(t) + \cdots + x_0^{(n)}(t)\, y_n^0(t).$$

Проинтегрировав это неравенство на отрезке $[t_0, t_1]$ и сравнивая его с равенством (15), мы получили, что почти для всех $t \in [t_0, t_1]$ имеет место

$$f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)) + f^*(t, (-1)^n y_0^{0\,(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{0\,(n-1)}(t), \ldots, y_n^0(t))$$

$$= (-1)^n x_0(t)\, y_0^{0\,(n)}(t) + (-1)^{n-1}\dot{x}_0(t)\, y_1^{0\,(n-1)}(t) + \cdots + x_0^{(n)}(t)\, y_n^0(t),$$

т. е.

$$((-1)^n y_0^{0\,(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{0\,(n-1)}(t), \ldots, y_1^0(t)) \in \partial f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)).$$

Докажем достаточность. Пусть существуют $y_0^0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, удовлетворяющие (14). Тогда для любого $x \in X_0$ и почти для всех $t \in [t_0, t_1]$, согласно определению субградиента, справедливо

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)) - f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n)}(t))$$

$$\geq (-1)^n (x(t) - x_0(t))\, y_0^{0\,(n)}(t) + (-1)^{n-1}(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t))\, y_1^{0\,(n-1)}(t) + \cdots$$

$$+ (x^{(n)}(t) - x_0^{(n)}(t))\, y_n^0(t).$$

Проинтегрируем это неравенство на отрезке $[t_0, t_1]$;

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))\,dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), \dot{x}(t), \ldots, x_0^{(n)}(t))\,dt$$

$$[(-1)^n\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(x^{(i)}(t)-x_0^{(i)}(t))\,y_0^{0(n-1-i)}(t)+(-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}(x^{(i+1)}(t)$$

$$-x_0^{(i+1)}(t))\,y_1^{0\,(n-2-i)}(t)+\ldots-(x^{(n-1)}(t)-x_0^{(n-1)}(t))\,y_{n-1}^0(t)]\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}(x^{(n)}(t)-x_0^{(n)}(t))(y_0^0(t)+y_1^0(t)+\cdots+y_n^0(t))\,dt=0.$$

Справедливость последного равенства следует из того, что

$$x^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)},\ x^{(i)}(t_1)=x_0^{(i)}(t_1)=x_1^{(i)}\quad\text{и}\quad y_0^0(t)+y_1^0(t)+\cdots+y_n^0(t)=0.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. *Успехи мат. наук*, **23**, 1968, № 6, 51—117.
3. М. М. Цветанов. Двойственность в экстремальных задачах. *Укр. мат. журнал*, **23**, 1971, № 2, 201—218.
4. М. М. Цветанов. Двойственность в задачах вариационного исчисления и оптимального управления. *Известия Мат. инст. БАН*, **13**, 1972, 277—315.
5. М. М. Цветанов. Двойственность в вариационных задачах со свободными концами. *Известия Мат. инст. БАН*, **15**, 1974, 313—331.
6. М. М. Цветанов. Двойственность в вариационных задачах с фиксированными концами. *Известия Мат. инст. БАН*, **15**, 1974, 113—125.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София п. я. 373

Поступила 13. 12. 1973