Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИЗБРАННЫЕ ТЕОРЕМЫ О МНОГОЗНАЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ И ПРОДОЛЖЕНИЯХ

СТОЯН Й. НЕДЕВ

Предложен новый метод доказательства теорем о многозначных сечениях (селекторов), содержащихся в работах Э. Майкла и М. Чобана. Этот метод позволил придать теоремам о сечениях новую форму — более общую и более сильную. Например, приведенные здесь теоремы о сечениях содержат как частный случай теорему счетной суммы для размерности dim и как следствие — теорему Куратовского — Мориты о представимости n-мерных метрических пространств в виде $n+1$-кратных замкнутых образов нульмерных метрических пространств.

Настоящая работа содержит обзор результатов автора из [1, 2, 3, 4], однако все теоремы, которые здесь содержатся, публикуются впервые в таком виде и являются обобщениями соответствующих теорем из указанных работ. Притом, на наш взгляд, эти обобщения, хотя и делают формулировки несколько более громоздкими, в значительной степени обогащают содержание соответствующих результатов. Кроме того, здесь обсуждаются и некоторые ошибки, допущенные автором в цитированных работах.

Сочетанием методов, разработанных Э. Майклом в [5] и отчасти автором в [1, 3], и идей М. Чобана из [6] получена основная часть приведенных здесь результатов.

В [5] при помощи однозначных непрерывных сечений (селекторов) многозначных отображений Э. Майкл характеризует топологические свойства типа паракомпактности и (коллективной) нормальности.

В [6, § 11] М. Чобан отказывается от однозначности сечений и устанавливает, что существование полунепрерывного сверху сечения (той или иной значности) для данного полунепрерывного снизу отображения Φ тесно связано со свойствами типа паракомпактности и с размерностью области определения Φ.

Тут следует отметить еще работу [7] Даукера, один замечательный результат которой (см. лемму 2) играет ключевую роль в доказательстве тех вариантов теорем о сечениях, которые касаются размерности dim. Методы работы [8] этого автора дают доказательства теорем 3, 6 и 7 о продолжениях.

Прежде чем приступить к точным формулировкам и доказательствам, напомним некоторые определения и введем нужные нам обозначения.

Пусть τ и τ' — бесконечные кардинальные числа. Топологическое пространство X будем называть τ-точечно-τ'-паракомпактным, если в любое открытое покрытие ω пространства X, мощности $|\omega|<\tau$ и кратности $\mathrm{Ord}(\omega)<\tau'$ можно вписать открытое, локально конечное (П. Александров [9]) покрытие.

Пусть τ^+ — непосредственно следующее за τ кардинальное число. τ^+-точечно-τ^+-паракомпактные пространства называются τ-паракомпактными. Если пространство X — τ-паракомпактно при любом τ, то X называется паракомпактным пространством (Дьедонне [10]). $\aleph_0$-паракомпактные пространства называются счетно паракомпактными [11]. Для единства обозначений паракомпактные пространства будем называть еще ∞-точечно-∞-паракомпактными. Аналогичный смысл будет иметь появление символа ∞ и в других местах.

Пространство X называется τ-коллективно нормальным, если для любого дискретного семейства φ замкнутых подмножеств пространства X мощности $|\varphi|\leqq\tau$ существует дизъюнктное семейство (а в таком случае всегда существует и дискретное семейство) $\{V_F: F\in\varphi\}$ открытых подмножеств X, такое, что $F\subset V_F$ для любого $F\in\varphi$. Если пространство X — τ-коллективно нормально при любом τ, то оно называется коллективно нормальным [12]. Нетрудно убедиться, что любое нормальное (т. е. 2-коллективно нормальное, T_1-) пространство — $\aleph_0$-коллективно нормально.

Говорят, что размерность $\dim X$ нормального пространства X не превосходит целого, не меньшего -1 числа n, и пишут $\dim X\leq n$, если в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие γ кратности $\operatorname{Ord}(\gamma)\leq n+1$ (см. [13]). Причем неравенство $\operatorname{Ord}(\gamma)\leq n+1$ означает, что каждая точка X содержится самое большое в $n+1$ различных элементах покрытия γ.

Если X — множество, то через 2^X обозначаем множество всех подмножеств множества X.

Отображение $\Phi: X\to 2^Y$ называется многозначным отображением X в Y. Отображение $\Psi: X\to 2^Y$ называется сечением для отображения $\Phi: X\to 2^Y$, если $\Psi(x)\subset\Phi(x)$ для каждой точки $x\in X$. В частности, отображение $f: X\to Y$ называется однозначным сечением для $\Phi: X\to 2^Y$, если $f(x)\in\Phi(x)$ для любой точки $x\in X$. Отображение $\Psi: X\to 2^Y$ называется продолжением для отображения $\Phi: M\to 2^Y$, где $M\subset X$, если $\Psi(x)=\Phi(x)$ для любой точки $x\in M$.

Если $\Phi: X\to 2^Y$ — многозначное отображение и $M\subset Y$, то полагаем $\Phi^{-1}(M)=\{x\in X: \Phi(x)\cap M\neq\Lambda\}$ и $\Phi^{\#}(M)=\{x\in X: \Phi(x)\subset M\}$.

Пусть X и Y — топологические пространства и $\Phi: X\to 2^Y$ — многозначное отображение. Отображение Φ называется полунепрерывным снизу (сверху) (короче — п. н. сн. и п. н. св. соответственно) в точке $x\in X$, если из того, что множество U открыто в Y и $U\cap\Phi(x)\neq\Lambda$ $(\Phi(x)\subset U)$, следует, что $x\in\langle\Phi^{-1}(U)\rangle$ $(x\in\langle\Phi^{\#}(U)\rangle)$.

Отображение Φ называется п. н. сн. (п. н. св.), если Φ п. н. сн. (п. н. св.) в любой точке $x\in X$. Очевидно, Φ п. н. сн. (п. н. св.) тогда и только тогда, когда множество $\Phi^{-1}(U)$ $(\Phi^{\#}(U))$ открыто в X для каждого открытого в Y множества U.

Пусть теперь Y — метрическое пространство. Через $\mathfrak{F}_\tau(Y)$ будем обозначать семейство всех непустых полных подмножеств F пространства Y, обладающих следующим свойством: из каждого открытого покрытия F можно выбрать покрытие мощности $<\tau$. Положим еще $\mathcal{C}(Y)=\mathfrak{F}_{\aleph_0}(Y)\cup\{Y\}$, если само Y — полное метрическое пространство и $\mathcal{C}(Y)=\mathfrak{F}_{\aleph_0}(Y)$, если Y не полно.

Если пространство Y является еще и линейным пространством, то все элементы $\mathfrak{F}_\tau(Y)$ будем считать выпуклыми.

Через Y_τ будем обозначать дискретное пространство мощности $|Y_\tau|=\tau$, $B_\tau = Y_\tau^{\aleph_0}$ — обобщенное бэровское пространство, H^τ — обобщенное гильбертово пространство веса τ и через l_1^τ — банахово пространство всех функций $f: Y_\tau \to R$ (везде в работе R — вещественная прямая), для которых $\Sigma\{|f(y)|: y \in Y_\tau\} < \infty$ с нормой $\|f\| = \Sigma\{|f(y)|: y \in Y_\tau\}$. Очевидно, $w(l_1^\tau) = \tau$.

Теорема 1. *Для любого T_1-пространства X следующие три условия равносильны:*

а) *X — нормально и τ-точечно-τ'-паракомпактно, где $\tau \geq \tau' \geq \aleph_0$;*

б) *для любого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{F}_{\tau'}(Y)$, где Y — локально выпуклое метрическое пространство веса $w(Y) < \tau$, существует непрерывное однозначное сечение;*

в) *для любого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{F}_{\tau'}(l_1^{\tau''})$, где $\tau'' < \tau$, существует непрерывное однозначное сечение.*

Замечание 1. В случае $\tau = \aleph_1$ импликация в) $\to$ а) остается в силе, если заменить $l_1^{\tau''}$ на R.

В работе Кандо [14] рассмотрены случаи $\tau = \tau' = \infty$, $\tau = \tau' = \aleph_1$, $\tau = \infty$, $\tau' = \aleph_0$ и $\tau = \tau' = \aleph_0$, причем приведенные там рассуждения могут быть обобщены так, чтобы доказать теорему 1.

Теорема 2. *Для любого T_1-пространства X следующие три условия равносильны:*

а) *X — τ-коллективно нормально;*

б) *для любого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{C}(Y)$, такого, что множество $\{x \in X: \Phi(x) = Y\}$ открыто в X, а Y — локально выпуклое метрическое пространство веса $w(Y) \leq \tau$, существует непрерывное однозначное сечение;*

в) *для любого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{C}(H^\tau)$, такого, что множество $\{x \in X: \Phi(x) = H^\tau\}$ открыто в X, существует непрерывное однозначное сечение.*

Замечание 2. При $\tau = \aleph_0$ импликация в) $\to$ а) остается в силе, если $H^{\aleph_0}$ заменить на R или на невырожденный отрезок R, а импликация а) $\to$ в) после этой замены остается в силе даже если опустить слова „множество $\{x \in X: \Phi(x) = R\}$ открыто в X".

Замечание 3. В работе Э. Майкла [5] утверждается, что теорема 2 справедлива и тогда, когда в условии б) опущены слова „множество $\{x \in X: \Phi(x) = Y\}$ открыто в X", однако, на наш взгляд, приведенные там соображения содержат пробел (хотя автор, следуя Майклу, сам неоднократно повторял это утверждение (см. [1, 2, 3]).

Может быть небезынтересно отметить, что в условиях теоремы множество $\{x \in X: \Phi(x) = Y\}$ всегда является множеством типа G_δ в X (т. е. пересечением счетного числа открытых в X множеств) и что импликация а) $\to$ б) останется в силе, если указанные выше слова заменить на слова „множество $\{x \in X: \Phi(x) = Y\}$ замкнуто в X". Однако, повторяем, справедлива ли импликация а) $\to$ б) без дополнительных ограничений на множество $\{x \in X: \Phi(x) = Y\}$, мы не знаем.

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Любое нормальное и τ-паракомпактное пространство τ-коллективно нормально, а любое τ-коллективно нормальное пространство τ^+-точечно-$\aleph_0$-паракомпактно.*

Легким следствием теоремы 2 является также

Т е о р е м а 3. *Для любого T_1-пространства X следующие три условия равносильны:*

а) *X — τ-коллективно нормально;*

б) *для любого непрерывного $f: F \to Y$, где F — замкнуто в X, а Y — полное, локально выпуклое метрическое пространство веса $\leq \tau$ существует непрерывное однозначное продолжение;*

в) *для любого непрерывного $f: F \to H^{\tau}$, где F замкнуто в X, существует непрерывное однозначное продолжение.*

З а м е ч а н и е 4. При $\tau = \aleph_0$ импликация в) $\to$ а) остается в силе, если заменить $H^{\aleph_0}$ на R или на невырожденный отрезок R.

При $\tau = \aleph_0$ теорема 3 дает нам известную теорему У р ы с о н а [15] о продолжении отображения с замкнутого подмножества нормального пространства, а при $\tau = \infty$ получаем результат, эквивалентный некоторым результатам Д а у к е р а из [8]. При этом, как уже отмечалось вначале, теорему 3 и даже теорему 2 легко получить методами, изложенными Д а у к е р о м в [8], особенно если подкрепить их следующей леммой.

Л е м м а 1 (С. Й. Н е д е в [1]). *Пусть X — τ-коллективно нормальное пространство, X' — замкнутое в X, ω — семейство открытых в X множеств мощности $|\omega| \leq \tau$, покрывающее X', и точечно конечное в точках X'. Тогда существует локально конечное в X семейство открытых в X множеств, которое вписано в ω и покрывает X'.*

Заметим, что лемма 1 тоже дает нам вторую часть следствия 1, так что теорема 2 в свою очередь является следствием теорем 1 и 3.

Следующие две теоремы являются основными результатами настоящей работы.

Т е о р е м а 4. *Пусть X — T_1-пространство, $X' \subset X$, $X' = \cup\{F_i : i = 1, 2, \ldots\}$, где для каждого i множество F_i замкнуто в X. Тогда следующие три условия равносильны:*

а) *X — нормально, τ-точечно-τ'-паракомпактно, где $\tau \geq \tau' \geq \aleph_0$ и $\dim F_i \leq n$ для каждого i;*

б) *для каждого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{F}_{\tau'}(Y)$, где Y — метрическое пространство веса $w(Y) < \tau$, существует такое п. н. св. сечение $\Psi: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$, что $|\Psi(x)| \leq n+1$ для каждой точки $x \in X'$.*

в) *для каждого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{F}_{\tau'}(Y_{\tau''})$, где $\tau'' < \tau$, существует такое п. н. св. сечение $\Psi: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y_{\tau''})$, что $|\Psi(x)| \leq n+1$ для каждого $x \in X'$.*

Т е о р е м а 5. *Пусть X — T_1-пространство, $X' \subset X$, $X' = \cup\{F_i : i = 1, 2, \ldots\}$, где для каждого i множество F_i замкнуто в X. Тогда следующие четыре условия равносильны:*

а) *X — τ-коллективно нормально и $\dim F_i \leq n$ для каждого i;*

б) *для каждого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{C}(Y)$, такого, что множество $\{x \in X : \Phi(x) = Y\}$ открыто в X, а Y — метрическое пространство веса $w(Y) \leq \tau$, существует такое п. н. св. сечение $\Psi: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$, что $|\Psi(x)| \leq n+1$ для любой точки $x \in X'$;*

в) *для каждого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathcal{C}(Y_{\tau})$ существует такое п. н. св. сечение $\Psi: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y_{\tau})$, что $|\Psi(x)| \leq n+1$ для любой точки $x \in X'$;*

г) *для каждого п. н. сн.* $\Phi: X \to \mathcal{C}(Y_\tau)$, *такого, что множество* $\{x \in X : \Phi(x) = Y_\tau\}$ *открыто в* X, *существует такое п. н. св. сечение* $\Psi: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y_\tau)$, *что* $|\Psi(x)| \leq n+1$ *для любой точки* $x \in X'$.

Прежде чем приступить к доказательствам, отметим, что для случаев $X' = A$ и $X' = X$ теорема 4 содержится в работе М. Чобана [6] (правда, там $\tau = \tau'$).

Что касается доказательств, то мы здесь ограничимся только более или менее подробным доказательством теоремы 4. Это обстоятельство мы оправдываем тем, что, во-первых, дальше для извлечения следствий мы применяем в основном теорему 4; во-вторых, доказательства остальных теорем (точнее, идеи этих доказательств) содержатся в работах Э. Майкла [5], Кандо [14], Даукера [8] и в других местах; наконец, нам кажется, что доказательство теоремы 4 дает достаточно полное представление об основных методах рассуждений во всех вопросах, затронутых в этой работе.

Доказательство теоремы 4 будет разбито на несколько последовательных лемм.

Лемма 2. *Пусть* X — *нормальное пространство,* F — *замкнуто в* X, $\dim F \leq n$ *и* ω — *открытое, локально конечное покрытие* X. *Тогда в* ω *можно вписать открытое локально конечное покрытие пространства* X, *такое, что каждая точка множества* F *содержится самое большое в* $n+1$ *его элементах.*

Лемма 2 является тривиальным следствием следующего фундаментального результата Даукера [7]: если X — нормальное пространство и $\dim X \leq n$, то в любое открытое локально конечное покрытие X можно вписать открытое локально конечное покрытие кратности $\leq n+1$.

Лемма 3 (Э. Майкл [5]). *Пусть* X — *топологическое пространство,* Y — *метрическое пространство,* $\varepsilon > 0$, $\Phi: X \to 2^Y$ *и* $\Psi: X \to 2^Y$ — *такие п. н. сн. отображения, что* $\Phi(x) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\Psi(x)) \neq \Lambda$ *для каждой точки* $x \in X$. *Тогда если* $\theta: X \to 2^Y$ *определено по правилу* $\theta(x) = [\Phi(x) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\Psi(x))]$ *для каждой точки* $x \in X$, *то* θ — *тоже п. н. сн.*

Лемма 4. *Пусть* X — *нормальное пространство,* $F \subset X$, F *замкнуто в* X *и* $\dim F \leq n$, Y — *метрическое пространство,* $\varepsilon > 0$ *и* $\Phi: X \to 2^Y$ — *такое отображение, что в покрытие* $\{\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon(y)) : y \in Y\}$ *можно вписать открытое локально конечное покрытие. Тогда существуют отображения* $\Psi: X \to 2^Y$, $\theta: X \to 2^Y$ *и* $\varphi: X \to 2^Y$, *такие что: 1)* φ *и* Ψ — *п. н. сн., а* θ — *п. н. св.; 2) для каждой точки* $x \in X$ *выполнено:* $\Lambda \neq \varphi(x) \subset \theta(x) \subset \Psi(x) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(x))$; *3)* $|\Psi(x)| < \aleph_0$ *для каждой точки* $x \in X$ *и* $|\Psi(x)| \leq n+1$ *для каждой точки* $x \in X'$.

Доказательство. Пусть $\omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое, локально конечное покрытие X, которое вписано в $\{\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon(y)) : y \in Y\}$ и кратность которого не превосходит $n+1$ в каждой точке $x \in F$. Как известно, (С. Лефшец [16]), существует открытое покрытие $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$, такое, что $[V_\alpha] \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Для каждого $\alpha \in A$ выберем по точке $y_\alpha \in Y$ так, чтобы выполнялось включение $U_\alpha \subset \Phi^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon(y_\alpha))$ и для каждой точки $x \in X$ положим $\Psi(x) = \{y_\alpha : x \in U_\alpha\}$,

$$\theta(x) = \{y_\alpha : x \in [V_\alpha]\} \text{ и } \varphi(x) = \{y_\alpha : x \in V_\alpha\}.$$

Без труда убеждаемся, что определенные таким образом отображения φ, Ψ и θ удовлетворяют условиям 1, 2 и 3.

Лемма 5. *Пусть X — нормальное пространство, $X' \subset X$, $X' = \cup\{F_i : i = 1, 2, \ldots\}$, где F_i замкнуто в X и $\dim F_i \leq n$ для каждого i, Y — метрическое пространство, и для каждого п. н. сн. $\Phi : X \to \mathcal{F}_\tau(Y)$ и каждого $\varepsilon > 0$ в покрытие $\{\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon(y)) : y \in Y\}$ можно вписать открытое локально конечное покрытие. Тогда, если $\Phi : X \to \mathcal{F}_\tau(Y)$ — данное п. н. сн. отображение, то для каждого i существуют отображения $\Phi_i : X \to \mathcal{F}_\tau(Y)$ $\theta_i : X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ и $\varphi_i : X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$, такие что: 1) Φ_i и φ_i — п. н. сн., а θ_i — п. н. св. для каждого i; 2) $\Phi_i(x) = [\Phi_{i-1}(x) \cap \mathcal{O}_{2^{-i+1}}(\varphi_{i-1}(x))]$, $\Phi_1 = \Phi$; 3) $\varphi_i(x) \subset \theta_i(x) \subset \mathcal{O}_{2^{-i}}(\Phi_i(x))$; 4) $|\theta_i(x)| < \aleph_0$ для каждого $x \in X$ и $|\theta_i(x)| \leq n+1$ для каждого $x \in \cup\{F_k : k = 1, 2, \ldots, i\}$; 5) $\theta_{i+1}(x) \subset \mathcal{O}_{2^{-i+2}}(\mathcal{O}_i(x))$.*

Доказательство. Очевидно, леммы 2, 3 и 4 позволяют нам строить указанные отображения по индукции.

Лемма 6. *Пусть X — топологическое пространство, Y — полное метрическое пространство и для каждого i отображение $\theta_i : X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ п. н. св., причем $\theta_{i+1}(x) \subset \mathcal{O}_{2^{-i+1}}(\theta_i(x))$ для любых i и x. Определим $\theta(x)$ по правилу: $y \in \theta(x)$ тогда и только тогда, когда $y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$, где $y_i \in \theta_i(x)$ для каждого i. Тогда $\theta : X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ и θ — п. н. св. Кроме того, если точка x такова, что $|\theta_i(x)| \leq n$ для сколь угодно больших i, то $|\theta(x)| \leq n$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\theta(x) \neq \Lambda$. Для этого пусть $Z = \Pi\{\theta_i(x) : i = 1, 2, \ldots\}$. Для каждого k определим $A_k \subset Z$ по правилу: $z = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\} \in A_k$ тогда и только тогда, когда $\varrho(y_i, y_{i+1}) \leq 2^{-i+1}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, A_k замкнуты в Z, $A_k \neq \Lambda$ и $A_{k+1} \subset A_k$ для каждого k. Следовательно, $\cap\{A_k : k = 1, 2, \ldots\} \neq \Lambda$. Если теперь $z = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\} \in \cap\{A_k : k = 1, 2, \ldots\}$, то последовательность $\{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\}$ фундаментальная и, следовательно, так как Y полно, сходится к точке $y \in \theta(x)$.

Очевидно, каждая конечная ε-сеть для $\theta_i(x)$ является конечной $\varepsilon + 2^{-i+1}$-сетью для $\theta(x)$, т. е. $\theta(x)$ вполне ограничено. Очевидно также, что $\theta(x)$ замкнуто и, значит, $\theta(x)$ — компакт.

Покажем теперь, что θ — п. н. св. Для этого сначала установим такой факт: если U — открыто в Y и $U \supset \theta(x)$, то $U \supset \theta_i(x)$, начиная с некоторого i.

Допуская противное, мы находим $\varepsilon > 0$, такое, что для каждого i найдется $j > i$, для которого $\theta_j(x) \setminus \mathcal{O}_{3\varepsilon}(\theta(x)) \neq \Lambda$. Отсюда сразу следует, что, начиная с некоторого i_0, выполнено $\theta_i(x) \setminus \mathcal{O}_{2\varepsilon}(\theta(x)) \neq \Lambda$. Мы берем i_1 настолько большим, чтобы $i_1 > i_0$ и $\varepsilon > 2^{-i_1} + 2^{-i_1+1} + \cdots$ Теперь в Z определяем множество $A_{i_1 k}$ по правилу: $z = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\} \in A_{i_1 k}$, если $y_{i_1+k} \in \theta_{i_1+k}(x) \setminus \mathcal{O}_{\eta_k}(\theta(x))$, и $\varrho(y_i, y_{i+1}) \leq 2^{-i+1}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, i_1+k$, где $\eta_k = \varepsilon + 2^{-i_1-1} + 2^{-i_1-2} + \cdots + 2^{-i_1-k}$. Очевидно, опять A_{i_1+k} замкнуто в Z, $A_{i_1 k} \neq \Lambda$ и $A_{i_1 k+1} \subset A_{i_1 k}$ для каждого k и, следовательно, $\cap\{A_{i_1 k} : k = 1, 2, \ldots\} \neq \Lambda$. Но тогда, если $z = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\} \in \cap\{A_{i_1 k} : k = 1, 2, \ldots\}$, то последовательность $\{y_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ фундаментальная причем, начиная с i_1, имеем $y_i \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\theta)x))$, т. е. $y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\theta(x))$, что, конечно, является противоречием.

Тем самым интересующий нас факт установлен. Пусть теперь $U \supset \theta(x_0)$, где U открыто в Y, и пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $U \supset \mathcal{O}_\varepsilon(\theta(x_0))$. Выберем i настолько большим, чтобы $\varepsilon . 2^{-1} > 2^{-i} + 2^{-i+1} + \cdots$ и $\theta_i(x_0) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon . 2^{-1}}(\theta(x_0))$.

Определяем окрестность $\mathcal{O}(x_0)$ точки x_0 как отвечающей множеству $\mathcal{O}_{\varepsilon\cdot 2^{-1}}(\theta(x_0))$ в силу полунепрерывности сверху отображения θ_i. Тогда, если $x\in\mathcal{O}(x_0)$, то $\theta_i(x)\subset\mathcal{O}_{\varepsilon\cdot 2^{-1}}(\theta(x_0))$, и так как, очевидно, $\theta(x)\subset\mathcal{O}_{\varepsilon\cdot 2^{-1}}(\theta_i(x))$, находим $\theta(x)\subset\mathcal{O}_{\varepsilon}(\theta(x_0))$.

Пусть, наконец, точка $x\in X$ такова, что $|\theta_i(x)|\leqq n$ для сколь угодно больших i. Допустим, что $|\theta(x)|>n$, и пусть $y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^{n+1}$ — различные точки $\theta(x)$. Пусть еще $\varepsilon>0$ — такое, что $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0^k)\cap\mathcal{O}_\varepsilon(y_0^l)=\Lambda$ для $k\neq l$. Имеем $y_0^k=\lim\limits_{i\to\infty} y_i^k$, где $y_i^k\in\theta_i(x)$ для каждого $k=1, 2, \ldots, n+1$. Следовательно, найдется ν, такое, что $\varrho(y_0^k, y_i^k)<\varepsilon$ для $i>\nu$ и для каждого $k=1, 2, \ldots, n+1$. Отсюда, очевидно, получаем $|\theta_i(x)|\geqq n+1$, что противоречит условию. Лемма доказана.

Теперь, для того, чтобы из приведенных лемм извлечь доказательство импликации а) $\to$ б) теоремы 4, остается немного. Достаточно иметь в виду, что если в условиях леммы 5 пространство Y полно (а этого всегда можно добиться переходом к пополнению) и если определить отображение $\theta: X\to\mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ как в лемме 6, то будет выполнено $\theta(x)\subset\Phi(x)$ для любой точки $x\in X$. В самом деле, легко видеть, что $\theta(x)=\cap\{\Phi_i(x): i=1, 2, \ldots\}$ для каждой точки $x\in X$. Теперь уже лемма 6 завершает доказательство импликации а) $\to$ б).

Импликация б) $\to$ в) тривиальна, а для доказательства импликации в) $\to$ а) мы отсылаем читателя к работам М. Чобана [6] и Э. Майкла [17].

Отметим, что частные случаи $\tau=\tau'=\aleph_0$, $F_i=X$ для каждого i и $\tau=\tau'=\aleph_0$, $X'=X$ теоремы 4 содержат теорему о счетной сумме для размерности dim, которая утверждает, что если X — нормальное пространство и $X=\cup\{F_i: i=1, 2, \ldots\}$, где для каждого i множество F_i замкнуто в X и $\dim F_i\leq n$, то $\dim X\leq n$.

Отметим также, что в случае метризуемого X утверждение, содержащееся в импликации а) $\to$ б) теоремы 4, можно несколько усилить. Именно, справедлива

Теорема 6. *Пусть X — метризуемое пространство, Y — метрическое пространство, $\Phi: X\to\mathcal{F}(Y)$ — п. н. сн., $X'\subset X$ и $\dim X'\leqq n$. Тогда существует п. н. св. сечение $\Psi: X\to\mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ для Φ, такое, что $|\Psi(x)|\leq n+1$ для каждой точки $x\in X'$. (Здесь $\mathcal{F}(Y)$ — семейство всех непустых, полных подмножеств Y).*

Из теоремы 6 следует

Теорема 7. *Пусть X — метризуемое пространство, $w(X)\leq\tau$, $X'\subset X$ и $\dim X'\leqq n$. Тогда существуют множества $M_1\subset M_2\subset B_\tau$ и непрерывное отображение $f: M_2\to X$, такие, что* 1) *$f(M_1)=X$;* 2) *f — открыто, если его рассматривать на M_2, и замкнуто, если его рассматривать лишь на M_1;* 3) *f компактно как на M_1, так и на M_2 (значит, на M_1 отображение f совершенно);* 4) *$|f^{-1}(x)\cap M_1|\leqq n+1$ для каждой точки $x\in X'$.*

Доказательство. Существование M_2 и открытого, непрерывного отображения $f: M_2\to X$ является частным случаем одного результата А. В. Архангельского [18]. Дальше рассуждаем так: определяем многозначное отображение $\Phi: X\to\mathcal{F}_{\aleph_0}(M_2)$, полагая $\Phi(x)=f^{-1}(x)$ для каждой точки $x\in X$. Так как f открыто, то Φ — п. н. сн. Следовательно, по теореме 4 существует п. н. св. сечение $\Psi: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(M_2)$ для Φ (здесь используем паракомпактность метризуемого пространства X — см. А. Стоун [19]). Для завершения доказательства теоремы 7 остается только положить $M_1 = \Psi(X) = \cup\{\Psi(x): x \in X\}$.

В силу очевидной нульмерности (в любом смысле) метрического пространства B_τ (а, значит, и любого его подпространства), теорема 7 является обобщением и уточнением следующего результата Куратовского — Мориты [20]: любое n-мерное метризуемое пространство является совершенным, $n+1$-кратным образом нульмерного метрического.

Теорема 8. *Пусть X — нормальное, τ-точечно-τ'-паракомпактное пространство. Если X является образом метрического пространства Y веса $w(Y) < \tau$ при открытом, непрерывном отображении с прообразами точек, принадлежащими $\mathcal{F}_{\tau'}(Y)$, то пространство X метризуемо.*

Доказательство теоремы 8 можно получить тем же путем, каким было получено доказательство теоремы 7, учитывая следующую теорему Вайнштейна — Стоуна [21]: совершенный образ метризуемого пространства сам метризуем.

Частный случай $\tau = \tau' = \infty$ теоремы 8 является небольшим усилением одной теоремы Э. Майкла [22], утверждающей, что если паракомпакт X является открытым непрерывным образом полного метрического пространства, то пространство X метризуемо.

Случай же $\tau = \infty$, $\tau' = \aleph_0$ является следствием результатов П. С. Александрова [23] и А. В. Архангельского [18], причем если проводить доказательство, опираясь на [23] и [18], то пространство X можно предполагать заранее только регулярным.

Упомянутая теорема Вайнштейна — Стоуна, тот факт, что существуют неметризуемые паракомпакты с первой аксиомой счетности, и теорема В. И. Пономарева [24] о том, что любое пространство с первой аксиомой счетности является открытым, непрерывным образом метрического пространства, позволяют нам заключить, что условие полноты прообразов в теореме 8 (а, значит, и условие полноты образов в теореме 4) существенно.

Следующие две теоремы являются легкими следствиями теоремы 5.

Теорема 9. *Для любого T_1-пространства X следующие три условия равносильны:*

а) *X — τ-коллективно нормально (и $\dim X = 0$);*

б) *для любого непрерывного $f: F \to Y$, где F замкнуто в X, а Y — полное метрическое пространство веса $w(Y) \leq \tau$, существует п. н. св. (однозначное) продолжение $\bar{f}: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$;*

в) *для любого непрерывного $f: F \to Y_\tau$, где F замкнуто в X, существует п. н. св. (однозначное) продолжение.*

Теорема 10. *Пусть X — τ-коллективно нормальное пространство, Y — полное метрическое пространство веса $w(Y) \leq \tau$, F — замкнутое в X, $X' = \cup\{F_i: i = 1, 2, \ldots\}$, где для каждого i множество F_i замкнуто в X и $\dim F_i \leq n$ и $f: F \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда существует такое п. н. св. продолжение $\bar{f}: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ для f, что $|\bar{f}(x)| \leq n+1$ для каждой точки $x \in X'$.*

Следующее утверждение не является следствием изложенных теорем о сечениях. Оно легко вытекает из рассуждений Борсука — Дугунджи, приведенных последним для доказательства его обобщения [25] известной теоремы Титце о продолжении.

Предложение 1. *Пусть* X — *метризуемое пространство,* Y — *произвольное топологическое пространство,* F *замкнуто в* X, *множество* X' *замкнуто в* $X \setminus F$, $\dim X' \leq n$ *и* $f: F \to Y$ — *непрерывное отображение. Тогда для каждого натурального* i *существуют продолжения* $f_i: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ *и* $g_i: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$, *такие, что*: 1) f_i — *п. н. сн.,* а g_i — *п. н. св.*; 2) $g_i(x) \subset f_i(x) \subset g_{i-1}(x)$, $|f_1(x)| < \aleph_0$ *для каждой точки* $x \in X$ *и* $|f_1(x)| \leq n+1$ *для каждой точки* $x \in X'$; 3) f_i *и* g_i *непрерывны (и сн. и св.) в каждой точке* $x \in F$.

Очевидно, эквивалентным образом предложение 1 может быть высказано и на языке многозначных ретракций. Поэтому, применяя теорему 4 (или 5), получаем:

Теорема 11. *Пусть* X — *метризуемое пространство,* F *замкнуто в* X, X' — *подмножество* X *и* $\dim X' \leq n$. *Пусть, далее,* Y — *произвольное топологическое пространство,* $f: F \to Y$ — *непрерывное отображение. Существует тогда такое п. н. св. продолжение* $\tilde{f}: X \to \mathcal{F}_{\aleph_0}(Y)$ *для* f, *что* $|\tilde{f}(x)| \leq n+1$ *для любой точки* $x \in X'$ *и* $|\tilde{f}(x)| < \aleph_0$ *для любой точки* $x \in X$.

Примечания при корректуре:

1. На вопрос, содержащийся в замечании 3, положительный ответ дали М. Чобан и В. Вълов [26].

2. С. Недев и М. Чобан [27, 28] показали, что справедливость теоремы 5 не нарушится, если в ее условии б) опустить слова „множество $\{x \in X \mid \Phi(x) = Y\}$ открыто в X".

3. Результат Даукера из [7] (здесь лемма 2) играл важную роль в наших рассуждениях. В связи с этим отметим, что С. Недевым [28] обнаружено простое доказательство этого результата, не требующее никаких сведений из теории размерности. Там же показано, что в лемме 2 слова „локально конечное" нельзя заменить на „точечно конечное".

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Й. Недев. Четыре теоремы Э. Майкла о сечениях. *Известия Мат. Инст. БАН*, **15**, 1974, 389—393.
2. С. Й. Недев. О непрерывных сечениях. III Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, август 1973. Кишинев, 1973.
3. С. Й. Недев. Многозначные сечения многозначных отображений. *Доклады БАН*, **27**, 1974, № 6, 725—728.
4. С. Й. Недев. Метризуемые пространства как образы нульмерных метрических пространств. *Доклады БАН*, **27**, 1974, № 7, 877—885.
5. E. Michal. Continious Selections I. *Ann. Math.*, **63**, 1956, № 2, 361—382.
6. М. М. Чобан. Многозначные отображения и борелевские множества II. *Тр. Моск. мат. о-ва*, **23**, 1970, 277—301.
7. C. H. Dowker. Mapping theorems for noncompact spaces. *Amer. Journ. of Math.*, **69**, 1947, 200—242.
8. C. H. Dowker. On a theorem of Hanner. *Ark. math.*, **2**, 1952, 307—313.
9. P. S. Alexandroff. Sur les espaces de la première classe et les espaces abstraits. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **178**, 1924, 185—187.
10. J. Dieudonné. Une généralisation des espaces compacts. *J. Math. Pures et Appl.*, **23**, 1944, 65—76.

11. C. H. Dowker. On countably paracompact spaces. *Can. J. Math.*, **3**, 1951, № **2**, 219—224.
12. R. H. Bing. Metrization of topological spaces. *Can. J. Math.*, **3**, 1951, 175—186.
13. П. С. Урысон. Mémoire sur les multiplicités cantoriennes. *Fund. math.*, **7**, 1925, 30—139; **8**, 1926, 225—359.
14. T. Kandô. Characterization of topological spaces by Some Continuous Functions. *J. Math. Soc. Jap.*, **6**, 1954, 45—53.
15. П. С. Урысон. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Math. Ann.*, **94**, 1925, 309—315.
16. С. Лефшец. Алгебраическая топология. Москва, 1949.
19. E. Michael. Another note on paracompact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, 1957, No. 5.
18. А. В. Архангельский. Об отображениях метрических пространств. *Доклады АН СССР*, **145**, 1962, 245—247.
19. A. H. Stone. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, 1948, 977—982.
20. K. Morita. A condition for the metrizability of topological spaces and for n-dimensionality. *Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku. A*, **5**, 1955, 33—36.
21. A. H. Stone. Metrization of decomposition spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**, 1956, 690—700.
22. E. Michael. A theorem on semi-continuous set-valued functions. *Duke math. J.*, **26**, 1959, 4, 647—656.
23. П. С. Александров. О метризации топологических пространств. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.*, **8**, 1960, 135—140.
24. В. И. Пономарев. Аксиомы счетности и непрерывные отображения. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.*, **8**, 1960, 127—134.
25. J. Dugundji. An extension of Tietze's theorem. *Pacif. J. Math.*, **1**, 1951, 353—367.
26. М. Чобан, В. Вълов. Об одной теореме Э. Майкла о сечениях. *Доклады БАН*, **28**, 1975, № 7, 871—873.
27. С. Недев, М. Чобан. Факторизационные теоремы для многозначных отображений, многозначные сечения и топологическая размерность. *Mathematica Balkanica*, **4**, 1974, 457—460.
28. С. Недев. О двух теоремах Даукера. Математика и математическо образование, Материали от IV пролетна конференция на БМД, Перник, 1975 (в печати).

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 11. 3. 1974