Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

НЕДЮ И. ПОПИВАНОВ

В работе дается постановка некоторых краевых задач для одного класса уравнений смешанного типа. Доказывается, что для каждой правой части уравнения из L_2 эти задачи имеют одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1$.

Рассматривается уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + M(x)u_{yy} + a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + a_0(x, y)u = f(x, y), \tag{1}$$

где функции K и M — непрерывные и $yK(y) > 0$ для $y \neq 0$, $xM(x) > 0$ для $x \neq 0$. Насколько нам известно, до сих пор оно исследовано только М. М. Зайнулабидовым в [2] и О. И. Маричевым в [3]. В случае $K(y) \equiv y$, $M(x) \equiv x$, $a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv 0$, $f \equiv 0$, они рассмотрели некоторые характеристические задачи, исследуя соответствующие сингулярные интегральные уравнения.

В настоящей работе используются методы функционального анализа. Уравнение (1) рассматривается в областях, которые содержатся в $R^2 \setminus \{x < 0,\ y < 0\}$. Наиболее интересными являются те случаи, когда точка $(0, 0)$ находится на границе области. Уравнение (1) сводится к системе первого порядка, которую преобразуем к симметричному виду. В области с произвольной границей для этой системы ставится одна краевая задача. Доказывается, что эта задача имеет одно и только одно сильное решение. Полученные результаты переносятся для исходного уравнения. При этом возникают усложнения, так как матрица, при помощи которой система сведена к симметричному виду, является особой в точке $(0, 0)$. Для уравнения (1) рассматривается краевая задача, имеющая одно и только одно сильное решение $u \in W_2^1$ для каждой правой части $f \in L_2$ (теорема 3). Выведена априорная оценка вида

$$\|u\|_{W_2^1} \leq C \|Lu\|_{L_2}. \tag{*}$$

Показано, что слабое решение рассмотренной задачи не всегда является единственным.

Для уравнения (1) исследуется и другая краевая задача в области, внутри которой содержится точка $(0, 0)$. Доказывается, что для всех функций $f \in W_2^{-1}$ эта задача имеет слабое решение и выполнена оценка вида (*). Показано, что задача не имеет сильного решения даже для некоторых функций $f \in C_0^\infty$.

Некоторые из этих результатов опубликованы без доказательства в работе [6].

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 295—310.

1. Положительно-симметричные системы. Приведем некоторые результаты работы [1]. В ограниченной области $D\subset R^m$ с кусочно-гладкой границей S рассмотрим систему

$$Ku = \sum_{i=1}^{m} A^i \partial u/\partial x_i + Bu = f,\ u = (u_1, \dots, u_n),\ f = (f_1, \dots, f_n),$$

где A^i и B — $n\times n$ матрицы с кусочно-гладкими и соответственно с кусочно-непрерывными элементами. Функцию $u(x)$ будем называть кусочно-непрерывной в D, если она ограничена в D и при помощи конечного числа кусочно-гладких поверхностей D можно разбить на области, внутри которых функция непрерывна. Функцию $u(x)$ будем называть кусочно-гладкой в D, если она непрерывна в $\bar{D}$ и ее первые производные кусочно-непрерывны в D.

Введем матрицу $\varkappa = B - (\Sigma\partial A^i/\partial x_i)/2$, которая не определена в D только на конечном числе поверхностей. Если матрицы A^i симметричны и матрица $\varkappa+\varkappa'$ положительно определена в $\bar{D}$, система называется положительно-симметричной (матрицу $\varkappa+\varkappa'$ назовем положительно-определенной в $\bar{D}$ и запишем $\varkappa+\varkappa'\geq C$, если $u\,.\,(\varkappa(x)+\varkappa'(x))u\geq cu\,.\,u$ ($c=\text{const}>0$) для $x\in D$, $u\in R^n$).

Рассмотрим характеристическую матрицу $\beta=\Sigma n_i(x)A^i(x)$, где $n=(n_1, \dots, n_m)$ — единичный вектор внешней нормали к S. Предположим, что матрицу β можно представить в виде $\beta=\beta_+ +\beta_-$, причем выполнены

(2) $$\mu+\mu'>0,$$

где $\mu=(\beta_+-\beta_-)/2$, и

(3) $$\operatorname{Ker}\beta_+ + \operatorname{Ker}\beta_- = R^n,$$

где $\operatorname{Ker}\beta_\pm$ — ядро $\beta_\pm$. Тогда граничное условие $\beta_- u=0$ называется допустимым. Сопряженное условие будет $\beta'_+ v=0$. Заметим также, что $\operatorname{Ker}\beta\subset\operatorname{Ker}\beta_-$.

Рассмотрим задачу

(4) $$Ku=f \text{ в } D,\ \beta_- u=0.$$

Пусть $f\in L_2(D)$. Функция $u\in L_2(D)$ называется слабым решением задачи (4), если $(u, K^*v)=(f, v)$ для каждой кусочно-гладкой в D функции v, для которой $\beta'_+ v=0$. Функция $u\in L_2(D)$ называется сильным решением задачи (4), если существует последовательность кусочно-гладких в D функций u_k, для которых $\beta_- u_k=0$ и $\|u_k-u\|\to 0$, $\|Ku_k-f\|\to 0$ при $k\to\infty$. Выше через $(\ ,\ )$ и $\|\ \|$ мы обозначили скалярное произведение и норму в $L_2(D)$, а $K^*v=-\Sigma\partial(A^i v)/\partial x_i+B'v$. Здесь имеет место следующая

Теорема 1. *Для каждой функции $f\in L_2(D)$ существует слабое решение задачи (4). Для всех кусочно-гладких в D функций u, удовлетворяющих граничному условию $\beta_- u=0$, выполнена оценка $\|u\|\leq c\|Ku\|$,* $c=\text{const}$.

Замечание. При исследовании этих вопросов в некоторых случаях удобно использовать следующие утверждения.

1.1. Пусть A — симметричная $n\times n$ матрица с ограниченными в D элементами. Пусть она положительно определена во всех точках D, и выполнено $\det A(x) \geq c_1$ для $x \in D$ ($c_1 = \mathrm{const} > 0$). Тогда с некоторой постоянной $c > 0$ выполнено

(5) $$u \,.\, A(x)u \geq cu \,.\, u,$$

т. е. $A \geqq c$ в D.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы $A(x)$:

$$\Delta(\lambda, x) = (-\lambda)^n + \Delta_1(x)(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \Delta_{n-1}(x)(-\lambda) + \Delta_n(x).$$

Так как $\Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_{n-1}(x) > 0$, $\Delta_n(x) = \det A(x) \geqq c_1$ для $x \in D$, то можно найти такую постоянную $c > 0$, что все корни $\lambda_i(x)$ характеристического многочлена находятся в области $\lambda \geqq c$. Поскольку $u \,.\, A(x)u \geq \min\limits_i \lambda_i(x) u \,.\, u$, выполнено (5).

1.2. Во многих случаях матрицы β_+ и β_- выбираются симметричными, а формы $u \,.\, \beta_+ u$ и $u \,.\, \beta_- u$ — знакопостоянными. Тогда удобно использовать тот факт, что $\mathrm{Ker}\ \beta_\pm = \{u : u \,.\, \beta_\pm u = 0\}$.

2. Исследование системы. Пусть функции $K(y)$ и $M(x)$ — непрерывные соответственно на отрезках $H_- \leq y \leq H_+$ и $h_- \leq x \leq h_+$, с непрерывными первыми производными $K' > 0$ в $[H_-, 0]$, $[0, H_+]$ и $M' > 0$ в $[h_-, 0]$, $[0, h_+]$. Здесь $H_- < 0 < H_+$, $h_- < 0 < h_+$. Рассмотрим уравнение (1), где $a_1 \in C^1(\Pi)$, $a_2 \in C^1(\Pi)$, $a_0 \in C(\Pi)$, $\Pi = \{h_- \leq x \leq h_+,\ H_- \leq y \leqq H_+\}$. Это уравнение эллиптическое в $\{x > 0,\ y > 0\}$, $\{x < 0,\ y < 0\}$, гиперболическое в $\{x < 0,\ y > 0\}$, $\{x > 0,\ y < 0\}$ и параболическое при $x = 0$ или $y = 0$, за исключением точки $(0, 0)$, где оно первого порядка. Пусть $u \in C^2$ и $Lu = f$. Тогда функции $u_0 = u$, $u_1 = \partial_1 u$ и $u_2 = \partial_2 u$ удовлетворяют системе

(6) $$\begin{gathered} u_2 - \partial_2 u_0 = 0,\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0, \\ K\partial_1 u_1 + M\partial_2 u_2 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_0 u_0 = f, \end{gathered}$$

где $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$ Запишем эту систему в матричном виде и умножим слева на матрицу

$$E = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & Kb & a \\ 0 & -Ma & b \end{pmatrix},$$

где d, a и b — пока произвольные функции. Получаем симметричную систему

(7) $$\hat{L}u = \hat{f},$$

где $\hat{L} = A^1\partial_1 + A^2\partial_2 + B$, $u = (u_0, u_1, u_2)$, $\hat{f} = (0, af, bf)$,

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ka & Kb \\ 0 & Kb & -Ma \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 \\ 0 & -Kb & Ma \\ 0 & Ma & Mb \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ aa_0 & aa_1 & aa_2 \\ ba_0 & ba_1 & ba_2 \end{pmatrix}.$$

Будем искать правильно поставленной задачи для системы (7) в областях, содержащих характеристики уравнения (1) через точку (0, 0). Функции d, a и b выберем таким образом, чтобы система (7) была положительно-симметричной. Пусть $K'(\pm 0) = \lim\limits_{y \to \pm 0} K'(y) > 0$, $M'(\pm 0) = \lim\limits_{x \to \pm 0} M'(x) > 0$ и выполнено условие

(8) $$M'(-0)K'(-0) \leq M'(+0)K'(+0).$$

Обозначим

$$C(M, h_+)=\max_{0<x\leq h_+}|M'(x)-M'(+0)|,\quad C(M, h_-)=\max_{h_-\leq x<0}|M'(x)-M'(-0)|,$$

$$C(K, H_+)=\max_{0<y\leq H_+}|K'(y)-K'(+0)|,\quad C(K, H_-)=\max_{H_-\leq y<0}|K'(y)-K'(-0)|.$$

Тогда

$$|M(x)-M'(+0)x|\leq C(M, h_+)|x|\quad \text{для } 0\leq x\leq h_+,$$
$$|M(x)-M'(-0)x|\leq C(M, h_-)|x|\quad \text{для } h_-\leq x\leq 0,$$
$$|K(y)-K'(+0)y|\leq C(K, H_+)|y|\quad \text{для } 0\leq y\leq H_+,$$
$$|K(y)-K'(-0)y|\leq C(K, H_-)|y|\quad \text{для } H_-\leq y\leq 0.$$

Пусть числа h^0_+, h^0_-, H^0_+ и H^0_- настолько малы, что $M'(+0)>C(M, h^0_+)$, $M'(-0)>C(M, h^0_-)$, $K'(+0)>C(K, H^0_+)$, $K'(-0)>C(K, H^0_-)$. Пусть дальше $h^0_-\leq h_-<0$, $H^0_-\leq H_-<0$, $0<h_+\leq h^0_+$, $0<H_+\leq H^0_+$.

Рассмотрим характеристику уравнения (1) через $(0, 0)$. В областях $x\geq 0$, $y\leq 0$ и $x\leq 0$, $y\geq 0$ она находится целиком соответственно в

$$\left[\frac{M'(+0)+C(M,h_+)}{K'(-0)-C(K, H_-)}\right]^{1/3}x+y\geq 0 \quad\text{и}\quad \left[\frac{M'(-0)-C(M, h_-)}{K'(+0)+C(K,H_+)}\right]^{1/3}x+y\geq 0.$$

В связи с этим рассмотрим область R, составленную из трех частей: $R_1=\Pi\cap\{y<0,\ p_1x+y\geq 0\}$, $R_2=\Pi\cap\{x\leq 0,\ p_2x+y>0\}$ и $R_3=\Pi\cap\{x>0,\ y>0\}$, где

$$p_1=\left[\frac{M'(+0)+C(M, h_+)}{K'(-0)-C(K, H_-)}\right]^{1/3}+\delta_1,\quad 0\leq\delta_1\leq\delta^0_1,$$

$$p_2=\left[\frac{M'(-0)-C(M, h_-)}{K'(+0)+C(K, H_+)}\right]^{1/3}-\delta_2,\quad 0\leq\delta_2\leq\delta^0_2<\left[\frac{M'(-0)-C(M, h^0_-)}{K'(+0)+C(K, H^0_+)}\right]^{1/3},$$

а положительные постоянные δ^0_1 и δ^0_2 фиксированы. Через R^0, R^0_1, R^0_2 и R^0_3 будем обозначать области R, R_1, R_2 и R_3 при $h_-=h^0_-, \ldots, \delta_2=\delta^0_2$. Для всех областей R имеем $R\subset R^0$. Внутри R содержатся (за исключением $(0, 0)\in\partial R$) части характеристик уравнения (1) через $(0, 0)$. После исследования системы (7) мы вернемся к уравнению (1). Заметим, что, $\det E=d(Ma^2+Kb^2)$ обращается в нуль в точке $(0, 0)$. Однако в дальнейшем оказывается достаточным выбрать функции d, a и b такими, чтобы выполнялись неравенства

$$d(x, y)\geq cr, \tag{9}$$

$$Ma^2+Kb^2\geq cr, \tag{10}$$

где $r=r(x, y)=\sqrt{(x^2+y^2)}$, $c=\mathrm{const}>0$. В R^0 функции d, a и b определяем следующим образом: $b(x, y)\equiv 1$,

$$a(x, y)=\begin{cases} l_1 & \text{при } x\geq 0,\ y\leq 0,\\ l_2 & \text{при } x\leq 0,\ y>0,\\ l_2+(l_1-l_2)x/(x+y) & \text{при } x>0,\ y>0,\end{cases}\qquad d(x, y)=\begin{cases}\eta y & \text{при } x<0,\\ \eta(qx+y) & \text{при } x\geq 0,\end{cases}$$

где $\eta>0$, $\frac{1}{2}\left[\frac{K'(-0)}{M'(+0)}\right]^{1/3}\leq l_2<l_1\leq 2\left[\frac{K'(+0)}{M'(-0)}\right]^{1/3}$, $q>\left[\frac{M'(+0)+C(M, h^0_+)}{K'(-0)-C(K, H^0_-)}\right]^{1/3}+\delta^0_1$.

Постоянные η, l_1 и l_2 выберем ниже, а q фиксирована. Функция $d(x, y)$ — кусочно гладкая, и (9) выполнено в R^0. Ограниченная функция $a(x, y)$ кусочно-гладкая, кроме точки $(0, 0)$, где даже не является непрерывной. Однако в матрицах A^1 и A^2 она входит только в кусочно-гладкие выражения Ma и Ka. Элементы матрицы B кусочно-непрерывные. Рассмотрим в R^0 матрицу $\varkappa = B - (\partial_1 A^1 + \partial_2 A^2)/2$ и ее симметричную часть

$$\varkappa + \varkappa' = \begin{pmatrix} d_y & & d + a\alpha_0 \\ a\alpha_0 & K' - Ka_x + 2a\alpha_1 & \alpha_1 + a\alpha_2 - Ma_y \\ d + \alpha_0 & \alpha_1 + a\alpha_2 - Ma_y & (Ma)_x + 2\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

При некоторых предположениях матрица $\varkappa + \varkappa'$ положительно определена в R^0. Для этого достаточно доказать (см. замечание 1.2.), что с постоянной $c > 0$ всюду в $R^0 \cap \{x \neq 0,\ y \neq 0\}$ имеем

$$(11)\quad \begin{aligned} &(Ma)_x + 2\alpha_2 \geq c,\ (K' - Ka_x + 2a\alpha_1)(M'a + Ma_x + 2\alpha_2) - (\alpha_1 + a\alpha_2 - Ma_y)^2 \geq c \\ &\det(\varkappa + \varkappa') \geq c. \end{aligned}$$

В R_1^0 и R_2^0 имеем $a_x = a_y = 0$, а в R_3^0 $|Ma_x| \leq M_1(l_1 - l_2)$, $|Ma_y| \leq M_1(l_1 - l_2)$, $|Ka_x| \leq K_1(l_1 - l_2)$, где $M_1 = \sup M'$, $K_1 = \sup K'$. Поэтому если постоянная $l_1 - l_2$ достаточно мала и $|\alpha_\nu|$ $(\nu = 0, 1, 2)$ достаточно малы в R^0, первые два неравенства в (11) будут выполнены, и будем иметь

$$\det(\varkappa + \varkappa') \geq 3a_0 d_y + a_1 d^2 + a_2 d + a_3.$$

Здесь постоянные $a_0 > 0$ и a_1 можно выбрать независимо от α_ν, l_1 и l_2, а a_2 и a_3 можно сделать достаточно малыми по абсолютному значению, если $|\alpha_\nu|$ и $l_1 - l_2$ — достаточно малы. Выберем $\eta > 0$ таким образом, что $|a_1| d^2 \leq a_0 d_y$ в R^0, и фиксируем. Тогда если $|\alpha_\nu| \leq \lambda_\nu$, $\nu = 0, 1, 2$, $l_1 - l_2 < \varepsilon$ и положительные числа λ_ν и ε достаточно малы, то $\det(\varkappa + \varkappa') \geq a_0 \eta$, т. е. матрица $\varkappa + \varkappa'$ положительно-определена в $R^0 \cap \{x \neq 0,\ y \neq 0\}$.

Сейчас покажем, как можно получить (10) при дополнительном условии $l_1 - l_2 < \varepsilon$. Будем предполагать, что $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \left[\frac{K'(-0)}{M'(+0)}\right]^{1/3}$. В области R:

для $(x, y) \in R_1$ имеем $|y| \leq p_1 x$ и

$$Ma^2 + Kb^2 \geq \{l_1^2[M'(+0) - C(M, h_+)] - p_1[K'(-0) + C(K, H_-)]\}|x|;$$

для $(x, y) \in R_2$ имеем $|x| \leq y/p_2$ и

$$Ma^2 + Kb^2 \geq \{p_2[K'(+0) - C(K, H_+)] - l_2^2[M'(-0) + C(M, h_-)]\}|y|/p_2;$$

для $(x, y) \in R_3$ имеем

$$Ma^2 + Kb^2 \geq l_2^2[M'(+0) - C(M, h_+^0)]|x| + [K'(+0) - C(K, H_+^0)]|y|.$$

Поэтому неравенство (10) будет выполнено всюду в R, если

$$(12)\qquad l_1^2 > p_1 \frac{K'(-0) + C(K, H_-)}{M'(+0) - C(M, h_+)} \quad \text{и} \quad l_2^2 < p_2 \frac{K'(+0) - C(K, H_+)}{M'(-0) + C(M, h_-)}.$$

В правой части неравенств (12) при $\delta_1 = \delta_2 = 0$ стоят числа

$$(13)\qquad \frac{K'(-0) + C(K, H_-)}{M'(+0) - C(M, h_+)} \left[\frac{M'(+0) + C(M, h_+)}{K'(-0) - C(K, H_-)}\right]^{1/3}$$

$$\text{и} \quad \frac{K'(+0)-C(K,H_+)}{M'(-0)+C(M,h_-)}\left[\frac{M'(-0)-C(M,h_-)}{K'(+0)+C(K,H_+)}\right]^{1/3},$$

которые при $h_+\to 0$, $h_-\to 0$, $H_+\to 0$ и $H_-\to 0$ сходятся соответственно к

$$\left[\frac{K'(-0)}{M'(+0)}\right]^{2/3} \quad \text{и} \quad \left[\frac{K'(+0)}{M'(-0)}\right]^{2/3}. \tag{14}$$

Учитывая неравенства (8), мы имеем два случая:

2.1. Первое из чисел (14) меньше второго. Если R находится достаточно близко к точке (0, 0), первое из чисел (13) тоже будет меньше второго. Выберем l_1 и l_2 таким образом, чтобы l_1^2 и l_2^2 находились между этими двумя числами и $0<l_1-l_2<\varepsilon$. Неравенство (12) и остальные ограничения для l_1 и l_2 выполнены и для достаточно малых $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$.

2.2. Числа (14) равны. Если R находится достаточно близко к точке (0, 0), расстояние между обеими числами (13) будет меньше ε^2. Выбираем l_1 и l_2 такими, чтобы $0<l_1-l_2<\varepsilon$, и неравенства (12) выполнены при $\delta_1=\delta_2=0$. Неравенства (12) выполнены и при $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, если они достаточно малы.

Замечание. Рассмотрим случай, когда функции K и M линейные, т. е. $K(y)=K'(\pm 0)y$, если $\operatorname{sgn} y=\pm 1$, $K(0)=0$; $M(x)=M'(\pm 0)x$, если $\operatorname{sgn} x=\pm 1$, $M(0)=0$. Так как в этом случае $C(M,h_\pm)=C(K,H_\pm)=0$, числа (13) равны числам (14). Поэтому числа h_-^0, h_+^0, H_-^0 и H_+^0 можно не уменьшать, т. е. можно рассмотреть произвольно большую ограниченную область, находящуюся над характеристикой через (0, 0).

Фиксируем такую область R, для которой все сформулированное выше выполнено. Пусть область $D\subset R$ и ее граница S кусочно-гладкая. Введем на S граничную матрицу

$$\beta=n_1A^1+n_2A^2=\begin{pmatrix} -dn_2 & 0 & 0 \\ 0 & Kan_1-Kbn_2 & Kbn_1+Man_2 \\ 0 & Kbn_1+Man_2 & Mbn_2-Man_1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала те точки S, где $an_1+bn_2\neq 0$. Имеем

$$u\,.\,\beta u=-dn_2u_0^2+(an_1+bn_2)^{-1}[(Kn_1^2+Mn_2^2)(au_1+bu_2)^2$$
$$-(Kb^2+Ma^2)(n_2u_1-n_1u_2)^2].$$

Найдем две матрицы β_+ и β_-, удовлетворяющие (2) и (3). Пусть

$$u\,.\,(\beta_+-\beta_-)u=d\,|n_2|\,u_0^2+|an_1+bn_2|^{-1}[\,|Kn_1^2+Mn_2^2|\,(au_1+bu_2)^2$$
$$+(Kb^2+Ma^2)(n_2u_1-n_1u_2)^2].$$

Тогда условие (2), очевидно, выполнено. Из этого равенства и условия $\beta_++\beta_-=\beta$ матрицы β_+ и β_- выбираются однозначно, если предположим, что они симметричные. Так как для всех $u\in R^3$ имеем $u\,.\,\beta_+u\geq 0$ и $u\,.\,\beta_-u\leq 0$, то $\operatorname{Ker}\beta_\pm=\{u:u\,.\,\beta_\pm u=0\}$. Тогда, если обозначим $\varepsilon_1=\operatorname{sgn} n_2$, $\varepsilon_2=\operatorname{sgn}(Kn_1^2+Mn_2^2)$ и $\varepsilon_3=\operatorname{sgn}(an_1+bn_2)$, то

$$\operatorname{Ker}\beta_\pm=\{u:(1\mp\varepsilon_1)\varepsilon_1u_0=0,\ (1\pm\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2(au_1+bu_2)=0,\ (1\mp\varepsilon_3)(n_2u_1-n_1u_2)=0\}.$$

Отсюда следует, что условие (3) тоже выполнено. Действительно, для $u=(u_0,u_1,u_2)\in R^3$ рассмотрим систему

$$(1-\varepsilon_1)\varepsilon_1 v_0=0, \quad (1+\varepsilon_1)\varepsilon_1(u_0-v_0)=0,$$
$$(1+\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2(av_1+bv_2)=0, \ (1-\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2[a(u_1-v_1)+b(u_2-v_2)]=0,$$
$$(1-\varepsilon_3)(n_2v_1-n_1v_2)=0, \ (1+\varepsilon_3)[n_2(u_1-v_1)-n_1(u_2-v_2)]=0,$$

которая является разрешимой. Обозначим через $u_+=(v_0, v_1, v_2)$ некоторое ее решение. Тогда $u_+\in \operatorname{Ker}\beta_+$, а $u_-=u-u_+\in \operatorname{Ker}\beta_-$, т. е. (3) выполнено.

Рассмотрим те точки S, где $an_1+bn_2=0$. Определим

$$\beta_-=-n_2\begin{pmatrix}(1+\varepsilon_1)d/2 & 0 & 0\\ 0 & Kb & Kb^2a^{-1}\\ 0 & -Ma & -Mb\end{pmatrix},$$

$$\beta_+=-n_2\begin{pmatrix}(1-\varepsilon_1)d/2 & 0 & 0\\ 0 & Kb & -Ma\\ 0 & Kb^2a^{-1} & -Mb\end{pmatrix}.$$

Условия (2) и (3) выполнены.

Итак, условие $\beta_-u=0$ является допустимым. Оно имеет вид:

$$\begin{array}{lll}
 & u\sim & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1\leqq 0,\ \varepsilon_2\leqq 0,\ \varepsilon_3<0\},\\
 & u_1=0,\ u_2=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1\leqq 0,\ \varepsilon_2<0,\ \varepsilon_3>0\},\\
 & n_2u_1-n_1u_2=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1\leqq 0,\ \varepsilon_2\geqq 0,\ \varepsilon_3\geqq 0\},\\
 & au_1+bu_2=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1\leqq 0,\ \varepsilon_2>0,\ \varepsilon_3<0\},\\
(15) & u_0=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2\leqq 0,\ \varepsilon_3<0\},\\
 & u_0=0,\ u_1=0,\ u_2=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2<0,\ \varepsilon_3>0\},\\
 & u_0=0,\ n_2u_1-n_1u_2=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2\geqq 0,\ \varepsilon_3\geqq 0\},\\
 & u_0=0,\ au_1+bu_2=0 & \text{на } S\cap\{\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0,\ \varepsilon_3<0\}.
\end{array}$$

Здесь и далее через $u\sim$ обозначаем, что на соответственной части границы не задается граничных условий. Заметим, что в (15) не рассмотрен только случай $\varepsilon_2<0$, $\varepsilon_3=0$, так как из $\varepsilon_3=0$ следует $\varepsilon_2\geqq 0$. Рассмотрим следующую граничную задачу.

Задача $\hat{A}$. Найти решение системы (7) в D, удовлетворяющее (15).

Из теоремы в п. 1 следует, что для каждой функции $\hat{f}=(f_0, f_1, f_2)$, $f_i\in L_2(D)$ существует слабое решение задачи $\hat{A}$. Выполнена оценка

$$\|u\|\leq C\|\hat{L}u\| \tag{16}$$

для всех кусочно-гладких в D функций u, удовлетворяющих (15).

Докажем, что каждое слабое решение задачи $\hat{A}$ является сильным решением этой задачи. Обозначим через $S_\sim$ ту часть S, на которой $\varepsilon_1\leqq 0$, $\varepsilon_2\leqq 0$, $\varepsilon_3<0$, а через $S^*_\sim$ — ту часть S, на которой $\varepsilon_1\leqq 0$ $\varepsilon_2\leqq 0$, $\varepsilon_3>0$. Пусть $\bar{S}_\sim$ (если $S_\sim\neq\varnothing$) и $\bar{S}^*_\sim$ (если $S^*_\sim\neq\varnothing$) составлены из конечного числа дважды гладких частей, которые (если у них общие точки) пересекаются под ненулевыми углами. Дальше будем предполагать, что еслу точка $(0, 0)\in S$, то она лежит только на $S_\sim$. Заметим, что для $S_\sim$ можно взять характеристику уравнения (1) через (0, 0), для которой доказали, что находится в R. Можно взять и нехарактеристическую кривую, проходящую „под характеристикой". На $S_\sim$ не задаются граничные, а на $S^*_\sim$ — сопряженные граничные условия. Поэтому здесь применима теорема 2 из [7] о совпадении слабого и сильного решений.

Рассмотрим $S\setminus(S_{\smile}\cup S_{\smile}^{*})$. Пусть она состоит из конечного числа дважды гладких кусков, каждый из которых (включая его концы) является или свободной кривой, или характеристикой уравнения (1). Предполагаем еще, что на каждом из этих замкнутых кусков выполнено только одно из условий для ε_1, ε_2 и ε_3 в (15). При этом, если в некоторой точке $\varepsilon_1=0$, то пусть на этом куске $\varepsilon_1=0$. Для матрицы β имеем

$$\det\beta = dn_2(Ma^2+Kb^2)(Kn_1^2+Mn_2^2).$$

На тех свободных кусках $S\setminus(S_{\smile}\cup S_{\smile}^{*})$, где $n_2\neq 0$, ранг β максимальный. На тех кусках, где $n_2=0$, ранг β меньше максимального, однако сохраняется постоянным в их окрестностях. Поэтому в этих двух случаях применимы результаты Лакса, Филиппса и Пейзера о совпадении слабого и сильного решений (см. замечание к теореме 1 из [7]). Однако ранг β не сохраняется в окрестности характеристик. Рассмотрим, например, некоторую характеристику в $x>0$, $y<0$. Ее можно задать уравнением $x=\psi(y)$. После замены переменных $y_1=x-\psi(y)$, $x_1=y$, „выпрямляющей" кривую, нормальная матрица принимает вид $A^{y_1}=A^1-\psi'(y)A^2$. Тогда можно найти такие неособые матрицы H_1 и H_2, что

$$H_1A^{y_1}H_2=\operatorname{diag}(1,1,y_1). \tag{17}$$

При этом, если функция $\int\limits_0^1 M'(ty_1+\psi(x_1))\,dt$ кусочно-гладкая, элементы матриц A^1 и A^2 будут кусочно-гладкими. Достаточно предположить, что $M\in C^2$. Итак, если на $S\setminus(S_{\smile}\cup S_{\smile}^{*})$ есть характеристики, предположим дополнительно, что в каждой области $\{x>0,\ y<0\}$ и $\{x<0,\ y>0\}$ или $M\in C^2$, или $K\in C^2$ (кривая задается и уравнением $y=\varphi(x)$). Тогда можно применить теорему 1 из [7], так как граничная матрица A^{y_1} зависит только от переменной y_1, нормальной к границе — см. (17). При этом ранг A^{y_1} не сохраняется в окрестности рассматриваемой кривой — см. (17).

Рассмотрим углы на границе S. Пусть каждый кусок из $S\setminus(S_{\smile}\cup S_{\smile}^{*})$ пересекает только кусок из $S_{\smile}\cup S_{\smile}^{*}$ и угол их пересечения ненулевой и меньше π, если рассмотрим его со стороны области. Пусть такими являются и углы пересечения $S_{\smile}$ с $S_{\smile}^{*}$. Тогда критерии 1 и 2 из [8] дают нам возможность применить теорему 3 из работы [7]. Этим доказано, что каждое слабое решение задачи $\mathring{\mathrm{A}}$ является сильным. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Для каждой функции $f=(f_0,f_1,f_2)\in L_2(D)$ существует одно и только одно сильное решение задачи* $\mathring{\mathrm{A}}$.

Отметим, что функции из приближающей сильное решение последовательности имеют и такое свойство: в каждой из областей $D\cap\{x>0,\ y>0\}$, $\{D\cap\{x>0,\ y<0\}$ и $D\cap\{x<0,\ y>0\}$ они имеют непрерывные первые производные, которые можно продолжить до непрерывных функций в замкнутой оболочке каждой из трех областей. Действительно, вне окрестности точки $(0,0)$ точно такими являются элементы матриц A^1 и A^2, а в этой окрестности приближающая последовательность принадлежит C^∞.

3. Случай $a_0 \equiv 0$. В этом случае получим более сильные результаты. Рассмотрим систему из второго и третьего уравнений в (6). Записывая ее в матричном виде и умножая слева на матрицу

$$E_1 = \begin{pmatrix} Kb & a \\ -Ma & b \end{pmatrix},$$

получаем систему

$$L'u' = f', \tag{7'}$$

где $u' = (u_1, u_2)$, $f' = (af, bf)$,

$$L' \equiv \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kb & -Ma \end{pmatrix} \partial_1 + \begin{pmatrix} -Kb & Ma \\ Ma & Mb \end{pmatrix} \partial_2 + \begin{pmatrix} aa_1 & aa_2 \\ ba_1 & ba_2 \end{pmatrix}.$$

Используя те же самые функции a и b, которыемы определили в п. 2, доказываем, что система (7′) положительно-симметрична. Допустимыми для нее являются следующие граничные условия:

$$\begin{array}{lll} & u' \sim & \text{на } S \cap \{\varepsilon_2 \leq 0,\ \varepsilon_3 < 0\}, \\ & u_1 = 0,\ u_2 = 0 & \text{на } S \cap \{\varepsilon_2 < 0,\ \varepsilon_3 > 0\}, \\ (15') & n_2u_1 - n_1u_2 = 0 & \text{на } S \cap \{\varepsilon_2 \geq 0,\ \varepsilon_3 \geq 0\}, \\ & au_1 + bu_2 = 0, & \text{на } S \cap \{\varepsilon_2 > 0\ \ \varepsilon_3 < 0\}. \end{array}$$

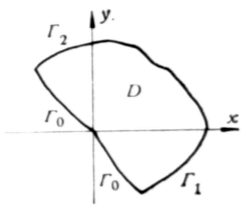
З а д а ч а A′. Найти в D решение системы (7′), удовлетворяющее (15′). Понятно, что задача A′ имеет слабое решение для каждой $f' \in L_2(D)$ и ее сильное решение единственно. Рассмотрим вопрос о существовании сильного решения. Обозначим через $\Gamma_\sim$ и $\Gamma^*_\sim$ те части S, на которых $\varepsilon_2 \leq 0$, $\varepsilon_3 < 0$, и соответственно $\varepsilon_2 \leq 0$, $\varepsilon_3 > 0$. Пусть они состоят из конечного числа однажды гладких частей, пересекающихся под ненулевыми углами. Предполагаем, что если $(0, 0) \in S$, она лежит только на $\Gamma_\sim$. Так как на $\Gamma_\sim$ не задается граничных, а на $\Gamma^*_\sim$ — сопряженных условий, для них применима теорема 2 из [7]. Таким образом, мы рассмотрели все точки, направление которых характеристическое (т. е. $\varepsilon_2 = 0$), и поэтому предположения о двукратной гладкости K или M здесь не нужны. На $S \setminus (\Gamma_\sim \cup \Gamma^*_\sim)$ остались только точки, в которых $\varepsilon_2 > 0$. Пусть она состоит из конечного числа дважды гладких кривых, не имеющих общих точек. Если в какой-либо точке на некоторой из них — $\varepsilon_3 < 0$, то предполагаем, что это так и в остальных ее точках. Пусть углы пересечения кривых из $\Gamma_\sim \cup \Gamma^*_\sim$ с $S \setminus (\Gamma_\sim \cup \Gamma^*_\sim)$ и из $\Gamma_\sim$ с $\Gamma^*_\sim$ — ненулевые и меньше π, если рассмотрим их со стороны области. Предполагаем также, что если кривая из $\Gamma_\sim$ и кривая из $\Gamma^*_\sim$ пересекаются, одна из них является дважды гладкой. Имеет место

Т е о р е м а 3. *Для каждой функции* $f' \in L_2(D)$ *существует одно и только одно сильное решение задачи* A′.

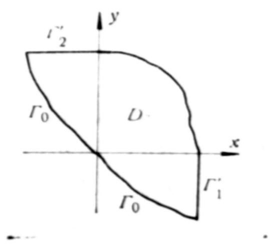
Очевидно, условия теоремы 3 выполнены для многих областей, для которых теорема 2 неприменима. При этом наиболее интересными являются те из них, у которых точка $(0, 0) \in S$. Рассмотрим

П р и м е р 1. Пусть граница области $S = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Здесь Γ_0 — кусок характеристики уравнения (1), проходящий через (0, 0), а Γ_1 и Γ_2 — характеристики вида $|K|^{1/2}n_1 + |M|^{1/2}n_2 = 0$. Они выходят из конечных точек

Γ_0 и продолжают до своего пересечения с прямыми $y=0$ и $x=0$ соответственно. Дважды гладкая кривая Γ_3 находится в области $\{x>0,\ y>0\}$, и на ней $an_1+bn_2\geqq 0$. Пусть $n_2>0$ в точке $\Gamma_1\cap\Gamma_3$ и $n_1>0$ в точке $\Gamma_2\cap\Gamma_3$ (см. фиг. 1). Тогда все предположения теоремы 3 выполнены.



Фиг.



Фиг. 2

Условия (15′) в этом случае имеют вид $u'\sim$ на Γ_0, $n_2u_1-n_1u_2=0$ на $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$.

Действительно, на Γ_0 имеем $\varepsilon_3<0$. На Γ_1 имеем $n_1>0$ и $n_2<0$, кроме $y=0$, где $n_2=0$. Тогда

$$|M|^{1/2}(an_1+bn_2)=n_1(a|M|^{1/2}-b|K|^{1/2})>0,$$

так как здесь $Ma^2+Kb^2>0$. На Γ_2 имеем $\varepsilon_3>0$, а на Γ_3 $\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_3\geqq 0$ Сопряженные граничные условия на $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ не задаются.

Пример 2. Пусть $S=\Gamma_0\cup\Gamma_1'\cup\Gamma_2''\cup\Gamma_3$, где Γ_1'' и Γ_2'' соответственно вертикальный и горизонтальный отрезок из конечных точек Γ_0 до пересечения с прямыми $y=0$ и $x=0$ (см. фиг. 2). На $\Gamma_1'\cup\Gamma_2''$ $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_3>0$ и условия (15′) здесь имеют вид

$$u'\sim \text{ на } \Gamma_0;\ u_1=0,\ u_2=0 \text{ на } \Gamma_1''\cup\Gamma_2'';\ n_2u_1-n_1u_2=0 \text{ на } \Gamma_3.$$

Сопряженные условия на $\Gamma_1''\cup\Gamma_2''$ не задаются. Эта задача тоже имеет одно и только одно сильное решение.

4. Исследование уравнения. Рассмотрим область D с границей $S=S_\sim\cup S_0\cup S_{00}$, где на $S_\sim$ $\varepsilon_1\leqq 0$, $\varepsilon_2\leqq 0$, $\varepsilon_3<0$, на S_0 $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_3\geqq 0$ и на S_{00} $\varepsilon_2<0$, $\varepsilon_3>0$. Исследуем такую задачу, аналогичную задачам $\hat{\text{A}}$ и A′:

Задача A. Найти в D решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u\sim \text{ на } S_\sim,\ u=0 \text{ на } S_0,\ u=\frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } S_{00}. \tag{18}$$

Заметим, что в двух из рассмотренных в п. 3 примеров условия имеют вид

$$u\sim \text{ на } \Gamma_0,\ u=0 \text{ на } \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3,$$

$$u\sim \text{ на } \Gamma_0,\ u=0 \text{ на } \Gamma_3,\ u=\frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } \Gamma_1''\cup\Gamma_2''.$$

Сопряженные к (18) граничные условия следующие: $v\sim$ на S_{00} и на характеристических частях S_0, $v=0$ на нехарактеристических частях S_0,

$v=\partial v/\partial n=0$ на нехарактеристических частях $S_{\smile}$, а на характеристических частях $S_{\smile}$ условия имеют более сложный вид ([4], 91). Обозначим через W^2 и W^2_* замыкание в $W^2_2(D)$ множества функций из $C^2(\bar{D})$, удовлетворяющих соответственно условиям (18) и сопряженным к ним.

Пусть $f\in W_2^{-1}(D)$. Функция $u\in L_2(D)$ называется слабым решением задачи A, если $(u, L^*v)_0=(f, v)_0$ для всех $v\in W^2_*$.

Пусть $f\in L_2(D)$. Функция $u\in L_2(D)$ называется сильным решением задачи A, если существует последовательность таких функций $u_k\in W^2$, что

$$\|u_k-u\|_0\to 0 \text{ и } \|Lu_k-f\|_0\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Здесь и далее через $(\ ,\ )_0$ и $\|\ \|_l$ обозначаем скалярное произведение в $L_2(D)$ и норму в пространстве Соболева $W^l_2(D)$, а оператор L^* является формально сопряженным к L.

Если $u\in C^2(\bar{D})\cap W^2$, функция $\hat{u}=(u, \partial_1 u, \partial_2 u)$ удовлетворяет условиям (15), и из оценки (16) получаем

$$(19)\qquad \|u\|_1\le c\|Lu\|_0,\quad \forall u\in W^2,\ c=\text{const}.$$

Из этой оценки вытекает, что сильное решение задачи A единственно, и если существует, оно принадлежит $W^1_2(D)$.

Дальше предполагаем, что $\bar{D}=\{x_1\le x\le x_2,\ y_-(x)\le y\le y_+(x)\}$, где функция $y_+(x)$ — кусочно-гладкая, кроме точек x_1 и x_2, где возможно $y'_+\to\infty$. (В самом деле из предположений теоремы 1 вытекает, что вид у $\bar{D}$ такой.) Заметим, что границы могут иметь и вертикальные участки, т. е. функция $y_-(x)$ может быть не непрерывной в некоторых точках, а может быть и $y_-(x_1)<y_+(x_1)$, $y_-(x_2)<y_+(x_2)$. Тогда имеет место

Теорема 4. *Пусть область D удовлетворяет условиям теоремы 2, или теоремы 3 для $a_0\equiv 0$. Пусть кривые из $S_{\smile}$ образуют связную часть границы. Тогда для каждой функции $f\in L_2(D)$ существует одно и только одно сильное решение $u\in W^1_2(D)$ задачи A. Каждая функция из приближающей последовательности аннулируется в окрестности S_{00}.*

Доказательство. Пусть $f\in L_2(D)$. Если условия теоремы 2 выполнены, рассматриваем функцию $\hat{f}=(0, af, bf)$. Из теоремы 2 следует, что существуют функции u_0, u_1 и u_2 из $L_2(D)$ и кусочно-гладкие в D функции u_{0k}, u_{1k}, u_{2k} $(k=1, 2, \ldots)$, имеющие дополнительные свойства, описанные в конце п. 2, так что при $k\to\infty$

$$(20)\qquad \|u_{0k}-u_0\|_0\to 0,$$

$$(21)\qquad \|u_{1k}-u_1\|_0\to 0,\quad \|u_{2k}-u_2\|_0\to 0,$$

$$(22)\qquad \left\|\begin{pmatrix} d & 0 & 0\\ 0 & Kb & a\\ 0 & Ma & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2k}-\partial_2 u_{0k}\\ \partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k}\\ K\partial_1 u_{1k}+M\partial_2 u_{2k}+\sum a_i u_{ik}-f\end{pmatrix}\right\|\to 0.$$

Кроме того, выполнено

$$(23)\qquad n_2 u_{1k}-n_1 u_{2k}=0 \text{ на } S_0;\ u_{1k}=0,\ u_{2k}=0 \text{ на } S_{00}$$

$$(24)\qquad u_{0k}=0 \text{ на } S_0^+=S_0\cap\{\varepsilon_1>0\} \text{ и на } S_{00}^+=S_{00}\cap\{\varepsilon_1>0\}.$$

Из (22) при помощи (9) и (10) получаем: при $k\to\infty$

$$\| r(u_{2k}-\partial_2 u_{0k}) \|_0 \to 0, \tag{25}$$

$$\| r(\partial_1 u_{2k}-\partial_2 u_{1k}) \|_0 \to 0, \ \| K_1\partial_1 u_{1k}+M\partial_2 u_{2k}+\sum a_i u_{ik}-f \|_0 \to 0. \tag{26}$$

Если условия теоремы 3 выполнены, рассматриваем функцию $f' = (af, bf)$. Из теоремы 3 следует, что можно найти такие функции u_1, u_2, u_{1k}, u_{2k} (см. выше), для которых выполнены (21), (23) и (26) (здесь $a_0 = 0$).

В обоих случаях поступаем следющим образом. Для $(x, y) \in \bar{D}$ определяем

$$\psi_k(x, y) = \int\limits_{y_+(x)}^{y} u_{2k}(x, t)\, dt.$$

Докажем, что функции ψ_k сходятся в $W_2^1(D)$.

Основная лемма. *Пусть функции $v_k \in L_2(D)$ $(k = 1, 2, \dots)$ и $\| rv_k \|_0 \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда $\| \int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x, t)\, dt \|_0 \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая. Если точка $(0, 0) \notin S$, доказательство леммы кончается применением неравенства Коши — Буняковского. Пусть точка $(0, 0) \in S$ (т. е. $y_-(0) = 0$) и $0 \neq x \in (x_1, x_2)$. Тогда

$$\int\limits_{y_-(x)}^{y_+(x)} [\int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x, t)\, dt]^2\, dy = -y_-(x)\, [\int\limits_{y_+(x)}^{y_-(x)} v_k(x, t)\, dt]^2$$

$$-2\int\limits_{y_-}^{y_+} y v_k(x, y)\, [\int\limits_{y_+}^{y} v_k(x, t)\, dt]\, dy \leq |y_-(x)| \int\limits_{y_-}^{y_+} \frac{dt}{x^2+t^2} \int\limits_{y_-}^{y_+} (rv_k)^2\, dt$$

$$+ 2\{\int\limits_{y_-}^{y_+} (rv_k)^2\, dy\}^{1/2} \{\int\limits_{y_-}^{y_+} [\int\limits_{y_+}^{y} v_k(x, t)\, dt]^2\, dy\}^{1/2}.$$

Однако

$$|y_-(x)| \int\limits_{y_-}^{y_+} \frac{dt}{x^2+t^2} = \left|\frac{y_-(x)}{x}\right| [\operatorname{arctg} \frac{y_+(x)}{|x|} - \operatorname{arctg} \frac{y_-(x)}{|x|}] \leq c,$$

где постоянная c не зависит от x, так как $D \subset R$ и односторонние производные функции $y_-(x)$ справа и слева в точке $x = 0$ ограничены. Следовательно,

$$\| \int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x, t)\, dt \|_0^2 \leq c \| rv_k \|_0^2 + 2 \| rv_k \|_0 \| \int\limits_{y_+(x)}^{y} v_k(x, t)\, dt \|_0.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Из (25) и основной леммы следует, что можно найти функцию $\psi \in L_2(D)$, для которой $\|\psi_k - \psi\|_0 \to 0$ при $k\to\infty$. Естественно, при условиях теоремы 2 получаем $\psi \equiv u_0$. Действительно, из (24) имеем

$$\psi_k(x, y) - u_{0k}(x, y) = \int\limits_{y_+}^{y} [u_{2k}(x, t) - \partial_2 u_{0k}(x, t)],$$

т. е. из основной леммы следует $\|\psi_k - u_{0k}\|_0 \to 0$ при $k\to\infty$. Снова применяя основную лемму, из (23) получаем

$$\partial_1\psi_k - u_{1k} = \int\limits_{y_+}^{y} [\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}]\,dt \to 0 \text{ в } L_2(D) \text{ при } k\to\infty. \tag{27}$$

Так как выполнено и $\partial_2\psi_k = u_{2k}$, то $\psi \in W_2^1(D)$ и $\partial_1\psi = u_1$, $\partial_2\psi = u_2$. Однако $\psi_k = 0$ на $S_0^+ \cup S_{00}^+$, и поэтому $\psi = 0$ в $L_2(S_0^+ \cup S_{00}^+)$. Вводя на кривой $S\diagdown(S_0^+ \cup S_{00}^+ \cup S_\smile)$ параметр s, из (23) и (27) получаем

$$\frac{d\psi_k}{ds}(x, y) = u_{2k}(x, y)\frac{dy}{ds} + u_{1k}(x, y)\frac{dx}{ds}$$

$$+\frac{dx}{ds}\int\limits_{y_+}^{y} [\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}]\,dt = \frac{dx}{ds}\int\limits_{y_+}^{y} [\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}]\,dt.$$

Заметим, что начиная с точки $(x_1, y_+(x_1))$ или $(x_2, y_+(x_2))$ и двигаясь только по кривой $S\diagdown(S_0^+ \cup S_{00}^+ \cup S_\smile)$, можно достичь каждой ее точки Так как $\psi_k(x_1, y_+(x_1)) = 0$, $\psi_k(x_2, y_+(x_2)) = 0$, отсюда следует

$$|\psi_k| \le c\,\|\partial_1 u_{2k} - \partial_2 u_{1k}\|_{L_2(D_1)},$$

где точка $(0, 0) \notin \bar{D}_1$, так как $(0, 0) \notin S\diagdown S_\smile$. Следовательно $\psi_k \rightrightarrows 0$. Таким образом, мы доказали, что $\psi_k \to 0$ в $L_2(S_0 \cup S_{00})$, т. е. $\psi = 0$ в $L_2(S_0 \cup S_{00})$

Докажем, что функция ψ является слабым решением задачи А. Пусть $v \in C^2(\bar{D}) \cap W_*^2$ и аннулируется в некоторой окрестности $S_\smile$. Тогда

$$(\psi_k, L^*v)_0 - (f, v)_0 = (\psi_k, Kv_{xx} + Mv_{yy} - \partial_1(a_1 v) - \partial_2(a_2 v) + a_0 v)_0$$

$$-(f, v)_0 = (K\partial_1 u_{1k} + M\partial_2 u_{2k} + \sum a_i u_{ik} - f, v)_0$$

$$+(K[u_{1k} - \partial_1\psi_k], \partial_1 v)_0 + (a_1[\partial_1\psi_k - u_{1k}], v) + (a_0[\psi_k - u_{0k}], v)_0$$

$$+\int\limits_S \psi_k[Kn_1\partial_1 v + Mn_2\partial_2 v - a_1 n_1 v - a_2 n_2 v]\,ds - \int\limits_S [Kn_1 u_{1k} + Mn_2 u_{2k}]\,v\,ds.$$

Рассмотрим последний интеграл. На S_{00} $u_{1k} = 0$, $u_{2k} = 0$. На $S_\smile$ и на нехарактеристических частях S_0 $v = 0$, а на характеристических частях S_0 $n_2 u_{1k} - n_1 u_{2k} = 0$, и поэтому $Kn_1 u_{1k} + Mn_2 u_{2k} = 0$. Следовательно, этот интеграл равен нулю. В правой стороне равенства остальные выражения сходятся к нулю. Следовательно, $(\psi, L^*v)_0 = (f, v)_0$. Это равенство выполнено и для каждой функции $v \in W_*^2$, которая аннулируется в окрестности $S_\smile$.

Теорема 4 будет доказана, если установим, что ψ является сильным решением задачи A. Заметим, что $\psi \in W_2^1(D)$ и $\psi = 0$ на $S_0 \cup S_{00}$. Поэтому, используя разбиение единицы, задачу можно локализировать. Из теорем 2 и 3 видно, какое разбиение следует выбрать. Граничные условия на S_- не задаются, поэтому достаточно, что равенство $(\psi, L^*v)_0 = (f, v)_0$ мы доказали только для тех v, которые аннулируются в окрестности границы. На S_{00} и на характеристических частях S_0 не задаются сопряженные граничные условия. Поэтому здесь каждая функция из приближающей сильное решение последовательности аннулируется в окрестности границы. Во всех этих случаях выбираем последовательности как в [8] при системах первого порядка. На нехарактеристических частях S_0 и на углах, где есть такие части, усредняем только тангенциально к ним [5]. После переброски производных на $\psi \in W_2^1$, доказательство сходимости $\| Lu_k - f \|_0 \to 0$ при $k \to \infty$ сводится к аналогичному в случае системы первого порядка. Теорема 4 доказана.

5. Другие краевые задачи. Используя результаты из п. 4, исследуем такую задачу.

З а д а ч а A*. Найти в D решение уравнения $L^*v = g$, удовлетворяющее условиям, сопряженным к условиям (18).

Отметим, что из оценки (19) получаем, что для каждой функции $g \in W_2^{-1}(D)$ существует слабое решение задачи A*. Из теоремы 3 следует, что слабое решение задачи A* единственно, так что имеет место

Т е о р е м а 5. *При предположениях теоремы 4, задача* A* *имеет одно и только одно слабое решение для каждой функции* $g \in W_2^{-1}(D)$.

Рассмотрим вопрос об единственности слабого решения задачи A. Он является эквивалентным вопросу о существовании сильного решения задачи A* для каждой функции $g \in L_2(D)$. Однако такое не всегда существует. Для простоты предположим, что выполнена оценка

$$\| u \|_1 \leq C \| L^*u \|_0, \quad \forall u \in W^2. \tag{28}$$

Она имеет место, если $|a_1|$, $|a_2|$ и $|a_0 - \partial_1 a_1 - \partial_2 a_2|$ достаточно малы в D. Возьмем функцию $u_0 \in C^2(\bar{D}) \cap W^2$ и обозначим $g_0 = L^*u_0$. Тогда если допустим, что задача A* имеет сильное решение для каждой $g \in L_2(D)$, существует сильное решение v_0 и для $g = g_0$. Пусть на S_0 нет характеристик и $S_{00} = \emptyset$. Тогда $W_*^2 \subset W^2$ и, следовательно, v_0 является сильным решением задачи A для оператора L^*. Из (28) следует, что такое сильное решение только одно, т. е. $v_0 \equiv u_0$. Однако функция u_0 произвольна на S_- вне окрестности S_0. Поэтому если $S_- \neq \emptyset$, в общем случае u_0 не является даже слабым решением задачи A*.

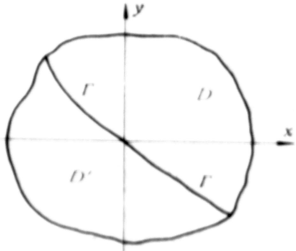


Рис. 3

Может быть, в некоторых случаях задача A* имеет сильное решение для каждой функции $g \in L_2(D)$, т. е. слабое решение задачи A единственно. Мы предполагаем, что это так в рассмотренных в п. 3 примерах.

Рассмотрим другую граничную задачу. Пусть вид области, как на рис. 3. Здесь характеристика Γ уравнения (1) через $(0, 0)$ является общей границей областей D и D'. Пусть в (8) выполнено равенство. Тогда, как и в п. 2, можно найти область

$$R' = \Pi \cap [\{x \leq 0,\ y \leq 0\} \cup \{y \geq 0,\ p_1' x + y \leq 0\} \cup \{x \geq 0,\ p_2' x + y \leq 0\}],$$

которая содержит Γ, и в ней выполнено: $\varkappa_1 + \varkappa_1' \geq c > 0$, $Ma_1^2 + Kb_1^2 \leq -cr$, $d_1 \leq -cr$. Здесь $\varkappa_1$, $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ и d_1 соответствуют $\varkappa$, a, b и d из п. 2. Выбор функций a_1, b_1 и d_1 в R' аналогичен выбору a, b и d в R. Пусть область $D' \subset R'$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial D' = \Gamma \cup S_0' \cup S_{00}'$, где на S_0' $\varepsilon_2 \leq 0$, $\varepsilon_3 \leq 0$, а на S_{00}' $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_3 < 0$. Пусть граница области D $\Gamma \cup S_0 \cup S_{00}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.

Задача В. Найти в $G = D \cup D' \cup \Gamma$ решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

(29) $$u = 0 \text{ на } S_0 \cup S_0',\ u = \partial u / \partial n = 0 \text{ на } S_{00} \cup S_{00}'.$$

Так же, как мы получили оценку (19) для области D, можно получить ее соответствующую оценку для области D'. Из этих двух оценок следует, что

(30) $$\| u \|_{W_2^1(G)} \leq c \| Lu \|_{L_2(G)},$$

для всех $u \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих (29), т. е. сильное решение задачи В единственно, и если существует, оно принадлежит $W_2^1(G)$. Однако из этого можно доказать, что не для всех $f \in L_2(G)$ существует сильное решение задачи В. Допустим противное и рассмотрим функцию $u_0 \in C^2(D) \cap W^2$. Определим $f_0 = Lu_0$ в D и $f_0 = 0$ в D'. Согласно предположению существует сильное решение u задачи В для $f = f_0$. Его рестрикции на D и D' будут сильными решениями соответствующих задач. Для них имеем теоремы единственности. Следовательно, $u = u_0$ в D, $u = 0$ в D'. Выбирая u_0 таким образом, чтобы $u \notin W_2^1(G)$, мы пришли бы к противоречию с допущенным. Понятно, почему получился такой результат: мы можем решить обе задачи в D и D' самостоятельно. Из рассмотренного примера и из оценки (30) следует, что в каждой совокупности, всюду плотной в $L_2(G)$, например C_0^∞, существует элемент, для которого задача В не имеет сильного решения.

В некоторых случаях существует слабое решение задачи В для всех $f \in W_2^{-1}(G)$. Пусть $S_{00} \cup S_{00}' = \varnothing$ и на границе ∂G нет характеристик. Предположим, что выполнена оценка (28) и ее соответствующая оценка для области D'. Утверждение следует из оценки

$$\| v \|_{W_2^1(G)} \leq c \| L^* v \|_{L_2(G)},\ \forall v \in W_2^2(G),\ v = 0 \text{ на } \partial G.$$

В этой работе рассматривались краевые задачи для неоднородного уравнения при однородных граничных условиях. Краевые задачи при неоднородных граничных условиях сводятся к уже рассмотренным.

Краевые задачи для уравнения (1) можно рассмотреть и в неограниченных областях. Этот вопрос будем исследовать в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**, 1958, 333—418.
2. М. М. Зайнулабидов. Краевая задача для уравнений смешанного типа с двумя пересекающимися линиями вырождения. *Дифф. уравнения*, **6**, 1970, 99—108.
3. О. И. Маричев. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. *Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. н.*, 1970, 21—29.
4. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
5. Н. Г. Сорокина. К обобщенной разрешимости граничных задач для уравнений смешанного типа Чаплыгина и Лаврентьева — Бицадзе. Диссертация. Киев, 1971.
6. Н. И. Попиванов. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями параболического вырождения. *Доклады БАН*, **25**, 1972, 441—444.
7. Н. И. Попиванов. О совпадении слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка. *Доклады БАН*, **26**, 1973, 1147—1151.
8. Н. И. Попиванов. Совпадение слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка. *Сердика*, **1**, 1975, № 2, с. 121—128.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 25. 3. 1974