Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРИВИЗНЫ

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРААТОПРАКЛИЕВА

Исследуются бесконечно малые изгибания первого порядка некоторых поверхностей вращения смешанной кривизны с двумя параболическими краями или с одним параболическим краем и с одной конической точкой. Показана жесткость по отношению к бесконечно малым изгибаниям скольжения некоторых поверхностей вращения.

1. Первый результат о существовании жестких открытых поверхностей принадлежит Г. Либману [1] и относится к выпуклым поверхностям вращения, меридиан которых во всех внутренних точках имеет отрицательную кривизну k и касательные в его концах перпендикулярны к оси вращения. Позже Е. Рембс [2] доказал жесткость общих выпуклых поверхностей, окаймленных плоскими параболическими кривыми (вдоль них гауссова кривизна K поверхности равна нулю), плоскости которых являются касательными к поверхности. Скоро после этого Е. Рембс [3] исследовал вопрос о бесконечно малых (б. м.) изгибаниях поверхностей вращения отрицательной кривизны с параболическими краями, меридиан которых отстоит на расстоянии a от оси вращения. При изменении параметра a получается множество поверхностей Σ. Он доказал существование как жестких, так и нежестких поверхностей в множестве Σ, если меридиан имеет всюду положительную кривизну и его касательные в концах перпендикулярны к оси вращения. При этом подмножество поверхностей из Σ, допускающих б. м. изгибание первого порядка — счетное.

Исследование б. м. изгибания поверхностей вращения отрицательной кривизны с одним параболическим краем, плоскость которого касательна к поверхности, и при некоторых условиях, наложенных или на поле изгибания на другом краю, или на поверхности, проводил В. С. Люкшин [4, 5].

В настоящей статье исследуется вопрос о б. м. изгибаниях первого порядка некоторых поверхностей вращения смешанной кривизны в случае, когда они имеют два параболических края, плоскости которых касательны к поверхности, а также в случае, когда они имеют один параболический край, плоскость которого касательна к поверхности, и одну коническую точку. Показана еще жесткость некоторых поверхностей вращения по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль подходящей параллели.

Замечание 1. Г. Либман [1] предполагает, что поверхность и поле б. м. изгибания аналитические (положение вполне естественное для того времени), но из доказательства видно, что теорема верна, если поверхность принадлежит классу C^3, а поле б. м. изгибания — классу C^1 [6].

Замечание 2. Е. Рембс [2] предполагает, что поверхность и поле б. м. изгибания принадлежат классу C^3, кривизна поверхности положительна во внутренних точках, каждая граничная кривая имеет положительную кривизну и поверхность имеет прикосновение первого порядка

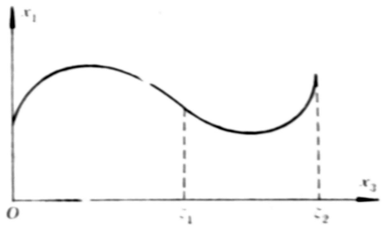

Рис. 1

с плоскостью каждой граничной кривой. В работе [7] результат Е. Рембса получен при более слабых предположениях.

2. Рассмотрим в плоскости x_3Ox_1 кривую

$$c_a = \begin{cases} x_3 = \zeta(u), \\ x_1 = -\bar{r}(u),\ 0 \le u \le u_2 \ (u \text{ — длина дуги}), \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\bar{r}(u) = r(u) + a$, $a = \text{const}$, $a > 0$; 2) функции $\zeta(u)$, $r(u) \in C^2[0, u_2]$; 3) $\zeta(0) = 0$, $\zeta(u) > 0$ в $(0, u_2]$, $\zeta' = u^m f(u)$, $m \ge 1$, $f(0) \ne 0$, $\zeta'(u) \ne 0$ в $(0, u_2)$; 4) $\min\limits_{0 \le u \le u_2} r(u) = 0$, $f(u) = (u_2 - u)^{m_1} f_1(u)$, $m_1 \ge 1$, $f_1(u_2) \ne 0$; 5) кривизна $k(u) = \zeta' r'' - r' \zeta'' \le 0$ в $[0, u_1]$, $0 < u_1 < u_2$; 6) $k(u) > 0$ в (u_1, u_2); 7) $\bar{r}(u)$ и $f_1(u)$ аналитические в окрестности краев $u = 0$ и $u = u_2$. (Отметим, что $\zeta'^2(u) + \bar{r}'^2(u) = 1$ в $[0, u_2]$ и $\zeta'(u) > 0$ в $(0, u_2)$.)

При вращении линии c_a (см. рис. 1) вокруг оси Ox_3 получаем двусвязную поверхность

$$S_a : x(u, v) = \zeta(u) \cdot \mathbf{e} + \bar{r}(u) \cdot \mathbf{a}(v),\ 0 \le u \le u_2,\ 0 \le v \le 2\pi, \tag{2}$$

с параболическими краями $u = 0$ и $u = u_2$, плоскости которых касательны к ней. В (2) вектор $\mathbf{e}$ — единичный, направленный по оси вращения Ox_3, а $\mathbf{a}(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к оси Ox_3 и повернутый на угол v от оси Ox_1. Пусть поле

$$z(u, v) = \alpha(u, v) \cdot \mathbf{e} + \beta(u, v) \cdot \mathbf{a}(v) + \gamma(u, v) \cdot \mathbf{a}'(v) \tag{3}$$

б. м. изгибания поверхности S_a принадлежит классу C^1. Тогда, как известно, поле $z(u, v)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered} \alpha_u \zeta_u + \bar{r}_u \beta_u = 0, \\ \alpha_v \zeta_u + \bar{r}_u \beta_v + \bar{r} \gamma_u - \gamma \bar{r}_u = 0, \\ \beta + \gamma_v = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Разложим функции $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ в ряды Фурье

$$
\begin{aligned}
&\alpha(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n1}(u)\cos nv + \varphi_{n2}(u)\sin nv],\\
(5)\qquad &\beta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty}[\chi_{n1}(u)\cos nv + \chi_{n2}(u)\sin nv],\\
&\gamma(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty}[\psi_{n1}(u)\cos nv + \psi_{n2}(u)\sin nv].
\end{aligned}
$$

Умножая уравнения (4) соответственно на $\cos nv$, $\sin nv$ и интегрируя относительно v от нуля до 2π, получаем для коэффициентов Фурье [6] функций $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ и $\gamma(u, v)$ систему

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{r}'\chi'_{n1} + \zeta'\varphi'_{n1} = 0, \quad \chi_{n2} - n\psi_{n1} = 0,\\
&\bar{r}'\chi'_{n2} + \zeta'\varphi'_{n2} = 0, \quad \chi_{n1} + n\psi_{n2} = 0,\\
&-n\bar{r}'\chi_{n1} + \bar{r}\psi'_{n2} - n\zeta'\varphi_{n1} - \bar{r}'\psi_{n2} = 0,\\
&n\bar{r}'\chi_{n2} + \bar{r}\psi'_{n1} + n\zeta'\varphi_{n2} - \bar{r}'\psi_{n1} = 0.
\end{aligned}
$$

Исключая из (6) функции $\psi_{n1}(u)$ и $\psi_{n2}(u)$, имеем

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{r}'\chi'_{ni} + \zeta'\varphi'_{ni} = 0,\\
&\bar{r}'(n^2-1)\chi_{ni} + \bar{r}\chi'_{ni} + n^2\zeta'\varphi_{ni} = 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Из (7_2) видно, что $\chi_{ni}(u) \in C^2$ в $[0, u_2]$. Дифференцируя (7_2) и выключая при помощи (7) функцию $\varphi_{ni}(u)$, получаем для $\chi_{ni}(u)$ уравнение

$$
(8)\qquad \zeta'(u)\,\bar{r}(u)\chi''_{ni} - \zeta''(u)\bar{r}(u)\chi'_{ni} + (n^2-1)k(u)\chi_{ni} = 0, \quad i = 1, 2,\ u \in [0, u_2].
$$

Известно, что каждый регулярный, не исчезающий тождественно интеграл $\chi_n(u)$, $n \geq 2$, (индекс i будем опускать) в $[0, u_2]$ уравнения (8) дает нетривиальное б. м. изгибание $z_n(u, v)$ поверхности [8].

В интервале $(0, u_2)$ уравнение (8) имеет самосопряженную форму

$$
(9)\qquad \left(\frac{1}{\zeta'}\chi'_n\right)' + (n^2-1)\frac{k}{\bar{r}''\zeta'^2}\chi_n = 0.
$$

Заменой независимой переменной u на ζ уравнение (9) принимает вид

$$
(10)\qquad \chi''_n(\zeta) + (n^2-1)\frac{\bar{r}(\zeta)}{\bar{r}(\zeta)}\chi_n(\zeta) = 0, \quad 0 < \zeta < \zeta_2 = \zeta(u_2).
$$

Поскольку в интервале $(0, \zeta_1 = \zeta(u_1))$ $\bar{r}''(\zeta) \leq 0$, то графика каждого решения $\chi_n(\zeta)$ уравнения (10) обращена выпуклостью к оси Ox_3. Следовательно, в интервале $(0, u_1)$ ни одно решение уравнения (8) не может колебаться и не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Из (10) следует, что решения $\chi_n(u)$ уравнения (8) в интервале (ζ_1, ζ_2) в общем колеблющиеся, так как там $\bar{r}''(\zeta) > 0$.

Точки $u = 0$ и $u = u_2$ особые для ураанения (8). В окрестности $u = 0$ и $u = u_2$ уравнение (8) имеет соответственно вид

$$
(8')\qquad u^{m-1}[urf\chi''_n - r(mf + uf')\chi'_n + (n^2-1)(ufr'' - mr'f - ur'f')\chi_n] = 0,
$$

$$(8'')\qquad (u_2-u)^{m_1-1}\{(u_2-u)\bar{r}f_2\chi_n''-\bar{r}\,[m_1 f_2+(u_2-u)f_2']\,\chi_n'$$
$$+(n^2-1)[(u_2-u)f_2\bar{r}''-m_1\bar{r}'f_2-(u_2-u)\bar{r}'f_2']\chi_n\}=0,$$

где $f_2=u^m f_1(u)$. Из (8′) и (8″) видно, что уравнение (8) является классом Фукса. Так как функции $f_1(u)$ и $\bar{r}(u)$ в окрестности $u=0$ и $u=u_2$ аналитические, то можно применить аналитическую теорию этих уравнений [9]. Из этой теории следует, что в окрестности $u=0$ и $u=u_2$ уравнение (8) имеет соответственно следующие пары линейно независимых решений:

$$(11)\qquad \chi_{n,1}=u^{m+1}P_1(u),\ \ P_1(0)\neq 0,$$

$$(12)\qquad \chi_{n,2}=Au^{m+1}P_1(u)\ln u+P_2(u),\ \ P_2(0)\neq 0;$$

$$(13)\qquad \chi_{n,1}=(u_2-u)^{m_1+1}Q_1(u),\ \ Q_1(u_2)\neq 0,$$

$$(14)\qquad \chi_{n,2}=B(u_2-u)^{m_1+1}Q_1(u)\ln(u_2-u)+Q_2(u),\ \ Q_2(u_2)\neq 0,$$

где $P_i(u)$, $Q_i(u)$, $i=1,2$, — аналитические функции, $A=\mathrm{const}$, $B=\mathrm{const}$.

Замечание 3. Если m и m_1 — не целые числа, $m>1$, $m_1>1$, то в (12) и (14) остаются только вторые члены.

В силу регулярности поверхности S_a и искомого поля z_n и в силу того, что плоскость параллели $u=0$ и плоскость параллели $u=u_2$ касаются к поверхности S_a, система (7) накладывает на интегралы $\chi_n(u)$ соответственно следующие требования:

$$(15)\qquad \chi_n(0)=\chi_n'(0)=0,$$

$$(16)\qquad \chi_n(u_2)=\chi_n'(u_2)=0,$$

Из (11) — (14) видно, что условиям (15) уповлетворяет только интеграл (11), а условиям (16) — только интеграл (13). Таким образом, чтобы доказать нежесткость поверхности S_a, следует показать, что уравнение (8) для какого-либо целечисленного $n\geq 2$ имеет на сегменте $[0,u_2]$ неравный тождественно нулю интеграл, удовлетворяющий краевым условиям (15) и (16), т. е. имеет нетривиальное решение в $[0,u_2]$, которое в окрестности $u=0$ имеет вид (11), а в окрестности $u=u_2$ — вид (13).

Пусть теперь a меняется непрерывно, принимая все положительные значения. Тогда получаем множество поверхностей $\Sigma=\{S_a,\ a>0\}$. Все поверхности этого множества имеют одинаковые меридианы, которые отличаются друг от друга только по расстоянию a от оси вращения. Имеет место следующая

Теорема 1. *Среди двусвязных поверхностей S_a, $0<a<\infty$, существует счетное множество нежестких.*

3. Рассмотрим опять кривую (1). Предположим только, что вместо условия 1), 4), 6) и 7) выполнены соответственно условия: 1′) $\bar{r}(u)=a(\zeta_2-\zeta)+r(u)$, $a=\mathrm{const}$, $a>0$ (см. [5]); 4′) $r(u)>0$ в $[0,u_2)$, $r(u_2)=0$, $r'(u_2)=0$; 6′) $k(u)>0$ в $(u_1,u_2]$; 7′) $\bar{r}(u)$, $f(u)$ аналитические в окрестности $u=0$ и $\bar{r}(u)$, $\zeta(u)$ аналитические в окрестности $u=u_2$. (Отметим, что теперь $\zeta'(u)>0$ в $(0,u_2]$.) Тогда кривая c_a имеет вид, указанный на рис. 2.

Теперь поверхность S_a односвязная с параболическим краем $u=0$, плоскость которого касательна к поверхности и имеет коническую точку $u=u_2$. Ищем поле $z(u,v)\in C^1$ на регулярных кусках S_a и непрерывное в $u=u_2$. В силу непрерывности поля $z(u,v)$ в конической точке u_2 имеем

$$\varphi_n(u)=\psi_n(u)=\chi_n(u)\,|_{u=u_2}=0.$$

Теперь опять имеет место уравнение (8), которое в окрестности $u=0$ и $u=u_2$ имеет соответственно вид (8′) и

$$(8''_1)\qquad (u_2-u)\zeta'(u)r_1(u)\chi''_n-(u_2-u)\zeta''(u)r_1(u)\chi'_n+(n^2-1)k(u)\chi_n=0,$$

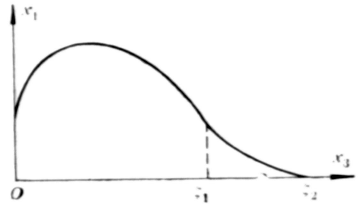

Рис. 2

где положено $r(u)=(u_2-u)r_1(u)$. Очевидно, что $r_1(u_2)\neq 0$. Следовательно, уравнение (8) опять является классом Фукса. Применяя опять аналитическую теорию этих уравнений, получаем, что уравнение (8) имеет в окрестности $u=0$ линейно независимые решения (11) и (12), а в окрестности $u=u_2$ — соответственно

$$(13')\qquad \chi_{n,1}=(u_2-u)Q_1(u),\ \ Q_1(u_2)\neq 0,$$

$$(14')\qquad \chi_{n,2}=B(u_2-u)Q_1(u)\ln(u_2-u)+Q_2(u),\ \ Q_2(u_2)\neq 0.$$

Так как теперь надо решать уравнение (8) при краевых условиях (15) и

$$(16')\qquad \chi_n(u_2)=0,$$

чтобы доказать нежесткость поверхности S_a, следует показать, что уравнение (8) имеет для какого-либо $n\geq 2$ нетривиальное решение, которое в окрестности $u=0$ имеет вид (11), а в окрестности $u=u_2$ — вид (13′). Имеет место следующая

Теорема 2. *Среди односвязных поверхностей S_a, $0<a<\infty$, существует счетное множество нежестких.*

Для доказательства теорем 1 и 2 применяем метод Кон-Фоссена [8]. Тем же методом пользовались Е. Рембс [3] и В. С. Люкшин [4, 5].

4. Пусть

$$c:\begin{cases}x_3=\zeta(u),\\ x_1=r(u),\ \ 0\leq u\leq U\ \ (u \text{ — длина дуги}),\end{cases}$$

простая непрерывная кривая, принадлежащая кусочно классу C^1. Обозначим через u_i, $i=1,\dots,k$, точки излома кривой c. Предположим, что c удовлетворяет условиям: 1) $\zeta'(u)$ может иметь только изолированные нули в $[0,U)$; 2) если в точке $u^*\in[u_i,u_{i+1})$, $i=0,\dots,k$, $u_0=0$, $u_{k+1}=U$, $\zeta'(u^*)=0$, то существует окрестность $[u^*,u^*+\delta]$, $u_i<u^*+\delta<u_{i+1}$, где $|\zeta'(u)|$ неубывающая; 3) $r(u)>0$, $0\leq u<U$, $\zeta'(0)=0$.

Теперь поверхность S, полученная вращением кривой c вокруг оси Ox_3, — кусочно-гладкая. Пусть поле $z(u,v)$ принадлежит классу C^1 на каждом регулярном куске S_i, $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $i=0,\ldots k$, поверхности S и классу C на всей поверхности. Имеет место следующая

Теорема 3. *Поверхность S жестка по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль плоскости параллели $u=0$.*

5. Доказательство теоремы 1. Пусть параметр a зафиксирован, т. е. $a=\bar{a}$. Если уравнение (9) (при $a=\bar{a}$) при некотором целочисленном $n \geq 2$ допускает интеграл $\chi_n(u, \bar{a})$, имеющий в $u=0$ и $u=u_2$ соответственно вид (11) и (13), то поверхность $S_{\bar{a}}$ нежесткая. Предположим, что уравнение (9) не имеет такого интеграла. Пусть N — произвольное целое число, $N \geq 3$. Покажем, что можем выбрать целое положительное число n_0 настолько большое, что каждое решение $\chi_n(u, \bar{a})$, $n \geq n_0$, уравнения (9) имеет M_n нулей в (u_1, u_2), где $M_n \geq N$. В самом деле, возьмем $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ такие, что $u_1 < \bar{u}_1 < \bar{u}_2 < u_2$. В интервале $[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$ будем сравнивать решения уравнения (9) и уравнения

$$(17) \qquad \left(\frac{1}{\zeta'} Y'\right)' + \lambda^2 \zeta' Y = 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$(18) \qquad Y = \sin(\lambda\zeta + \mu)$$

уравнения (17), где $\mu = -\lambda\zeta(\bar{u}_1)$. Выбирая

$$(19) \qquad \lambda = \frac{N\pi}{\zeta(\bar{u}_2) - \zeta(\bar{u}_1)},$$

получаем решение (18), которое имеет $N+1$ нуля в интервале $[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$. Обозначим

$$\min_{\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_2} k(u) = k_0, \quad \max_{\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_2} [r(u) + \bar{a}] = \varrho + \bar{a}.$$

Так как $\max\limits_{\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_2} \zeta' \leq 1$, то

$$(20) \qquad \min_{\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_2} \frac{(n^2-1)k(u)}{[r(u)+\bar{a}]\zeta'^2(u)} \geq \frac{(n^2-1)k_0}{\varrho + \bar{a}}.$$

Выберем такое n_0, что

$$(21) \qquad \frac{(n_0^2-1)k_0}{\varrho+\bar{a}} > \left(\frac{N\pi}{\zeta(\bar{u}_2) - \zeta(\bar{u}_1)}\right)^2.$$

Тогда при $n \geq n_0$ каждый интеграл $\chi_n(u, \bar{a})$ уравнения (9), в силу теоремы Штурма о сравнении [10], будет иметь M_n нулей ($M_n \geq N$) в $[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$, так как

$$G_n(u, \bar{a}) = \frac{(n^2-1)k(u)}{[r(u)+\bar{a}]\zeta'^2(u)} > \lambda^2\zeta'(u) \quad \text{в} \quad [\bar{u}_1, \bar{u}_2].$$

Фиксируем $n \geq n_0$. Тогда каждое решение уравнения (9) (при этом n) имеет в (u_1, u_2) $\bar{M}$ нулей, где $\bar{M} \geq 3$. Возьмем теперь такой интеграл $\chi_n^1(u, a)$ уравнения (9), который в окрестности $u=0$ имеет вид (11). Предположим, что $P_1(0) > 0$ (это всегда можно получить, поскольку уравнение

(9) однородное). Тогда $\chi_n^1(u, \bar{a})>0$ в $(0, u_1]$ и обращено выпуклостью к оси Ox_3, а в (u_1, u_2) имеет $\bar{M} = 3$ нулей. Обозначим нули решения $\chi_n^1(u, \bar{a})$ в (u_1, u_2) через α_i, $i = 1, \ldots, \bar{M}$, $\alpha_i<\alpha_{i+1}$. Пусть $\chi_n^2(u, \bar{a})$ интеграл уравнения (9), который в окрестности $u = u_2$ имеет вид (13). Так как мы предположили, что поверхность $S_{\bar{a}}$ жесткая, то $\chi_n^1(u, \bar{a})$ и $\chi_n^2(u, \bar{a})$ не удовлетворяют соответственно условиям (16) и (15). Обозначим нули $\chi_n^2(u, \bar{a})$ в $[\alpha_1, u_2]$ через β_i, $i=1, \ldots, \bar{M}$, $\beta_{i+1}<\beta_i$. Поскольку нули решений $\chi_n^1(u, \bar{a})$ и $\chi_n^2(u, \bar{a})$ в $[0, u_2]$ чередуются (см. замечание 4), то

$$\alpha_1<\beta_{\bar{M}}<\alpha_2<\beta_{\bar{M}-1}<\alpha_3<\cdots<\beta_3<\alpha_{\bar{M}-1}<\beta_2<\alpha_{\bar{M}}<\beta_1.$$

Замечание 4. Внутренние нули чередуются в силу теоремы Штурма [11]. Покажем, что в интервале $(\beta_2, \beta_1 = u_2)$ решение $\chi_n^1(u, \bar{a})$ имеет нуль (больше одного нуля очевидно иметь не может). Допустим, что $\chi_n^1(u, \bar{a})$ не имеет нуля в (β_2, u_2). По предположению имеем $\chi_n^1(\beta_1, \bar{a}) \neq 0$. Но $\chi_n^1(\beta_2, \bar{a})$ тоже отлично от нуля, так как в противном случае в интервале $(0, u_2)$ будет иметь место равенство $\chi_n^1(u, \bar{a}) = c\chi_n^2(u, \bar{a})$, $c = \mathrm{const}$ (см. [10], с. 121), откуда в силу непрерывности это равенство будет выполнено в $[0, u_2]$. Это противоречит тому, что $\chi_n^1(u_2, \bar{a}) \neq 0$. Таким образом, функция $f(u, \bar{a}) = \chi_n^2(u, \bar{a})/\chi^1(u, \bar{a})$ будет непрерывной в $[\beta_2, \beta_1]$. Но из $f(\beta_1) = f(\beta_2) = 0$ следует существование точки u°, $\beta_2<u^\circ<\beta_1$, для которой $f'(u^\circ) = 0$. Отсюда опять получаем равенство $\chi_n^1(u) = c\chi_n^2(u)$ в $[0, u_2]$, т. е. $\chi_n^1(u_2, \bar{a}) = 0$, которое противоречит нашему предположению. Отсюда следует утверждение.

При непрерывном возрастании параметра a функция $G_n(u, a)$ непрерывно уменьшается. В силу теоремы Штурма о сравнении (см. замечание 5), у нулей интеграла $\chi_n^2(u, a)$ наблюдается сдвиг налево. При этом, так как a непрерывно увеличивается, то и нули непрерывно передвигаются налево (см. [12], с. 61).

Замечание 5. Легко проверить, что теорема Штурма о сравнении имеет место в нашем особенном случае. В самом деле, пусть $a^1>a^2$. Тогда $G_n(u, a^1)<G_n(u, a^2)$. Пусть $\chi_n^2(u, a^1)$ и $\chi_n^2(u, a^2)$ такие интегралы уравнения (9), соответственно с коэффициентами $G_n(u, a^1)$ и $G_n(u, a^2)$, которые в окрестности $u = u_2$ имеют вид (13). Обозначим через β_2^1 и β_2^2 соответственно ближайшие к β_1 нули интегралов $\chi_n^2(u, a^1)$ и $\chi_n^2(u, a^2)$. Применяя те же рассуждения, как в [10], с. 135, и ввиду того, что $\zeta'(u) = (u_2 - u)^m f_2(u)$, $f_2(u_2) \neq 0$, получаем $\beta_2^2>\beta_2^1$.

Обратимся опять к уравнению (17). Выберем λ и μ таким образом, чтобы $u = u_1$ и $u = \beta_{\bar{M}-1}$ были два последовательных нуля решения $\sin(\lambda\zeta + \mu)$ уравнения (17). Для этого достаточно выбрать

$$\lambda = \frac{\pi}{\zeta(\beta_{\bar{M}-1}) - \zeta(u_1)}, \quad \mu = -\lambda\zeta(u_1). \tag{22}$$

Увеличим a от $\bar{a}$ до $\bar{\bar{a}}$, где $\bar{\bar{a}}$ такое, что

$$\max_{u_1 \leq u \leq \beta_{\bar{M}-1}} G_n(u, \bar{\bar{a}}) < \lambda^2 \zeta'(u). \tag{23}$$

Обозначим нули функции $\chi_n^2(u, \bar{\bar{a}})$ соответственно через $\bar{\beta}_i$, $i=1, \ldots, \bar{M}$. Поскольку $G_n(u, \bar{\bar{a}}) < G_n(u, \bar{a})$, то $\bar{\beta}_i$ левее, чем β_i, $i=2, \ldots, \bar{M}$. Покажем, что из двух нулей $\bar{\beta}_{M}$ и $\bar{\beta}_{\bar{M}-1}$ хотя бы один лежит левее u_1. В самом деле, если это не так, то в силу (23) каждое решение уравнения (17) при условии (22) должно иметь нуль в интервале $(\bar{\beta}_{\bar{M}}, \bar{\beta}_{\bar{M}-1}) \in (u_1, \beta_{\bar{M}-1})$ ($\bar{\beta}_{M} \neq \bar{\beta}_{\bar{M}-1}$, так как в противном случае имело бы место $\chi_n^2(\bar{\beta}_{\bar{M}}, \bar{\bar{a}}) = \chi_n^{2\prime}(\bar{\beta}_{\bar{M}}, \bar{\bar{a}}) = 0$, и поскольку уравнение (9) однородное, то $\chi_n^2(u, \bar{\bar{a}})$ изчезало бы в целом интервале $[0, u_2]$). Но для решения $\sin[\lambda(\zeta - \zeta_1)]$ это не так. Из полученного противоречия следует, что хотя бы $\bar{\beta}_{M}$ левее u_1.

Так как мы меняли параметр a непрерывно от $\bar{a}$ до $\bar{\bar{a}}$, $\bar{a} < \bar{\bar{a}}$, то нули β_i, $i=1, 2, \ldots, \bar{M}$, непрерывно двигались левее. С другой стороны, нули α_i, $i=1, \ldots, \bar{M}$, всегда больше u_1, так как $\chi_n^1(0, a) = 0$. Таким образом, существует a_1, $\bar{a} < a_1 < \bar{\bar{a}}$, такое, что нуль $\beta_{\bar{M}}$ решения $\chi_n^2(u, a_1)$ совпадает с нулем α_1 решения $\chi_n^1(u, a_1)$. Тогда $\chi_n^1(u, a_1) = c\chi_n^2(u, a_1)$ в $(0, u_2)$. Но из непрерывности решении $\chi_n^1(u)$ и $\chi_n^2(u)$ в $[0, u_2]$ следует, что $\chi_n^1(u, a_1) = c\chi_n^2(u, a_1)$ в $[0, u_2]$. Таким образом, для нашего выбранного $n \leq n_0$ мы показали, что существует значение $a_1 > 0$ параметра a, такое, что соответственный интеграл $\chi_n^1(u, a_1)$, имеющий в окрестности $u=0$ вид (11), будет иметь в окрестности $u=u_2$ вид (13). Этому решению $\chi_n^1(u, a_1)$ уравнения (9) соответствует нетривиальное поле б. м. изгибания поверхности S_{a_1}. Продолжая увеличивать параметр a, мы найдем такое $a=a_2$, при котором нуль $\beta_{\bar{M}-1}$ решения $\chi_n^2(u, a_2)$ совпадает с нулем α_1 решения $\chi_n^1(u, a_2)$ и, следовательно, соответствующая поверхность S_{a_2} будет нежесткой. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока в (u_1, β_1) останется только нуль β_2 интеграла $\chi_n^2(u, a)$.

Замечание 6. При увеличении параметра a нули $\beta_{\bar{M}}, \ldots, \beta_3$ функции $\chi_n^2(u, a)$, сдвигаясь влево и доходя до $u=0$, исчезают из $[0, u_2]$. При этом в $[0, u_1]$ функция $\chi_n^2(u, a)$ не может иметь больше одного нуля. В то же время нули функции $\chi_n^1(u, a)$, α_i, $i=1, \ldots, \bar{M}$, также двигаются в $(u_1, u_2]$ и, доходя до $u=u_2$, исчезают из $[0, u_2]$.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, следует доказать, что множество нежестких поверхностей S_a счетное. Покажем, что интеграл $\chi_n^2(u, a)$, $n \geq 2$, имеющий вид (13) в окрестности $u=u_2$, имеет конечное множество нулей в $[u_1, u_2]$. В самом деле, допустим, что $\chi_n^2(u, a)$ имеет бесконечное множество нулей. Тогда это множество имеет хотя бы одну точку сгущения. Она не может быть в $[u_1, u_2)$, поскольку $\chi_n^2 \neq 0$. Она не может совпадать и с u_2, так как $\chi_n^2(u, a)$ имеет вид (13) в окрестности $u=u_2$. Таким образом, для каждого $n \geq n_0$ существует конечное множество значений параметра a, которым соответствуют нежесткие поверхности. Поскольку n принимает все целые значения $n \geq 2$, то среди поверхностей S_a существует счетное множество нежестких.

Доказательство теоремы 2 аналогично.

6. Доказательство теоремы 3. На регулярных кусках $[u_i, u_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, k$, $u_0 \equiv 0$, $u_{k+1} \equiv U$, меридиана c, искомое поле (3) удовлетворяет системе (6), соответственно (7). Систему (7) перепишем, опуская индекс i, ввиде

$$r'\chi_n' + \zeta'\varphi_n' = 0, \quad r'(n^2-1)\chi_n + r\chi_n' + n^2\zeta'\varphi_n = 0. \tag{7'}$$

В точках излома поле $z(u, v)$ должно удовлетворять условию

$$z^+(u_i, v) = z^-(u_i, v), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $z^+(u_i, v)$ $(z^- u_i, v)$ значение под $z(u, v)$ на S_{i+1} (S_i) в $u = ur$. Тогда

$$\varphi_n^+(u_i) = \varphi_n^-(u_i), \quad \chi_n^+(u_i) = \chi_n^-(u_i), \quad \psi_n^+(u_i) = \psi_n^-(u_i), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{24}$$

Ввиду того, что $\zeta'(0) = 0$, из (7′) получаем

$$\chi_n(0) = \chi_n'(0) = 0. \tag{25}$$

С другой стороны, поскольку параллель $u = 0$ при изгибании должна скользить по своей плоскости, имеем

$$\varphi_n(0) = 0. \tag{26}$$

Таким образом, надо решать систему (7′) при краевых условиях ($24_{1, 2}$), (25) и (26).

Дальше воспользуемся работой [6]. Из нее вытекает, что в условиях нашей теоремы верна следующая

Лемма. *Если* $\chi_n(0) = \varphi_n(0) = 0$, *то* $\chi_n(u) \equiv 0$, $\varphi_n(u) \equiv 0$ *в* $0 \leq u \leq U$.

Применяя эту лемму, получим, что $z(u, v) \equiv 0$. Этим теорема доказана.

Если $r(0) = r(U) = 0$, то поверхность S будет замкнутой. Пусть $r(u) > 0$, $0 < u < U$, и нули $\zeta'(u)$ в $(0, U)$ изолированные. Пусть меридиан c имеет хотя бы одну точку $u^* \in (0, U)$, для которой $\zeta'(u^*) = 0$. Пусть для каждой точки u^* выполнено: 1) если u^* — внутренняя точка некоторого куска $[u_i, u_{i+1}]$ регулярности, то существует окрестность $[u^*, u^*+\delta] \in (u_i, u_{i+1})$, где $|\zeta'(u)|$ — неубывающая и окрестность $[u^*-\delta, u^*] \in (u_i, u_{i+1})$, где $|\zeta'(u)|$ — невозрастающая; 2) если $u^* = u_i$ (u_i — некоторая точка излома кривой c) и $\zeta'^+(u^*) = 0$ $(\zeta'^-(u^*) = 0)$, то существует окрестность $[u^*, u^*+\delta] \in [u_i, u_{i+1})$ $([u^*-\delta, u^*] \in (u_{i-1}, u_i])$, где $|\zeta'(u)|$ — неубывающая (невозрастающая). Тогда имеет место следующее

Следствие 1: *Замкнутая поверхность S жестка по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль хотя бы одной параллели $u = u^*$.*

Пусть $r(0) = r(U) = 0$, $r(u) > 0$, $0 < u < U$, и нули $\zeta'(u)$ в $(0, U)$ изолированные. Пусть: 1) $\bar{u}$, $0 < \bar{u} < U$, нуль функции $\zeta'(u)$, для которой выполнены условия 1) и 2), указанные выше (после доказательства теоремы

3); 2) для каждого нуля u' функции $\zeta'(u)$, который лежит левее $\bar{u}$ и является либо внутренней точкой некоторого куска регулярности $[u_i, u_{i+1}]$, либо совпадает с его правым краем, предположим, что существует окрестность $[u'-\delta, u'] \in (u_i, u_{i+1}]$, где $\zeta'(u)$ — невозрастающая; 3) для каждого нуля u'' функции $\zeta'(u)$, который лежит правее $\bar{u}$ и является либо внутренней точкой некоторого куска регулярности $[u_i, u_{i+1}]$, либо совпадает с его левым краем, предположим, что существует окрестность $(u'', u''+\delta] \in [u_i, u_{i+1})$, где $\zeta'(u)$ — неубывающая. Тогда имеет место следующее

Следствие 2. *Замкнутая поверхность S жестка по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль параллели $u=\bar{u}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Liebmann. Über die Verbiegung von Rotationsflächen, *Leipzig. Ber.*, **53**, 1901, 215—234.
2. E. Rembs. Unverbiegbare offene Flächen. *Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 1930, 124—133.
3. E. Rembs. Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung. *Math. Z.*, **35**, 1932, 529—535.
4. В. С. Люкшин. К. теории изгибания поверхностей вращения отрицательной кривизны. *Мат. сб.*, **2**, 44, 1937, № 3, 557—564.
5. W. S. Ljukschin. Über die Verbiegung von Rotationsflächen negativer Krümmung mit einem singulären Punkte. *C. R. de l'Acad. des Sciences de L'URSS*. **17**, 1937, № 7, 335—337.
6. T. Minagawa, T. Rado. On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. *Math. Z.*, **59**, 1953, 151—163.
7. T. Minagawa, T. Rado. On the infinitesimal regidity of surfaces. *Osaka J. Math.*, **4**, 1952, № 2, 241—285.
8. С. Э. Кон-Фоссен. Нежесткие замкнутые поверхности. *Успехи мат. наук*, **9**, 1954, № 1, 63—81 (см. также С. Э. Кон-Фоссен. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Москва, 1959).
9. Л. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1953.
10. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. Москва, 1962.
11. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. Москва—Ленинград, 1950.
12. M. Bocher. Leçons sur les méthodes de Sturm. Paris, 1917.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 17. 7. 1974