Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ПЕТЪР Р. ПОПИВАНОВ

В этой работе приводятся новые, необходимые, достаточные, а для некоторых специальных классов уравнений, необходимые и достаточные условия для локальной разрешимости псевдодифференциальных операторов с характеристиками тождественно второй кратности. В зависимости от поведения субглавного символа для любого $s \in \mathbb{R}^1$ получены субэллиптические оценки с потерей гладкости $(2k+1)/(k+1)$ по сравнению с эллиптическими операторами (k — четное неотрицательное число). Кроме того, указаны классы локально неразрешимых операторов, для которых отсутствует теорема о повышении гладкости решений.

Вопрос о разрешимости и гипоэллиптичности псевдодифференциальных уравнений с двукратными характеристиками, допускающие потерю гладкости на одну единицу, изучался в последние годы многими авторами (по этому поводу см. [10, 12, 13]). Во всех известных нам работах старший символ допускает факторизацию вида $p_m q_m (q_m p_m)$, где p_m, q_m — символы субэллиптических операторов и таких, что форма $\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\cdot\overline{\frac{\partial p_m}{\partial x_j}}>0$ на характеристическом множестве p_m, а форма $\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q_m}{\partial \xi_j}\cdot\overline{\frac{\partial q_m}{\partial x_j}}<0$ на характеристическом множестве q_m. В нашей работе будем предполагать что старший символ p^0_{2m} является квадратом символа главного типа, т. е.

$$p^0_{2m}=p^2_m. \tag{1}$$

(Как обычно, гладкая функция $p_m(x, \xi)$ называется символом главного типа, если $p_m(x, \xi)=0 \to \operatorname{grad} p_m \neq 0$). Для некоторых специальных классов псевдодифференциальных уравнений приводятся оценки субэллиптического типа. Потеря гладкости δ по сравнению с эллиптическими операторами либо равна единице, либо $\delta=(2k+1)/(k+1)$, k — четное.

При соответствующих предположениях мы представляем изучаемый оператор в виде произведений двух операторов порядка m. При этом возникающие младшие члены имеют порядок однородности $m-1/2$ и играют существенную роль во всех локальных рассмотрениях. Учитывая их влияние, мы доказываем основные теоремы нашей работы.

Пусть $P(x, D)$ — классический псевдодифференциальный оператор порядка $2m$, символ которого имеет следующее асимптотическое представление:

$$p_{2m}(x, \xi)\sim p^0_{2m}(x, \xi)+p_{2m-1}(x, \xi)+\sum_{j=2}^{\infty}p_{2m-j}(x, \xi).$$

Напомним тогда определение субглавного символа.

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 356—371.

Определение 1. *Субглавным символом называется положительно однородная степени $2m-1$ по ξ функция:*

$$p'_{2m-1}(x,\xi)=p_{2m-1}(x,\xi)+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 p^0_{2m}}{\partial x_j\partial\xi_j}(x,\xi). \tag{2}$$

Хорошо известно, что p'_{2m-1} является каноническим и диффеоморфным инвариантом в критических точках главного символа p^0_{2m}.

В процессе доказательства будем пользоваться т. н. редуцированным субглавным символом:

$$p''_{2m-1}=p_{2m-1}+i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p^0_m}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial p^0_m}{\partial\xi_j}. \tag{3}$$

Как сразу видно, $p'_{2m-1}=p''_{2m-1}$ в тех точках, в которых $p^0_m=0$.

Сделаем теперь основное предположение нашей работы. Мы потребуем, чтобы выполнялось следующее предположение:

(A) Комплекснозначная функция $p''_{2m-1}(x,\xi)\neq 0$ всюду и существует гладкая ветвь квадратного корня $\sqrt{(p''_{2m-1})}$.

Легко сообразить, что если образ множества $\Omega\times S^{n-1}_\xi$ содержится в односвязной области комплексной плоскости, не содержащей нуля, то существует $\sqrt{(p''_{2m-1}(x,\xi))}\in C^\infty(\Omega\times(R^n_\xi\setminus 0))$ (здесь $S^{n-1}_\xi=\{\xi\in R^n/\ |\xi|=1\}$).

Сформулируем теперь теорему 1, дающую достаточное условие для получения оценки с потерей гладкости на одну единицу.

Теорема 1. *Пусть для оператора со старшим символом* (1) *выполнено предположение* (A). *Пусть, кроме того, для любого компакта $K\subset\subset\Omega$ существует такая постоянная $C(K)$, что*

$$|\xi|^{2m-1}\leq C[|p_m\pm i\sqrt{(p''_{2m-1})}|^2+2\mathrm{Im}^+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}\cdot\overline{\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}}],\quad |\xi|\geq C, \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}^+z=\max(0,\mathrm{Im}\,z).$$

Тогда для любого $s\in R^1$ выполнена оценка

$$\|u\|_s\leq C(s,K)(\|Pu\|_{s-2m+1}+\|u\|_{s-1}),\quad u\in C_0^\infty(K). \tag{5}$$

В том специальном случае, когда символ p_m вещественный, условие (4) теоремы 1 переходит в условие (4′): для любого компакта $K\subset\subset\Omega$ существует такая постоянная $C(K)$, что

$$|\xi|^{2m-1}\leq C|p_m\pm i\sqrt{(p''_{2m-1})}|^2. \tag{4′}$$

Тогда немедленно следует, что имеет место оценка (5) и гипоэллиптичность P.

В следующей теореме мы изучаем один довольно специальный класс псевдодифференциальных операторов нулевого порядка. Предполагаем, что символ допускает асимптотическое развитие вида:

$$p(x,\xi)\sim x_1^2+q_{-1}(\xi)+\sum_{j=2}^{\infty}q_{-j}(x,\xi). \tag{6}$$

Предположим еще, что

(B) функция $q_{-1}(\xi)\neq 0$ всюду, существует ветвь $\sqrt{(q_{-1}(\xi))}$ и кроме того, $\operatorname{Re}\sqrt{(q_{-1})}$ сохраняет знак для любого

$$\xi\neq 0,\ \operatorname{Re}\sqrt{(q_{-1})}=(\sum_{j=0}^{k}\xi_1^{k-j}p_j(\xi'))r_{-k-1/2}(\xi).$$

Здесь $p_0(\xi')\equiv 1$, $p_j(\xi')$ — однородные порядка j относительно ξ' функции, $\xi'=(\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $r_{-k-1/2}(\xi)$ — эллиптический символ порядка $-k-1/2$.

Теорема 2. *Пусть для оператора с символом (6) имеет место условие (B). Тогда для любого $s\in R^1$ выполнена субэллиптическая оценка*

$$\|u\|_s\leq C(\|Pu\|_{s+(2k+1)/(k+1)}+\|u\|_{s-1}),\ u\in C_0^\infty(K). \tag{7}$$

Заметим, что условие (B) инвариантно при переходе к сопряженному оператору. Следовательно, оценка (7) выполнена одновременно для оператора P^*.

Наконец мы укажем на некоторые случаи, когда операторы вида (6) или даже вида $x_1^2+q_{-1}(x,\xi)$ неразрешимы в окрестности нуля.

Теорема 3. *Пусть для оператора с символом $x_1^2+q_{-1}(x,\xi)$ имеют место следующие условия: $q_{-1}(x^0,\xi^0)\neq 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{(q_{-1})}$ имеет нуль нечетного порядка относительно ξ_1 в точке $x^0=0$, $\xi^0=1$. Тогда оператор $P(x,D)$ неразрешим в окрестности x^0.*

(Очевидно, условие теоремы 3 сводится к следующему:

$$\operatorname{Re}q_{-1}(x^0,\xi^0)<0,\ \operatorname{Im}q_{-1}(x^0,\xi_1,\xi'^0)=C_1\xi_1^{2k+1}+O(\xi_1^{2k+2}).)$$

Комбинируя теоремы 2, 3, немедленно находим

Следствие 1. *Операторы с символами*

$$p_0=x_1^2+q_{-1}(\xi),\ q_{-1}(\xi)\neq 0,\ \operatorname{Re}\sqrt{(q_{-1})}=a\xi_1^k|\xi|^{-k-1/2},$$
$$a\neq 0;\quad q_0=x_1^2+|\xi|^{-1}(\alpha+i\xi_1^k|\xi|^{-k}),\ \alpha<-1$$

разрешимы тогда и только тогда, когда k — четное. В этом случае выполнена субэллиптическая оценка (7).

Мы обращаем внимание на тот факт, что оценка (5) неулучшаемая. Действительно, если предположим, что возможна потеря гладкости меньше единицы, то окажется, в силу результатов Ю. В. Егорова, что $P(x,D)$ — оператор с простыми характеристиками.

1. Доказательство теоремы 1. Мы доказываем теоремы 1 и 2 при помощи расщепления оператора $p_{2m}+p_{2m+1}$ в произведении двух операторов m-го порядка. Для оператора с символом $p_m+\psi_{m-1/2}+\psi_{m-1}+\cdots$ получаем точные, необходимые и достаточные условия для выполнения субэллиптической оценки с потерей гладкости 1/2.

Сформулируем теперь лемму 1, дающую нам возможность факторизировать оператор $P(x,D)$.

Лемма 1. *Пуст $P(x,D)$ — оператор вида* (1), *для которого выполнено предположение* (A). *Тогда существует оператор $R_{m-1}(x,D)$, такой, что*

$$P(x,D)-(p_m+i\sqrt{(p''_{2m-1})}(x,D)+R_{m-1}(x,D))\circ(p_m-i\sqrt{(p''_{2m-1})}-R_{m-1}(x,D))$$
$$=Q_{2m-2}(x,D),$$

где

$$Q_{2m-2}(x, \xi) \sim \sum_{(2j)=0}^{\infty} q_{2m-2-j}(x, \xi).$$

Доказательство очень простое. Действительно, представим $p_{2m}(x, D) + p_{2m-1}(x, D)$ как произведение операторов:

$$p_m^2(x, D)+p_{2m-1}(x, D)=(p_m+X_{m-1/2}+R_{m-1})\circ(p_m-X_{m-1/2}-R_{m-1}),$$

где $X_{m-1/2}$, R_{m-1} — пока неизвестные символы порядка однородности $m-1/2$, $m-1$ соответственно. Пользуясь хорошо известными формулами из алгебры псевдодифференциальных операторов, получаем

$$p_m^2(x, \xi)-i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial x_j}+i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial X_{m-1/2}}{\partial x_j}-i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\times\frac{\partial X_{m-1/2}}{\partial \xi_j}-X_{m-1/2}^2-2X_{m-1/2}R_{m-1}\equiv p_m^2(x, \xi)+p_{2m-1}(x, \xi)$$

(mod членов порядка однородности $\leq 2m-2$).

Следовательно,

$$p_{2m-1}(x, \xi)=-X_{m-1/2}^2-i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial x_j},$$

$$0=-2X_{m-1/2}R_{m-1}+i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial X_{m-1/2}}{\partial x_j}-i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_{m-1/2}}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial x_j}.$$

В силу условия (А) находим, что существует символ $X_{m-1/2}$, который выражается формулой

$$X_{m-1/2}(x, \xi)=i\sqrt{(p''_{2m-1}(x, \xi))}.$$

Поскольку $X_{m-1/2}(x, \xi)\neq 0$ всюду, для $R_{m-1}(x, \xi)$ находим выражение

$$R_{m-1}(x, \xi)=-i/2\,(p''_{2m-1})^{-1/2}\,\sigma[X_{m-1/2}, p_m],$$

где $\sigma[\ ,\ ]$ означает старший символ коммутатора операторов $X_{m-1/2}$ и p_m.

Следующий шаг — изучение оценки с потерей гладкости $1/2$ для операторов вида

$$p_m+p_{m-1/2}+\sum_{(2j)=0}^{\infty}p_{m-1-j},$$

т. е. оценки

(8) $$\|u\|_s\leq C(K)(\|Pu\|_{s-m+1/2}+\|u\|_{s-1}),\quad u\in C_0^\infty(K).$$

Как видно из этого неравенства, члены порядка однородности $m-1$ несущественные. Поэтому мы их отбрасываем. Следуя Хёрмандеру (см. [2]), сперва доказываем, что неравенство (8) выполнено тогда и только тогда, когда выполнена оценка

(9) $$\|u\|_{m-1/2}\leq C(\|Pu\|_0+\|u\|_{m-1}),\quad u\in C_0^\infty(K).$$

Так как рассуждения стандартные, мы их опускаем.

Легко показать, пользуясь работами [2, 3], следующую лемму.

Лемма 2. *Оценка* (9) *выполнена, если и только если для всякого компактного множества $K\subset\subset\Omega$ существует постоянная $C(K)>0$, так что при $x\in K$, $\xi\neq 0$*

$$\int|\psi(y)|^2dy\leq C\{|\xi|^{-2m+1}\int|\sum_{|\alpha+\beta|\leqq 1}\frac{\partial^{\alpha+\beta}p_m^0(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha\partial x^\beta}\frac{1}{\alpha!\,\beta!}y^\beta D^\alpha\psi(y) \tag{10}$$

$$\times|\xi|^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}+p_{m-1/2}(x,\xi)\psi(y)|^2dy+|\xi|^{-\varepsilon}\sum_{|\alpha+\beta|\leq m+3}\int|y^\beta D^\alpha\psi|^2dy\},$$

$$\psi\in C_0^\infty(\mathsf{R}^n),\ \varepsilon=\text{const}>0.$$

Доказательство необходимости повторяет доказательство необходимости предложения 1. 1. 1. из [2]. При доказательстве достаточности следуем доказательству предложения 1. 1. 3. из [2] с той разницей, что пользуемся нижеприводимой леммой 3.

Пусть $\theta\in C_0^\infty(\mathsf{R}^n)$, $\theta\geqq 0$ и $\theta>0$ в области $\{x\mid |x_j|\leqq 1/2,\ 1\leq j\leq n\}$, а $\theta=0$, если $|x_j|\geq 3/4$. Обозначим через $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$ целочисленную решетку в R^n и такую, что $g_0=0$. Рассмотрим тогда разбиение единицы в R^n_x, определенное формулой

$$\varphi_k(x)=\theta(x-g_k)\,(\sum_0^\infty\theta\,(g-x_i)^2)^{-1/2}.$$

В двойственном пространстве R^n_ξ вводим хорошо известное разбиение единицы

$$\psi_j(\xi)=\varphi_j(\xi\,|\xi|^{-1/2}).$$

Пусть теперь $0\neq\xi^j\in\operatorname{supp}\psi_j$ и число $\delta\in(0,1)$. Тогда определяем дифференциальный оператор первого порядка:

$$P_j^\delta u(x)=[p_m(x,\xi^j/\delta)+p_{m-1/2}(x,\xi^j/\delta)]u(x)+\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial p_m}{\partial\xi_\nu}(x,\xi^j/\delta)\,(D_\nu-\xi^j_\nu/\delta)u(x).$$

Как обычно, будем обозначать через $\psi_j(\delta D)$ оператор

$$\psi_j(\delta D)u(x)=\int e^{i(x,\xi)}\,\psi_j(\delta\xi)\,\tilde{u}\,(\xi)d\xi.$$

При этих предположениях справедлив следующий результат.

Лемма 3. *Существует константа C, не зависящая от δ и $C(\delta)$, так что*

$$\sum_0^\infty\|P_j^\delta\psi_j(\delta D)u-\psi_j(\delta D)Pu\|_0^2\leq C\delta\,\|u\|^2_{m-1/2}+C\,(\delta)\,\|u\|^2_{m-1}.$$

Доказательство стандартное.

Наконец найдем точный алгебраический эквивалент оценки (10) или, что все равно, оценки (9).

Итак сформулируем следующую лемму.

Лемма 4. *Неравенство* (10) *выполняется тогда и только тогда, когда для любого $K\subset\subset\Omega$ существует постоянная такая $C(K)$, что*

$$(11)\qquad |\xi|^{2m-1}\le C\Big(|p_m(x,\xi)+p_{m-1/2}(x,\xi)|^2+2\,\mathrm{Im}^+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial x_j}}\Big),\ x\in K,\ |\xi|\ge c.$$

Доказательство необходимости. Допустим, что неравенство (11) не выполняется. Тогда можно найти последовательность (x^j,ξ^j), $x^j\in K$, $x_j\to x^0$, $\xi^j\to\infty$ со свойствами

$$(12)\quad |\xi^j|^{-2m+1}|p_m(x^j,\xi^j)+p_{m-1/2}(x^j,\xi^j)|^2\to 0,\ |\xi^j|^{-2m+1}\mathrm{Im}^+\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_k}\overline{\frac{\partial p_m}{\partial x_k}}(x^j,\xi^j)\Big)\to 0$$

Заметим, что при

$$|\alpha+\beta|=1\quad |\xi|^{1-2m}\Big|\frac{\partial^{\alpha+\beta}p_m(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha\,\partial x^\beta}\Big|^2|\xi|^{|\alpha|-|\beta|}\le C',\ |\xi|^{1-2m}|p_{m-1/2}(x,\xi)|^2\le C'',$$

поскольку это однородные нулевой степени функции на компактном множестве $K\times S^{n-1}$. Переходя к подпоследовательностям, получаем:

$$(13)\qquad |\xi^j|^{1/2-m}\frac{\partial^{\alpha+\beta}p_m(x^j,\xi^j)}{\partial\xi^\alpha\,\partial x^\beta}|\xi^j|^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}\to A^m_{\alpha,\beta},\ |\alpha+\beta|=1.$$

Неравенство (12) показывает, что $\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n}A^m_{k,0}\overline{A^m_{0,k}}\le 0$. Так как оценка (10) выполнена для любой точки (x^j,ξ^j), то совершая предельный переход при $j\to\infty$, находим

$$\int|\psi|^2\,dy\le C\int\Big|\sum_{|\alpha+\beta|=1}A^m_{\alpha,\beta}y^\beta D^\alpha\psi\Big|^2dy,\ \psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

т. е. получаем противоречие с леммой (6.5) из [3].

Доказательство достаточности. Опять допустим противное. Тогда существуют последовательности $\psi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x^j\to x^0$, $x^j\in K$, $\xi^j\to\infty$, такие, что

$$(14)\quad \begin{aligned}&\|\psi_j\|_0^2=1,\ C\Big\|\,|\xi^j|^{1-2m}\sum_{|\alpha+\beta|\le 1}\frac{\partial^{\alpha+\beta}p_m(x^j,\xi^j)}{\partial\xi^\alpha\,\partial x^\beta}|\xi^j|^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}y^\beta D^\alpha\psi_j\\&+p_{m-1/2}(x^j,\xi^j)\psi\Big\|_0^2+\varepsilon\sum_{|\alpha+\beta|\le m+3}\|y^\beta D^\alpha\psi_j\|_0^2\le 1,\ \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Кроме того, для любого $(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$(15)\qquad |\xi|^{2m-1}\le C\Big(|p_m+p_{m-1/2}|^2+2\,\mathrm{Im}^+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial\xi_k}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial x_k}\Big)$$

(константа C в обоих неравенствах можно предполагать одинаковой). В силу критерия компактности в L_2 и неравенства (14) заключаем, что существует функция ψ: $\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0<\infty$, $|\alpha+\beta|\le 1$, для которой выполняется реляция: $\|y^\beta D^\alpha\psi_j-y^\beta D^\alpha\psi\|_0\to 0$, $|\alpha+\beta|\le 1$. Заметим, что $\|\psi\|_0=1$. Наконец, комбинируя предельные соотношения (13) и неравенство (14), делаем вывод, что $|\xi^j|^{1/2-m}|p_m(x^j,\xi^j)|\le C$. Переходя к подпоследовательностям, имеем

$$|\xi^j|^{1/2-m} p_m(x^j, \xi^j) \to A^m_{0,0}; \quad |\xi^j|^{1/2-m} p_{m-1/2}(x^j, \xi^j) \to A^{m-1/2}_{0,0}.$$

Таким образом,

$$C\|\sum_{|\alpha+\beta|\leq 1} A^m_{\alpha,\beta} y^\beta D^\alpha \psi + A^{m-1/2}_{0,0}\psi\|_0^2 + \varepsilon \leq 1, \ \varepsilon > 0.$$

Подставим теперь в (15) $x = x^j + x|\xi^j|^{-1/2}$, $\xi = \xi^j + \xi|\xi^j|^{1/2}$, где $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ — фиксированные. Тогда

$$p_m(x^j + x|\xi^j|^{-1/2}, \xi^j + \xi|\xi^j|^{1/2}) = \sum_{|\alpha+\beta|\leq 1} x^\beta \xi^\alpha \frac{\partial^{\alpha+\beta} p_m(x^j, \xi^j)}{\partial\xi^\alpha \partial x^\beta} |\xi^j|^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}$$

$$+ \sum_{|\alpha+\beta|=2} |\xi^j|^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}} x^\beta \xi^\alpha \frac{\partial^{\alpha+\beta} p_m}{\partial\xi^\alpha \partial x^\beta}(x^j + \theta x|\xi^j|^{-1/2}, \xi^j + \theta\xi|\xi^j|^{1/2}), \ 0 < \theta < 1.$$

Так как ξ — фиксированное и $\xi_j \to \infty$, то, не ограничивая общности, будем предполагать, что $|\xi| \leq |\xi^j|/2 \to |\xi^j|/2 \leq |\xi^j + \theta\xi|\xi^j|^{1/2}| \leq 3|\xi^j|/2$. Следовательно, остаточный член оценивается через $|\xi^j|^{m-|\alpha|}|\xi^j|^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}} \leq |\xi^j|^{m-1}$. Поскольку аналогичные разложения имеют место для остальных членов в (15), то совершая переход при $j \to \infty$ в неравенстве (15), получаем

$$1 \leq C(|\sum_{|\alpha+\beta|\leq 1} A^m_{\alpha,\beta} x^\beta \xi^\alpha + A^{m-1/2}_{0,0}|^2 + 2\,\mathrm{Im} \sum_{|\alpha|=1} A^m_{\alpha,0}\overline{A^m_{0,\alpha}}).$$

Тогда согласно лемме 6.5 из [3]

$$\int|\psi|^2 \leq C\int|\sum_{|\alpha+\beta|\leq 1} A^m_{\alpha,\beta} y^\beta D^\alpha \psi + A^{m-1/2}_{0,0}\psi|^2.$$

Полученное противоречие доказывает нашу лемму.

Пользуясь леммой 4, имеем

$$\|u\|_s \leq C_1(\|p_m - i\sqrt{(p''_{2m-1})} - R_{m-1})u\|_{s-m+1/2} + \|u\|_{s-m-1}), \quad u \in C_0^\infty(K),$$

$$\|u\|_{s+m-1/2} \leq C_2[\|(p_m + i\sqrt{(p''_{2m-1})} + R_{m-1})u\|_s + \|u\|_{s-1}].$$

Из этих неравенств получаем

$$\|u\|_{s+m-1/2} \leq C_3[\|(p_m + i\sqrt{(p''_{2m-1})} + R_{m-1}) \circ (p_m - i\sqrt{p''_{2m-1}}) - R_{m-1})u\|_{s-m+1/2}$$
$$+ \|u\|_{s-1}], \ u \in C_0^\infty(K).$$

Ввиду леммы 1 и произвольности $s \in \mathbb{R}^1$ теорема 1 доказана. Заметим, что в этой цепочке неравенств мы воспользовались интерполяционным неравенством, чтобы получить в правой стороне член $\|u\|_{s-m-1}$.

Рассмотрим некоторые применения теоремы 1 в теории локальной разрешимости. Сперва напомним, что если $s \geq -n/2$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\|u\|_s \leq C(\omega)\|u\|_{s+\varepsilon}, \ u \in H^s(\omega).$$

Кроме того, $C(\omega) \to 0$, когда $\operatorname{diam}\omega \to 0$.

Действительно, исходя из противного, строим последовательность $u_j \in H^{s+\varepsilon}$, $\|u_j\|_{s+\varepsilon}=1$, $\operatorname{supp} u_j \to \{x_0\}$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|u_j\|_s \geqq C_0>0$. Из компактности оператора вложения следует существование элемента $u \in H^s$ и последовательности u_{j_k}, для которых $\|u_{j_k}-u\|_s \to 0$. Очевидно, $\operatorname{supp} u=\{x_0\}$, $u \neq 0$. Из основой структурной теоремы для распределений, сосредоточенных в точке, следует, что u является линейной комбинацией δ-функции и ее производных. Но $\delta \notin H^s$ при $s \geqq -n/2$, и мы впадаем в противоречие.

Последнее замечание показывает, что

$$\|u\|_s \leqq C\|P_{2m}u\|_{s-2m+1}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega), \ s \geqq -n/2.$$

Отсюда немедленно следует локальная разрешимость оператора P_{2m}^*. Кроме того, можно извлечь соответствующую информацию о гладкости решений. Мы заметим еще, что изучаемые в лемме 2 операторы очевидно гипоэллиптические.

Наконец, предположим, что p_m является символом субэллиптического оператора с потерей гладкости $1/2$. Как известно, алгебраическим эквивалентом этого условия является выполнение неравенства

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} \cdot \overline{\frac{\partial p_m}{\partial x_j}} > 0 \tag{16}$$

в тех точках, в которых $p_m(x, \xi)=0$. Поскольку множество характеристических точек p_m на единичной сфере компактно, то

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} \cdot \overline{\frac{\partial p_m}{\partial x_j}} \geqq C_0 |\xi|^{2m-1}, \ C_0>0$$

на некотором компакте $K \supset\supset \{(x, \xi) \mid p_m(x, \xi)=0, \ |\xi|=1\}$. Вне K очевидно $|p_m(x, \xi)| \geqq C_1|\xi|^m$, $C_1>0$. Кроме того, $|p_{m-1/2}(x, \xi)| \leqq C_3|\xi|^{m-1/2}$ всюду. Следовательно, для всех $|\xi|$, достаточно больших, выполнена оценка (5).

Как нами доказано в [15], в предположении, что существует характеристическая точка (x^0, ξ^0), в которой форма (16) больше нуля и $p''_{2m-1}(x^0, \xi^0) \neq 0$, оператор P_{2m} неразрешим в окрестности x^0. Здесь мы доказываем, что для субэллиптических операторов сохраняется лемма о гипоэллиптичности и их сопряженные операторы разрешимы.

2. Доказательство теоремы 2. При доказательстве этой теоремы опять воспользуемся леммой 1 и работой [9], в связи с чем рассмотрим сперва оператор с символом $x_1+q_{-1/2}(\xi)$, $\operatorname{ord}_\xi q=-1/2$.

Лемма 5. *Пусть оператор P нулевого порядка имеет символ $x_1+q_{-1/2}(\xi)$, $q_{-1/2}(\xi)$ — положительно однородная степени $-1/2$ относительно ξ функция и $q_{-1/2}(\xi)$ не меняет знака. Пусть*

$$\operatorname{Im} q_{-1/2}=\Big(\sum_{j=0}^{k} \xi_1^{k-j} p_j(\xi')\Big) r_{-k-1/2}(\xi),$$

где $p_0=1$, p_j — однородные степени j функции относительно $\xi'=(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $r_{-k-1/2}(\xi)$ — эллиптический символ. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}^1$ выполнена оценка:

$$\|u\|_s \leqq C(\|Pu\|_{s+(2k+1)/2(k+1)}+\|u\|_{s-1}), \ u \in C_0^\infty(K).$$

Доказательство. При помощи преобразования Фурье получаем

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial\xi_1} + i q_{-1/2}(\xi)\,\tilde u = i\tilde f(\xi),\quad \tilde u(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(x,\xi)}u(x)\,dx. \tag{17}$$

Простая замена переменных $\xi_1\to-\eta_1$ показывает, что случай $\operatorname{Im} q_{-1/2}(\xi)\ge 0$ сводится к $\operatorname{Im} q_{-1/2}(\xi)\le 0$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $\operatorname{Im} q_{-1/2}(\xi)\le 0$. Фиксируем ξ', умножаем (17) на $\bar{\tilde u}$ и интегрируем от $-\infty$ до ξ_1, имея в виду, что $\tilde u(-\infty,\xi')=0$, т. к. $u\in C_0^\infty$. Тогда получаем, выделяя действительную часть,

$$|\tilde u(\xi)|^2 - \int_{-\infty}^{\xi_1}\operatorname{Im} q_{-1/2}(\eta_1,\xi')\,|\tilde u(\eta_1,\xi')|^2\,d\eta_1 \le \int_{-\infty}^{\xi_1}|\tilde f(\eta_1,\xi')|\,|\tilde u(\eta_1,\xi')|\,d\eta_1. \tag{18}$$

Так как $\tilde u\in S(\mathbb{R}^n)$, то существует $\max\limits_{\eta_1}|\tilde u(\eta_1,\xi')| = |\tilde u(\xi_1,\xi')|$. Следовательно,

$$\max_{\xi_1}|\tilde u(\xi_1,\xi')|^2 - \int_{-\infty}^{\xi_1}\operatorname{Im} q_{-1/2}(\eta_1,\xi')\,|\tilde u(\eta_1,\xi')|^2\,d\eta_1$$

$$\le 2\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde f(\xi_1,\xi')|\,|\tilde u(\xi_1,\xi')|^2\,d\xi_1.$$

Обозначим теперь через $\xi_{1r}(\xi')$ корни многочлена $\operatorname{Im} q_{-1/2}$. Пусть

$$\varrho(\xi_1,\xi') = \min_{1\le r\le k}(|\xi_1-\xi_{1r}(\xi')|,\ |\xi_1|).$$

Тогда вводим множества

$$\Delta_1 = \{\xi_1 \mid \varrho(\xi)\le 1+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}\}\quad \text{и}\quad \Delta_2 = \mathbb{R}^n_\xi\setminus(\Delta_1\cup\{0\}).$$

Последовательно находим

$$\int_{\Delta_1}\frac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(|\xi'|+|\xi_1|+1)^{k+1/2}}\,|\tilde u(\xi_1,\xi')|^2\,d\xi_1 \le C_1\max_{\xi_1}|\tilde u|^2\,\frac{(1+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}})^k}{(1+|\xi'|)^{k+1/2}}$$

$$\times(1+|\xi'|)^{\frac{2k+1}{2k+2}}\le C_2\max_{\xi_1}|\tilde u(\xi_1,\xi')|^2.$$

Заметим теперь, что $\xi_1\in\Delta_2\to -\operatorname{Im} q_{-1/2}(\xi)\ge C_3\dfrac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(1+|\xi_1|+|\xi'|)^{k+1/2}}$.

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(1+|\xi'|+|\xi_1|)^{k+1/2}}\,|\tilde u(\xi_1,\xi')|^2\,d\xi_1\le\int_{\Delta_1\cup\Delta_2}\frac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(1+|\xi'|+|\xi_1|)^{k+1/2}}\,|\tilde u(\xi_1,\xi')|^2$$

$$\le C_4\max_{\xi_1}|u|^2 - C_4\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im} q_{-1/2}(\xi)\,|\tilde u(\xi)|^2\,d\xi_1.$$

Пользуясь (18), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(1+|\xi_1|+|\xi'|)^{k+1/2}}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi_1\leq\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{f}(\xi)||\widetilde{u}(\xi)|d\xi_1$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(1+|\xi'|+|\xi_1|)^{k+1/2}}|\widetilde{u}|^2d\xi_1+C_5\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+|\xi_1|+|\xi'|)^{k+1/2}}{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}|\widetilde{f}|^2d\xi_1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{-1/2}\frac{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}{(1+|\xi_1|+|\xi'|)^k}|\widetilde{u}|^2d\xi_1\leq C_6\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+|\xi_1|+|\xi'|)^k}{(\varrho+|\xi'|^{\frac{2k+1}{2k+2}}+1)^k}$$

$$\times(1+|\xi|)^{1/2}|\widetilde{f}(\xi_1,\xi')|^2d\xi_1\leq C_7\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{1/2}|\widetilde{f}(\xi_1,\xi')|^2(1+|\xi'|)^{\frac{k}{2k+2}}d\xi_1.$$

Из определения ϱ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi'|)^{-\frac{k}{2k+2}}(1+|\xi|)^{-1/2}|\widetilde{u}(\xi_1,\xi')|^2d\xi_1\leq C_8\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi'|)^{\frac{k}{2k+2}}(1+|\xi|)^{1/2}|\widetilde{f}|^2d\xi_1.$$

Окончательно, для любого $s\in\mathbb{R}^1$ существует константа $C>0$, так что

$$\|u\|^2_{-1/4,\ s-k/4(k+1)}\leq C\|P(x,D)u\|_{1/4,\ s+k/4(k+1)},\ u\in C_0^\infty(K).$$

Выбирая $s=k/4(k+1)$, находим

$$\|u\|^2_{-1/4}\leq C\|Pu\|_{1/4,\ k/2(k+1)}\leq C'\|Pu\|_{(3k+1)/4(k+1)},\ u\in C_0^\infty(K).$$

Стандартная техника показывает, что эта оценка эквивалентна с оценкой

$$\|u\|_s\leq C(\|Pu\|_{s+(2k+1)/(2k+2)}+\|u\|_{s-1}),\ u\in C_0^\infty(K)$$

для любого $s\in\mathbb{R}^1$. Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 заканчиваем при помощи леммы 1, аналогично тому, что было сделано в конце 1. Очевидно, кроме того, что операторы P и P^* локально разрешимы в окрестности нуля.

3. Доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что при доказательстве этой теоремы схема Хёрмандера из [4] не применима. Поэтому мы докажем неразрешимость рассматриваемых операторов методом локализации (см. [3, 7]) с последующим применением элементарной канонической трансформации.

Итак, напомним следующее предложение (доказательство см. в [2]).

Лемма 6. *Пусть оператор $P(x, D)$ разрешим локально в точке x^0. Тогда можно найти такую окрестность ω точки x^0 и числа $s, t\in\mathbb{R}^1$, что выполняется оценка*

$$\|u\|_s\leq C(\|P^*u\|_t+\|u\|_{s-1}),\ u\in C_0^\infty(\omega). \qquad (19)$$

Заметим, что в нашем специальном случае

$$p^*(x, \xi) \sim x_1^2 + \overline{q_{-1}(x, \xi)} + \cdots$$

Лемма 7. *При доказательстве теоремы 3 можно ограничиться тем случаем, когда в неравенстве* (19) *константа* $t = 0$.

Действительно, пусть $A(x, D)$ — эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $a^0(x, \xi) = |\xi|^{-t} h(x)$ при $|\xi| \geq 1$. Здесь $h(x) \in C_0^\infty(\omega)$, $h(x) = 1$ на $\omega' \subset\subset \omega$. Отсюда для $u = Av$, $v \in C_0^\infty(\omega')$ немедленно следует оценка

$$\|v\|_{s-t} \leq C_1(\|u\|_s + \|v\|_{s-t-1}) \leq C_2(\|P^* u\|_t + \|v\|_{s-t-1})$$
$$\leq C_3(\|(1+|D|)^t \circ P^* \circ Av\|_0 + \|v\|_{s-t-1}).$$

А теперь определим символ оператора $(1+|D|)^t \circ P^* \circ A$ в окрестности характеристической точки $(0, \xi^0)$, $\xi_1^0 = 0$. Нас будут интересовать только члены порядка однородности 0 и -1. Итак,

$$(1+|D|)^t \circ P^* \circ A \sim x_1^2 - 2tix_1\xi_1|\xi|^{-2} + \overline{q_{-1}(x, \xi)} + \cdots \tag{20}$$

В работе [3] доказана нижеприводимая лемма о локализации, которая дает нам возможность свести изучение локальных свойств псевдодифференциальных операторов к изучению глобальных свойств линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Лемма 8. *Пусть для оператора $P(x, D)$ нулевого порядка выполнена оценка $\|u\|_s \leq C(K)(\|Pu\|_0 + \|u\|_{s-1})$, $u \in C_0^\infty(K)$. Тогда для любого целого $N > 0$ и любого компакта $M \subset K \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ выполнено неравенство*

$$\|\psi\|_0 \leq C\lambda^{-s}\Big(\Big\|\sum_{2j+|\alpha+\beta|<N} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} p^j(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha\, \partial x^\beta} y^\beta D^\alpha \psi \lambda^{-j-\frac{|\alpha+\beta|}{2}}\Big\|_0$$
$$+ \lambda^{-N/2} \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \|y^\beta D^\alpha \psi\|_0\Big),$$

для всех $\lambda \geq 1$ и всех функций $\psi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, если только $(x, \xi) \in M$.

Поскольку наш символ имеет вид (20) окрестности точки $(0, \xi^0)$, то немедленно получаем

$$\|\psi\|_0 \leq C\lambda^{-s-1}\Big(\Big\|y_1^2 \psi - 2it \sum_{|\alpha+\beta|<N-2} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^\alpha(\xi_1|\xi|^{-2})}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta x_1}{\partial x^\beta} y^\beta D^\alpha \psi \tag{21}$$
$$\times \lambda^{-\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} + \sum_{2+|\alpha+\beta|<N} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} \overline{q_{-1}(x, \xi)}}{\partial \xi^\alpha\, \partial x^\beta} y^\beta D^\alpha \psi \lambda^{-\frac{|\alpha+\beta|}{2}}$$
$$+ \sum_{\substack{2j+|\alpha+\beta|<N \\ j \geq 2}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} q_j(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha\, \partial x^\beta} y^\beta D^\alpha \psi \lambda^{-j+1-\frac{|\alpha+\beta|}{2}}\Big\|_0 + \lambda^{-N/2+1} \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \|y^\beta D^\alpha \psi\|_0\Big).$$

А теперь сделаем элементарное каноническое преобразование в (21), при помощи которого меняются местами $y_1 \to \eta_1$. Так как в результате этой замены $y_1^2 \to \eta_1^2$ и не появляются младшие члены, возникающие из y_1^2, то можем воспользоваться теоремой 2 из [6], утверждающей, что неравенства типа (21) сохраняются при канонической трансформации. Самое существенное для нас — это инвариантность при указанной замене первых двух сумм из (21). Итак, неравенство (21) переходит в

$$\|\psi\|_0 \leq C\lambda^{-s-1}\Big(\Big\| -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2it \sum_{|\alpha+\beta|<N-2} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^\alpha(\xi_1|\xi|^{-2})}{\partial\xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta x_1}{\partial x^\beta} y^\beta$$

$$\times D^\alpha\psi\lambda^{-\frac{|\alpha+\beta|}{2}} + \sum_{2+|\alpha+\beta|<N} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{q}_{-1}(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha\,\partial x^\beta} y^\beta D^\alpha\psi\lambda^{-\frac{|\alpha+\beta|}{2}} + \sum_{\substack{2j+|\alpha+\beta|<N,\\ j\geq 2}} \widetilde{q}^{\,j}_{(\alpha,\beta)}(x,\xi)$$

$$\times y^\beta D^\alpha\psi\lambda^{-j+1-\frac{|\alpha+\beta|}{2}}\Big\|_0 + \lambda^{-N/2+1} \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} \|y^\beta D^\alpha\psi\|_0\Big),\ \lambda\geq 1,\ \psi\in C_0^\infty.$$

Заморозим наш оператор в точке (x^0, ξ^0), $x^0=0$, $\xi_1^0=0$. Потом сделаем замену $\psi(y)\to\psi(y\lambda^{-1/2})$ и наконец заменим параметр $\lambda\to\lambda^2$. Окончательно получаем, что необходимое условие для выполнения оценки (19) является выполнением неравенства

$$\|\psi\|_0 \leq C\lambda^{-2s-2}\Big(\Big\| -\lambda^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} - 2it \sum_{1\leq|\alpha|<N-3} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha(\xi_1|\xi|^{-2})}{\partial\xi^\alpha}(\xi^0) y_1 \tag{22}$$

$$\times D^\alpha\psi\lambda^{-2|\alpha|} + \sum_{|\alpha+\beta|<N-2} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\widetilde{q}_{-1}(0,\xi^0)}{\partial\xi^\alpha\,\partial x^\beta} y^\beta D^\alpha\psi\lambda^{-2|\alpha|} + \sum_{\substack{2j+|\alpha+\beta|<N,\\ j\geq 2}} \widetilde{q}^{\,j}_{(\alpha,\beta)}(0,\xi^0)$$

$$\times y^\beta D^\alpha\psi\lambda^{-2j+2-2|\alpha|}\Big\|_0 + \lambda^{-N+2} \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} \lambda^{|\beta|-|\alpha|}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0\Big),\ \lambda\geq 1.$$

В силу условия теоремы 3 $\operatorname{Re} q_{-1}(0,\xi^0)<0$, а $\operatorname{Im} q_{-1}(x,\xi)$ имеет нуль нечетного порядка $2k+1$ относительно ξ_1 в точке $(0,\xi^0)$. Неразрешимость оператора $P(x, D)$ в случае, когда $k=0$, доказывается проще, и мы опускаем его. Пусть теперь $k\geq 1$. Тогда имеют место две возможности: либо в каждой точке $(\widetilde{x},\widetilde{\xi})$, расположенной в некоторой окрестности $(0,\xi^0)$, $\xi^0\neq 0$, в которой $\operatorname{Im} q_{-1}(\widetilde{x},\widetilde{\xi})=0 \to \dfrac{\partial \operatorname{Im} q_{-1}(\widetilde{x},\widetilde{\xi})}{\partial\xi_1}=0$, либо существует последовательность $(\widetilde{x}^m,\widetilde{\xi}^m)\to(0,\xi^0)$, такая, что

$$\operatorname{Im} q_{-1}(\widetilde{x}^m,\widetilde{\xi}^m)=0,\ \frac{\partial \operatorname{Im} q_{-1}(\widetilde{x}^m,\widetilde{\xi}^m)}{\partial\xi_1}\neq 0.$$

Поскольку во втором случае неразрешимость оператора $P(x, D)$ в нуле очевидна, то мы изучим только первую возможность. Итак,

$$\operatorname{Im} q_{-1}(\widetilde{x},\widetilde{\xi})=0,\ \widetilde{\xi}\neq 0 \to \frac{\partial \operatorname{Im} q_{-1}(\widetilde{x},\widetilde{\xi})}{\partial\xi_1}=0$$

для любой точки $(\widetilde{x},\widetilde{\xi})$. Но тогда лемма 1.1 из [8] утверждает, что

$$|\operatorname{grad} \operatorname{Im} q_{-1}(0,\xi_1,\xi'^0)|^2 \leq C|\operatorname{Im} q_{-1}(0,\xi_1,\xi'^0)| \tag{23}$$

в некоторой окрестности $\{\xi_1 \mid |\xi_1|<\delta,\ \delta>0\}$.

Элементарное каноническое преобразование $x_1\to\xi_1$, которое мы сделали, показывает, что для преобразованного оператора q_{-1} можно предполагать выполнение неравенства (23) и кроме того

$$\operatorname{Im} q_{-1}(x_1, 0, 0, \xi'^0) = C_1 x_1^{2k+1} + O(x_1^{2k+2}),\ x_1 \to 0;\ C_1 = \mathrm{const} \neq 0.$$

Мы докажем теорему 3, показывая, что для любых значений констант C и s не выполняется неравенство (22). Таким образом, будет нарушаться необходимое условие (19) для локальной разрешимости оператора $P(x, D)$ в классе финитных распределений.

В процессе доказательства нам понадобится решить одно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Лемма 8. *Пусть $q_{-1}(x, \xi)$ — символ минус первого порядка, для которого выполнены предположения теоремы 3. Тогда для любого натурального $N > 2$ в некоторой окрестности точки $y^0 = 0$ существует аналитическое решение $h(y)$ задачи Коши*

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)^2 + \sum_{|\beta| \leq N-2}' \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta \overline{q}_{-1}(0, \xi^0)}{\partial x^\beta} y^\beta = 0, \tag{24}$$
$$h(0, y') = i|y'|^2$$

и такое, что

$$\operatorname{Im} h \geq C_0(y_1^{2k+2} + |y'|^2),\ C_0 > 0,\ y = (y_1, y'). \tag{25}$$

Доказательство. Существование решения задачи Коши очевидно. Оценка (25) играет для нас существенную роль, и мы докажем ее подробно. Так как $\operatorname{Re} q_{-1}(0, \xi^0) < 0$, то можно считать, что

$$\sum_{|\beta| \leq N-2} (\beta!)^{-1} \frac{\partial^\beta \operatorname{Re} q(0, \xi^0)}{\partial x^\beta} y^\beta < 0,\ |y| < \varepsilon.$$

С другой стороны, если $N > \max(4, 2k+3)$, то выполняется неравенство

$$\left|\operatorname{grad}_y \sum_{|\beta| \leq N-2} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta \operatorname{Im} q_{-1}(0, \xi^0)}{\partial x^\beta} y^\beta\right|^2 (y_1, 0) \leq C \left|\sum_{|\beta| \leq N-2} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta \operatorname{Im} q_{-1}(0, \xi^0)}{\partial x^\beta} y^\beta\right| (y_1, 0).$$

Таким образом,

$$\sum_{|\beta| \leq N-2} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta \operatorname{Im} \overline{q}_{-1}(0, \xi_0)}{\partial x^\beta} y^\beta = C_1 y_1^{2k+1} + \sum_{j=2}^{n} C_j y_j y_1^{k+1} + O(y_1^{2k+2} + |y'|^2),$$
$$y \to 0;\quad C_1 \neq 0,\quad C_j = \mathrm{const}.$$

Поскольку отрезок Тейлоровского разложения — аналитическая функция и $\operatorname{Re} \overline{q}_{-1}(0, \xi^0) < 0$, то существует ветвь квадратного корня. Мы выбираем его знаком „+“, если $C_1 < 0$, и знаком „−“, если $C_1 > 0$. Следовательно

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = i\sqrt{\sum_{|\beta| \leq N-2} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta \overline{q}(0, \xi^0)}{\partial x} y^\beta},$$

так, что $h(0, y') = i|y'|^2$,

$$h(y_1, y') = i|y'|^2 + i\int_0^{y_1} \sqrt{\sum_{|\beta| \leq N-2} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta q_{-1}(0, \xi^0)}{\partial x^\beta} y'^{\beta'} s_1^{\beta_1}}\, ds_1,\ \beta = (\beta_1, \beta').$$

Обозначим через $A(y)$ вещественную часть Тейлоровского разложения функции $\overline{q}(y, \xi^0)$, а через $B(y)$ — мнимую часть. Тогда

$$\sqrt{(A+iB)}=i\sqrt{(-A)}\,.\,\sqrt{(1+iBA^{-1})}=\pm i\left(1+\frac{i}{2}BA^{-1}+O(B^2A^{-2})\right)\sqrt{(-A)}.$$

Из этого равенства немедленно делаем вывод, что $C'(y_1^{2k+2}+|y'|^2)\geq \operatorname{Im} h \geq C_0(y_1^{2k+2}+|y'|^2)$ в некоторой окрестности точки $y^0=0$, $C_0, C'=\mathrm{const}>0$.

А теперь закончим доказательство теоремы 3. Пусть ω — такая окрестность нуля, что в ней существует решение h уравнения (24) со свойством (25).

Функцию $\psi(y)$, для которой не выполнено неравенство (22), будем искать в следующем виде:

$$\psi(y)=\sum_{j=0}^{L}\lambda^{-j}\varphi_j(y)\exp(i\lambda h(y)),\quad \text{где}\quad \varphi_j\in C_0^\infty(\omega).$$

Заметим, что в этой ситуации мы пользуемся только одной фазовой функцией h, несмотря на то, что характеристики оператора P двукратные. Имеем

$$-\lambda^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}-2it\sum_{1\leq|\alpha|<N-3}y_1\frac{\partial^\alpha(\xi_1|\xi|^{-2})}{\partial\xi^\alpha}(\xi^0)\frac{1}{\alpha!}D^\alpha\psi\lambda^{-|\alpha|}$$

$$+\sum_{|\alpha+\beta|<N-2}\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\overline{q}(0,\xi^0)}{\partial\xi^\alpha\,\partial x^\beta}y^\beta D^\alpha\psi\lambda^{-2|\alpha|}+\sum_{2j+|\alpha+\beta|<N,\,j\geq 2}\widetilde{q}^{\,j}_{(\alpha,\beta)}(0,\xi^0)$$

$$\times y^\beta D^\alpha\psi\lambda^{-2j+2-2|\alpha|}=\exp(i\lambda h)\sum_{j=0}^{L-N+3}a_j(y)\lambda^{-j}.$$

Легко подсчитать, что

$$a_0(y)=L(h)\varphi_0=0,\ \text{где}\ L(h)=\left(\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)^2+\sum_{|\beta|<N-2}\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta\overline{q}(0,\xi^0)}{\partial x^\beta}y^\beta,$$

$$a_1(y)=L(h)\varphi_1-2i\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial y_1}+B(y)\varphi_0=-2i\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial y_1}+B(y)\varphi_0,$$

где $B(y)$ — аналитическая функция в окрестности нуля,

$$a_\mu(y)=-2i\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial y_1}+B(y)\varphi_{\mu-1}+C_\mu;$$

C_μ — линейная комбинация функций $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mu-2}$ и их производных. Нас не интересуют явные выражения для B, C_μ, и поэтому мы их не выписываем.

Поскольку $\frac{\partial h}{\partial y_1}(0)=\sqrt{(\overline{q}(0,\xi^0))}\neq 0$, мы можем найти аналитическое решение задачи Коши:

$$-2i\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial y_1}+B(y)\varphi_0=0,$$
$$\varphi_0(0,y')=1.$$

Аналогично строим в окрестности нуля аналитические функции φ_μ.

$$-2i\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial y_1}\,\frac{\partial h}{\partial y_1}+B(y)\varphi_{\mu-1}+C_\mu=0,$$
$$\varphi_{\mu-1}(0,y')=0.$$

Так как функции φ_μ не финитные, то вводим срезающую функцию g, $g \in C_0^\infty(\omega)$, $g = 1$ в области $\omega' \subset \subset \omega$. Тогда нетрудно сообразить, что $g\varphi_\mu$ являются решениями уравнений:

$$-2i\frac{\partial(g\varphi_{\mu-1})}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}+B(y)\varphi_{\mu-1}g+C_\mu=0((y_1^{2k+2}+|y'|^2)^{N-\mu}),\ y\to 0,$$

$$g\varphi_{\mu-1}(0, y')=0,\ \mu\geq 2.$$

Теперь можем закончить доказательство теоремы 3. Во-первых,

$$\|\psi\|_0^2=\int|\sum_{j=0}^{L}\varphi_j(y)\lambda^{-j}|^2\exp(-2\lambda\operatorname{Im}h)\,dy$$

$$\geq\int|\sum_{j=0}^{L}\varphi_j(y_1\lambda^{-1/(2k+2)},\ y'\lambda^{-1/2})\lambda^{-j}|^2\exp[-2c_0(y_1^{2k+2}+|y'|^2)]\,dy$$

$$\times\lambda^{-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2k+2}}=\lambda^{-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2k+2}}\Big[\int|\varphi_0(0)|^2\exp[-2c_0(y_1^{2k}+|y'|^2]\,dy+0\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big].$$

Потом заметим, что

$$\|\exp(i\lambda h)\sum_{j=0}^{L-N+3}a_j(y)\lambda^{-j}\|_0^2\leq C\sum_{j=0}^{L-N+3}\lambda^{-2j}$$

$$\times\int(y_1^{2k+2}+|y'|^2)^{2N-2j}\exp[-2\lambda C_0(y_1^{2k+2}+|y'|^2]\,dy\leq C'\lambda^{-2N}.$$

Наконец подсчитаем

$$\lambda^{-N+2}\sum_{|\alpha+\beta|\leq N}\lambda^{|\beta|-|\alpha|}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0\leq C''\lambda^{-N+2}\sum_{|\alpha+\beta|\leq N}\lambda^{|\beta|-|\alpha|}\lambda^{|\alpha|-|\beta|/(2k+2)}\leq C'''\lambda^{2-N(1-\frac{1}{2k+2}}$$

(т. к. $|y|^{2k}\leq\operatorname{const}(y_1^{2k}+|y'|^2)$ при $|y|\leq 1$).

Следовательно

$$C_0\lambda^{-\frac{n-1}{4}-\frac{1}{4k+4}}\leq C'\lambda^{-N-2S-2}+C'''\lambda^{-2S-N(1-1/(2k+2)},$$

где константы C_0, C', C''' не зависят от λ. Выбирая

$$N>\max\Big[-2s-2+\frac{1}{4k+4}-\frac{n-1}{4},\ \Big(\frac{n-1}{4}+\frac{1}{4k+4}-2s\Big)\Big(1-\frac{1}{2k+2}\Big)^{-1}\Big],$$

мы доходим до противоречия при $\lambda\to\infty$. Таким образом, теорема 3 доказана.

В конце заметим, что невыполнение неравенства (22) для любых C, s, кроме неразрешимости, дает нам возможность доказать следующую теорему о негладкости.

Теорема 4. *Пусть для оператора $P(x, D)$ с символом $x_1^2+q_{-1}(x,\xi)$ выполнены предположения теоремы 3. Тогда для любых вещественных чисел ϱ и $\varrho'(\varrho'<\varrho)$ и любой окрестности ω точки O существует функция $u\in H^{s+\varrho'}(K)$ с носителем в ω, и такая, что $Pu\in C^\infty$, но $u\overline{\in}H^{s+\varrho}(K)$.*

Таким образом, оказывается, что операторы P, P^*, где $p=x_1^2+q_{-1}(x,\xi)$, $q_{-1}(0,\xi^0)\neq 0$ и $\mathrm{Re}\ q_{-1}(x,\xi)$ имеет нуль нечетного порядка относительно ξ_1 в точке $(0,\xi^0)$, одновременно неразрешимы и негладки в нуле.

Замечание. В последние два года, после того как эта статья была дана в печать, вышло большое количество работ по операторам с двукратными характеристиками. Отметим прежде всего работу: L. Hörmander. A class of pseudodifferential operators with double characteristics. *Math. Annalen*, **217**, 1975, в которой изучается оценка с потерей гладкости на одну единицу для весьма общего класса уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Kohn, L. Nirenberg. An algebra of pseudodifferential operators. *Communs. Pure and Appl. Math.*, **18**, 1965, 1/2, 269—307.
2. L. Hörmander. Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. Math.*, **83**, 1966, 1, 129—209.
3. L. Hörmander. Pseudodifferential equations and hypoelliptic equations. *Proc. Symp. in Pure Math.*, **10**, 1967, 138—183.
4. Л. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, 1965.
5. Ю. В. Егоров. Псевдодифференциальные уравнения главного типа. *Мат. сб.*, **73**, 1967, 356—374.
6. Ю. В. Егоров. Канонические преобразования и псевдодифференциальные операторы. *Тр. Моск. мат. о-ва*, **24**, 1971, 3—29.
7. Ю. В. Егоров. О необходимых условиях разрешимости псевдодифференциальных уравнений главного типа. *Тр. Моск. мат о-ва*, **24**, 1971, 29—43.
8. L. Nirenberg, F. Trèves. On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary conditions. *Communs. Pure and Appl. Math.*, **23**, 1970, No. 1, 1—38.
9. Г. И. Эскин. Эллиптические псевдодифференциальные операторы с вырождением первого порядка по пространственным переменным. *Тр. Моск. мат. о-ва*, **25**, 83—119.
10. J. Sjöstrand. Une classe d'opérateurs pseudodifferentiels à caracteristiques doubles. *C. r. Acad., sci. Paris*, **276**, 1973, 1197—1231.
11. Ю. В. Егоров, П. Р. Попиванов. Об уравнениях главного типа, не имеющих решений. *Успехи мат. наук*, **29**, 1974, No. 2, 172—189.
12. Ф. Трев., О локальной разрешимости линейных дифференциальных уравнений с частными производными. *Успехи мат. наук*, **29**, 1974, No. 2, 252—281.
13. L. Boutet de Monvel, E. Trèves. On a class of pseudodifferential equations with double characteristics. *Invent. math.*, **24**, 1974, No. 1, 1—34.
14. П. Р. Попиванов. О разрешимости и гипоэллиптичности дифференциальных уравнений. *Успехи мат. наук*, **29**, 1974, No. 1, 185—187.
15. П. Р. Попиванов. О локальной разрешимости одного класса псевдодифференциальных уравнений с двукратными характеристиками. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **1**, 1975, 236—278.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 12. 8. 1974