Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ВЕСЕЛИН М. ПЕТКОВ

В работе рассматривается задача Коши для одного класса гиперболических уравнений с двукратными характеристиками переменной кратности. Предполагается, что все характеристические корни $\lambda_j(x,\xi')$ простые, за исключением $\lambda_1(x,\xi')$ и $\lambda_2(x,\xi')$. Показывается, что если в точках, где нарушается строгая гиперболичность оператора, собственные числа фундаментальной матрицы и субглавный символ оператора обращаются в 0 как разность $\lambda_1(x,\xi')-\lambda_2(x,\xi')$, то для оператора справедлива априорная оценка, от которой вытекает теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Рассмотрим оператор

$$P=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha,$$

где $x=(x_0,x')$, $x'=(x_1,\ldots,x_n)$, $x\in\Omega=[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $T>0$,

$$D^\alpha=D_0^{\alpha_0}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Предположим, что $a_{m,0,\ldots,0}\equiv 1$, $a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)$ и для $|x'|\geq R$ коэффициенты $a_\alpha(x)$ не зависят от x'. Это ограничение несущественно, и оно делается только для упрощения изложения. Пусть $\xi=(\xi_0,\xi')$, $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — двойственные переменные,

$$P_s(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\quad P_m(x,\xi)=Q_1(x,\xi)Q_2(x,\xi),$$

где

$$Q_1(x,\xi)=\xi_0-\lambda_1(x,\xi'),\quad Q_2(x,\xi)=\prod_{j=2}^m(\xi_0-\lambda_j(x,\xi')).$$

Сделаем следующее предположение:

(H) Все функции $\lambda_j(x,\xi')$, $j=1,\ldots,m$, вещественные для $(x,\xi')\in\Omega\times\mathbb{R}^n$, принадлежат $C^\infty(\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0))$, и для $\mu,\nu=1,\ldots,m$, $(\mu,\nu)\neq(1,2)$ имеем $\lambda_\mu(x,\xi')\neq\lambda_\nu(x,\xi')$.

Из (H) следует, что $Q_2(x,\xi)$ — строго гиперболический полином. С другой стороны, $\lambda_1(x,\xi')$ и $\lambda_2(x,\xi')$ могут совпадать, и в общем случае для корректности задачи Коши для оператора P необходимо накладывать некоторые условия на младшие члены [1]. Так как символы Q_1, Q_2 — гладкие функции, то все собственные числа фундаментальной матрицы $F_{P_m}(x,\xi)$ [1] равны нулю за исключением, быть может, $\pm\mu(x,\xi)$, где

$$\mu(x,\xi)=\{Q_1,Q_2\}(x,\xi)=\sum_{j=0}^n\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial x_j}(x,\xi)\frac{\partial Q_2}{\partial\xi_j}(x,\xi)-\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_j}(x,\xi)\frac{\partial Q_2}{\partial x_j}(x,\xi)\right\}.$$

В [1] показано, что если в некоторой точке $(\hat{x}, \hat{\xi}')\in\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ имеем $\hat{\xi}_0=\lambda_1(\hat{x}, \hat{\xi}')=\lambda_2(\hat{x}, \hat{\xi}')$, $\mu(\hat{x}, \hat{\xi})=0$, то для корректности задачи Коши для P даже в самом слабом смысле необходимо условие

$$P'_{m-1}(\hat{x}, \hat{\xi})=0,$$

где $P'_{m-1}(x, \xi)$ — субглавный символ оператора P,

$$P'_{m-1}(x, \xi)=P_{m-1}(x, \xi)+\frac{i}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 P_m(x, \xi)}{\partial x_j\partial\xi_j}.$$

В этой работе мы докажем, что если в точках $(\hat{x}, \hat{\xi})$, где нарушается строгая гиперболичность оператора P, $\mu(x, \xi)$ и $P'_{m-1}(x, \xi)$ обращаются в нуль как разность $[\lambda_1(x, \xi')-\lambda_2(x, \xi')]$, то задача Коши для P корректно поставлена.

Обозначим через $S^\sigma(\Omega)$ класс функции $a(x, \xi')\in C^\infty(\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0))$, положительно однородных по ξ' степени σ и не зависящих от x' для больших $|x'|$. Каждой функции $a(x, \xi')$, называемой символом, сопоставляется псевдодифференциальный оператор (п. д. о.), зависящий от параметра x_0 и определяемый формулой

$$A(x_0)u=F^{-1}_{\xi'\to x'}(a(x, \xi')F_{x'\to\xi'}u(x)),\quad u(x)\in C_0^\infty(\Omega),$$

где $F_{x'\to\xi'}u(x)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$ по x'. Свойства этих операторов изложены в [4], [5]. Аналогично определяются матричные п. д. о. с матричными символами [5]. Если каждый элемент символа $a(x, \xi')$ принадлежит $S^\sigma(\Omega)$, то мы будем писать $a(x, \xi')\in\mathcal{S}^\sigma(\Omega)$. Заметим, что каждый оператор с символом $a(x, \xi')\in S^\sigma(\Omega)$ продолжается до ограниченного оператора из $H_{s+\sigma}(\mathbb{R}^n)$ в $H_s(\mathbb{R}^n)$, s — любое [5], причем

$$|||A(x_0)u(x_0, x')|||_{k,s}\leq C_{k,s}|||u(x_0, x')|||_{k,s+\sigma},\quad x_0\in[0, T],$$

где

$$|||u(x_0, x')|||^2_{k,s}=\sum_{j=0}^{k}\|D_0^j u(x_0, x')\|^2_{H_{s-j}(\mathbb{R}^n_{x'})}.$$

Введем следующее условие: (L) Существует вещественные символы $m(x, \xi')$, $p(x, \xi')\in S^{m-2}(\Omega)$, для которых

$$\mu(x, \lambda_1(x', \xi'), \xi')=[\lambda_1(x, \xi')-\lambda_2(x, \xi')]m(x, \xi'),$$

$$P'_{m-1}(x, \lambda_1(x, \xi'), \xi')=i[\lambda_1(x, \xi')-\lambda_2(x, \xi')]p(x, \xi').$$

Условие (L) обобщает условие Е. Е. Леви для уравнений с характеристическими корнями постоянной кратности [1, 7]. Очевидно, что условие (L) выполнено одновременно для P и для формально сопряженного оператора ${}^tP$, так как

$${}^tP'_{m-1}(x, \xi)=-P'_{m-1}(x, \xi).$$

Кроме того, условие (L) симметрично относительно корней λ_1, λ_2. В самом деле, легко проверить, что

$$\mu(x, \lambda_1(x, \xi'), \xi') - \mu(x, \lambda_2(x, \xi'), \xi') = [\lambda_1(x, \xi') - \lambda_2(x, \xi')] m_1(x, \xi'),$$

$$P'_{m-1}(x, \lambda_1(x, \xi'), \xi') - P'_{m-1}(x, \lambda_2(x, \xi'), \xi') = [\lambda_1(x, \xi') - \lambda_2(x, \xi')] p_1(x, \xi'),$$

где вещественные символы m_1, $p_1 \in S^{m-2}(\Omega)$.

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть для оператора P выполнены предположения* (H) *и* (L). *Тогда для любого целого числа $k \geqq m-2$ и любого вещественного числа s существует константа $C_{k,s}$, такая, что справедлива оценка*

$$\int_0^T ||| u(x_0, x') |||^2_{k,s+m-1} dx_0 \leqq C_{k,s} [||| u(0, x') |||^2_{k+1,s+m} \tag{1}$$

$$+ \int_0^T ||| Pu(x_0, x') |||^2_{k-m+2,s+1} dx_0], \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Для доказательства теоремы 1 мы сводим в п. 1 уравнение $Pu = f$ к псевдодифференциальной (п. д.) системе первого порядка, которая напоминает систему в [7]. Для старшего символа этой системы в п. 2 мы строим в явном виде симметризатор (см. [2, 5]) и в п. 3 из оценки для п. д. системы выводим оценку (1).

1. Псевдодифференциальная система первого порядка. Пусть Λ_k, $k = 1, \ldots, m$ — п. д. о. с символами $\xi_0 - \lambda_k(x, \xi')$. Представим оператор P в виде $P = \Pi_m + \Pi_{m-1} + Q_{m-2}$, где $\Pi_m = \Lambda_2 \Lambda_m \Lambda_{m-1} \ldots \Lambda_3 \Lambda_1$, Π_{m-1} — старшая часть оператора $(P_m - \Pi_m + P_{m-1})$, Q_{m-2} — п. д. о. $(m-2)$-го порядка.

Введем операторы:

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_1 = \Lambda_1, \ \Delta_2 = \Lambda_3 \Lambda_1, \ldots, \ \Delta_{m-1} = \Lambda_m \Lambda_{m-1} \ldots \Lambda_3 \Lambda_1.$$

Оператор Π_{m-1} можно представить в виде суммы

$$\Pi_{m-1} = i \sum_{j=0}^{m-1} R_{m-j-1}(x, D_{x'}) \Delta_j + R_{m-2},$$

где R_{m-j-1} — операторы с вещественными символами $r_{m-j-1} \in S^{m-j-1}(\Omega)$, R_{m-2} — оператор $(m-2)$-го порядка. Для определения символов r_{m-j-1} надо решить систему

$$\left. \frac{\partial^k \Pi_{m-1}(x, \xi)}{\partial \xi_0^k} \right|_{\xi_0 = \lambda_1} = i \sum_{j=0}^{m-1} r_{m-j-1}(x, \xi') \left. \frac{\partial^k \Delta_j(x, \xi)}{\partial \xi_0^k} \right|_{\xi_0 = \lambda_1}, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Следующая лемма дает представление символа $r_{m-1}(x, \xi')$.

Лемма 1. *Если выполнены предположения*, (H) *и* (L), *то существует вещественный символ $g(x, \xi') \in S^{m-2}(\Omega)$, для которого*

$$r_{m-1}(x, \xi') = [\lambda_1(x, \xi') - \lambda_2(x, \xi')] g(x, \xi').$$

Доказательство. Рассмотрим оператор Q с символом

$$q(x, \xi) = \prod_{j=2}^{m} (\xi_0 - \lambda_j(x, \xi')).$$

Пусть $\sigma_0(L)$ означает старший символ оператора L. Так как

$$\sigma_0(Q\Lambda_1 - \Pi_m)\,|_{\xi_0=\lambda_1} = 0,$$

то

$$\sigma_0(P_m - \Pi_m)\,|_{\xi_0=\lambda_1} = \sigma_0(P_m - Q\Lambda_1)\,|_{\xi_0=\lambda_1}.$$

По формуле о произведении псевдодифференциальных операторов получим

$$\sigma_0(P_m - Q\Lambda_1) = -i \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial q}{\partial \xi_k} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_k}.$$

Тогда, учитывая предположение (L), найдем

$$r_{m-1}(x, \xi') = -i\sigma_0(P_m - \Pi_m)\,|_{\xi_0=\lambda_1} - iP_{m-1}(x, \lambda_1, \xi')$$

$$= -iP_{m-1}(x, \lambda_1, \xi') + \Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_k} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_0}\Big] l_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) h_1$$

$$= -iP_{m-1}(x, \lambda_1, \xi') + \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_k} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_k}\Big)$$

$$- \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_0} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_0}\Big] l_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) h_2$$

$$= -iP'_{m-1}(x, \lambda_1, \xi') + (\lambda_1 - \lambda_2) h_3 = (\lambda_1 - \lambda_2) h_4,$$

где вещественные символы h_μ, $\mu = 1, \ldots, 4$, принадлежат $S^{m-2}(\Omega)$, $l_1 = \prod_{j=3}^{m} (\lambda_1 - \lambda_j)$, если $m \geq 3$, $l_1 = 1$, если $m = 2$. Лемма доказана.

В п. 3 мы получим априорную оценку с большим параметром для оператора

$$L = \Pi_m + i \sum_{j=0}^{m-1} R_{m-j-1}(x, D_{x'}) \Delta_j.$$

Обозначим через Λ п. д. о. с символом $|\xi'|$ и положим

$$U = (\Lambda^{m-2} u,\ \Lambda^{m-3} \Delta_1 u, \ldots,\ \Lambda \Delta_{m-3} u,\ \Delta_{m-2} u,\ \Delta_{m-1} u),$$

$$F = (0, \ldots, 0, f).$$

Тогда уравнение $Lu = f$ сводится к п. д. системе

(2) $$MU = [D_0 - A(x, D_{x'})]U + B(x, D_{x'})U = F,$$

где $A(x, D_{x'})$ — п. д. о. с символом

$$a(x,\xi') = \begin{vmatrix} \lambda_1 |\xi'|^{-1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_3 |\xi'|^{-1} & 1 & \cdot & & & 0 \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & 1 & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \lambda_m |\xi'|^{-1} & 0 \\ -ir_{m-1}|\xi'|^{1-m} & -ir_{m-2}|\xi'|^{2-m} & \cdot & \cdot & \cdot & -ir_1|\xi'|^{-1} & \lambda_2|\xi'|^{-1} \end{vmatrix},$$

$$B(x, D_{x'}) = \begin{vmatrix} [\Lambda^{m-2}, \Lambda_1]\Lambda^{2-m} & 0 & & & & \\ 0 & [\Lambda^{m-3}, \Lambda_3]\Lambda^{3-m} & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ 0 & & & [\Lambda, \Lambda_{m-1}]\Lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & -1 \\ 0 & & & 0 & 0 & iR_0 \end{vmatrix},$$

где, как обычно, $[C, D]$ означает коммутатор операторов C, D.

В следующем параграфе мы докажем, что для символа $a(x, \xi')$ существует симметризатор [2, 5].

2. Построение симметризатора. Обозначим через a^* матрицу, комплексно сопряженную матрице a. Имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения* (H) и (L). *Тогда существует символ* $s(x, \xi') = s^*(x, \xi') \in \mathcal{S}^0(\Omega)$, *для которого выполнены условия*

(a) $s(x, \xi')a(x, \xi') = a^*(x, \xi')s(x, \xi')$,

(б) *матрица* $s(x, \xi')$ *равномерно положительно определена для* $x \in \Omega$, $|\xi'| = 1$.

Доказательство. Заметим сначала, что из (H) и соображений компактности следует, что существует $\delta > 0$, для которого справедливы неравенства $|\lambda_\mu(x, \xi') - \lambda_\nu(x, \xi')| \geq \delta |\xi'|$, если $\mu, \nu = 1, \ldots, m$, $(\mu, \nu) \neq (1, 2)$, $x \in \Omega$, $\xi' \in \mathbb{R}^n$.

Мы будем искать матрицу $\{s_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu=1}^m$, $s_{\mu,\nu} = \overline{s_{\nu,\mu}}$, для которой

$$w = sa - a^*s = 0.$$

Пусть $w = \{w_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu=1}^m$. Тогда достаточно определить $s_{\mu,\nu}$ таким образом, чтобы

$$w_{\mu,\nu} = 0, \quad \mu \leq \nu, \quad \nu = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Положим $s_{m,m} = 1$ и найдем сначала элементы $s_{\mu,m}$, $\mu = 1, \ldots, m-1$. Для $s_{1,m}$ получим уравнение

$$w_{1,m} = s_{1,m}(\lambda_2 - \lambda_1)|\xi'|^{-1} - ir_{m-1}|\xi|^{1-m} = 0.$$

Из этого уравнения и леммы 1 получим $s_{1,m} = -ig|\xi'|^{2-m}$.

Допустим, что элементы $s_{\mu,m}$, $\mu = 1, \ldots, k-1$, уже определены, причем $\mathrm{Re}\,(s_{\mu,m}) = 0$, $\mu = 1, \ldots, k-1$. Найдем $s_{k,m}$, так что

$$w_{k,m} = s_{k,m}(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\,|\xi'|^{-1} - s_{k-1,m} - i r_{m-k}\,|\xi'|^{k-m} = 0.$$

Это возможно, потому что $|\lambda_2 - \lambda_{k+1}| \geq \delta\,|\xi'|$ для $k=2,\ldots,m-1$. При этом получим, что $\operatorname{Re}(s_{k,m}) = 0$.

После того как определены $s_{\mu,m}$, $\mu = 1,\ldots,m$, будем определять последовательно элементы угловых миноров матрицы s.

Положим $s_{1,1} = a_1$, где константа $a_1 > 0$ будет подобрана позже. Предположим, что уже определены все элементы $s_{\mu,\nu}$, $\mu \leq \nu$, $\nu = 1,\ldots,k-1$, причем $\operatorname{Im}(s_{\mu,\nu}) = 0$ для всех этих индексов. Элементы $s_{\mu,k}$, $\mu < k$, найдем из рекуррентных соотношений:

$$w_{1,k} = s_{1,k-1} + s_{1,k}(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\,|\xi'|^{-1} - i s_{1,m}\,\overline{r_{m-k}}\,|\xi'|^{-(m-k)} - i\overline{s_{k,m}}\,r_{m-1}\,|\xi'|^{1-m} = 0,$$

. . . .

$$w_{\mu,k} = s_{\mu,k-1} + s_{\mu,k}(\lambda_{k+1} - \lambda_\mu)\,|\xi'|^{-1} - i s_{\mu,m}\,\overline{r_{m-k}}\,|\xi'|^{-(m-k)} - \overline{s_{\mu-1,k}} - i\overline{s_{k,m}}\,r_{m-\mu}\,|\xi'|^{\mu-m},$$

где $\mu \leq k-1$. Все эти уравнения можно разрешить относительно $s_{\mu,k}$, так как для $(\mu,\nu) \neq (1,2)$ имеем $\lambda_\mu - \lambda_\nu \neq 0$. Кроме того, сразу видно, что $\operatorname{Im}(s_{\mu,k}) = 0$. Выбираем $s_{k,k} = a_k$, где константа $a_k > 0$ будет определена позже, и получаем

$$w_{k,k} = 2\operatorname{Im}\left(s_{k,k-1} + a_k\lambda_{k+1}\,|\xi'|^{-1} - i s_{k,m} \overline{r_{m-k}}\,|\xi'|^{k-m}\right) = 0$$
$$k = 2,\ldots,m-1,$$
$$w_{1,1} = 2\operatorname{Im}\left(a_1\lambda_1\,|\xi'|^{-1} - i s_{1,m}\,\overline{r_{m-1}}\,|\xi'|^{1-m}\right) = 0,\quad w_{m,m} = 0.$$

Таким образом, можно определить все элементы $s(x,\xi')$ так, чтобы выполнялись равенства (3).

Теперь мы покажем, что после подходящего выбора констант a_k, $k=1,\ldots,m-1$, матрица s будет положительно определена для $x \in \Omega$, $|\xi'| = 1$. Так как элементы $s_{\mu,\nu}$ не зависят от x' для больших $|x'|$, то s будет равномерно положительно определена.

Пусть $W = \{(x,\xi'),\ x \in \Omega,\ |\xi'| = 1\}$. Все элементы $s_{\mu,\nu}$ ограничены в W. Выбираем a_1 таким образом, чтобы в W выполнялось равенство

$$\eta_1 = a_1 - |s_{1,m}|^2 > 0.$$

Константы a_k, $k = 2,\ldots,m-1$, будем определять индуктивно.

Рассмотрим матрицы

$$S_k = \begin{vmatrix} a_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,k} \\ \overline{s_{1,2}} & a_2 & \ldots & s_{2,k} \\ \vdots & & & \\ \overline{s_{1,k}} & \overline{s_{2,k}} & \ldots & a_k \end{vmatrix}, \quad J_{k+1} = \begin{vmatrix} & & & s_{1,m} \\ & S_k & & s_{2,m} \\ & & & \vdots \\ & & & s_{k,m} \\ \overline{s_{1,m}} & \overline{s_{2,m}} & \ldots\ \overline{s_{k,m}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Предположим, что константы a_j, $j=1, \ldots, k-1$, уже выбраны и в W справедливы неравенства

$$\delta_j=\det S_j>0, \quad \eta_j=\det J_{j+1}>0, \quad j=1, \ldots, k-1.$$

Элементы матриц S_k, J_{k+1} не зависят от a_k. Поэтому для $j=k$ будем иметь $\delta_k=a_k\delta_{k-1}+\ldots$, $\eta_k=a_k\eta_{k-1}+\ldots$, где выписаны только те члены, в которые входит a_k. Учитывая, что $\delta_{k-1}>0$, $\eta_{k-1}>0$, и выбирая a_k достаточно большим, получим $\delta_k>0$, $\eta_k>0$.

Окончательно выбирая все константы a_k, $k=1, \ldots, m-1$, получим неравенства $\delta_k>0$, $\eta_k>0$, $k=1, \ldots, m-1$. Из равенства $\delta_m=\eta_{m-1}$ следует, что $\delta_m>0$. Следовательно, все угловые миноры матрицы s положительны в W, и s будет положительно определена. Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Обозначим через $C^k(H_s)$, $k\geq 0$—целое, пространство функций $u(x_0)$, зависящих от параметра $x_0\in[0, T]$ и принимающих значения в $H_s(\mathbb{R}^n)$, причем $D_0^j u(x)$, $j=0, 1, \ldots, k$, существуют как элементы $H_{s-j}(\mathbb{R}^n)$ и непрерывны в топологии $H_{s-j}(\mathbb{R}^n)$. Вектор-функция $U\in C^k(H_s)$, если все компоненты U принадлежат $C^k(H_s)$. Если $U=(U_1, \ldots, U_m)$, то

$$|||\, U\,|||^2_{k,s}=\sum_{\nu=1}^{m}|||\, U_\nu\,|||^2_{k,s}.$$

В п. 2 мы доказали, что для старшего символа системы (2) существует симметризатор. Тогда стандартным образом можно показать [5, 6], что для M справедлива оценка с большим параметром. Точнее, существует константа $\tau_{k,s}$, такая, что для всех $U\in C^{k+1}(H_{s+1})$ и $\tau\geq\tau_{k,s}$ справедлива оценка

$$\tau\int_0^T|||\, U(x_0, x')\,|||^2_{k,s}e^{-2\tau x_0}dx_0 \tag{4}$$

$$\leq C'_{k,s}[|||\, U(0, x')\,|||^2_{k,s}+\int_0^T|||\, MU(x_0, x')\,|||^2 e^{-2\tau x_0}dx_0].$$

Для удобства обозначений введем норму

$$\langle U(x_0, x')\rangle_{\tau,k,s}=|||\, U(x_0, x')\,|||_{k,s}e^{-\tau x_0}.$$

Пусть $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $U=(\Lambda^{m-2}u, \Lambda^{m-3}\Delta_1 u, \ldots, \Lambda\Delta_{m-3}u, \Delta_{m-2}u, \Delta_{m-1}u)$, $F=(0, \ldots, 0, Lu)$. Согласно (2) имеем $MU=F$. Применим оценку (4) для U, любого целого числа $k\geq m-2$ и любого вещественного числа s:

$$\tau\sum_{j=0}^{m-2}\int_0^T\langle\Lambda^{m-2-j}\Delta_j u\rangle^2_{\tau,k-m+2,s+1}\, dx_0\leq\tau\int_0^T\langle U\rangle^2_{\tau,k-m+2,s+1}dx_0$$

$$\leq C''_{k,s}\{\sum_{j=0}^{m-2}|||\,\Lambda^{m-2-j}\Delta_j u(0, x')\,|||^2_{k-m+2,s+1}$$

$$+ ||| \Delta_{m-1} u(0, x') |||^2_{k-m+2,s+1} + \int_0^T \langle Lu \rangle^2_{\tau,k-m+2,s+1} dx_0 \}$$

$$\leq C'''_{k,s} \{||| u(0, x') |||^2_{k+1,s+m} + \int_0^T \langle Lu(x_0, x') \rangle^2_{\tau,k-m+2,s+1} dx_0 \}.$$

Для любого $j=1, \ldots, m-2$, учитывая ограниченность операторов Λ_j, получим

$$\langle D_0^j \Lambda^{m-2-j} u \rangle_{\tau,k-m+2,s+1} \tag{5}$$

$$\leq C_j [\langle \Lambda^{m-2-j} \Delta_j u \rangle_{\tau,k-m+2,s+1} + \sum_{\nu=0}^{j-1} \langle \Lambda^{m-2-\nu} D_0^\nu u \rangle_{\tau,k-m+2,s+1}].$$

Из этих неравенств следует, что

$$\sum_{j=0}^{m-2} \langle \Lambda^{m-2-j} D_0^j u \rangle_{\tau,k-m+2,s+1} \leq \text{const} \sum_{j=0}^{m-2} \langle \Lambda^{m-2-j} \Delta_j u \rangle_{\tau,k-m+2,s+1}. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\langle u \rangle^2_{\tau,k,s+m-1} \leq \text{const} \sum_{j=0}^{m-2} \langle D_0^j u \rangle^2_{\tau,k-m+2,s+m-1-j} \tag{7}$$

$$\leq \text{const} \sum_{j=0}^{m-2} \langle \Lambda^{m-2-j} D_0^j u \rangle^2_{\tau,k-m+2,s+1}.$$

Наконец,

$$||| (Q_{m-2} + R_{m-2}) u |||_{k-m+2,s+1} \leq \text{const} ||| u |||_{k,s+m-1}, \tag{8}$$

где Q_{m-2}, R_{m-2} — операторы, определенные в п. 1. Все константы в (5)—(8) не зависят от x_0 и τ.

Таким образом, в силу (6)—(8) получим для больших τ

$$\tau \int_0^T \langle u \rangle^2_{\tau,k,s+m-1} dx_0 \leq C^{\mathrm{IV}}_{k,s} [||| u(0, x') |||^2_{k+1,s+m} + \int_0^T \langle Pu \rangle^2_{\tau,k-m+2,s+1}]. \tag{9}$$

Заметим, что если $0 \leq x_0 \leq T$, то

$$\langle u(x_0, x') \rangle^2_{\tau,k,s} \leq ||| u(x_0, x') |||^2_{k,s} \leq e^{2\tau T} \langle u(x_0, x') \rangle^2_{\tau,k,s}. \tag{10}$$

Из (9), (10) вытекает оценка (1). Этим доказана теорема 1.

Аналогично можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть для оператора P выполнены предположения* (H) *и* (L). *Тогда для любого целого числа $k \geq m-2$ и любого вещественного числа s существует константа $C_{k,s}$, такая, что справедлива оценка*

$$\int_0^T \|u(x_0, x')\|^2_{k,s+m-1} dx_0 \leq C_{k,s}[\|u(T, x')\|^2_{k+1,s+m}$$

$$+\int_0^T \|Pu(x_0, x')\|^2_{k-m+2,s+1} dx_0], \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Теоремы 1 и 2 можно доказать без предположения о стабилизации коэффициентов $a_\alpha(x)$ при $|x'| \to \infty$. Для этого надо воспользоваться п. д. операторами с ограниченными символами [8, 9].

Так как предположения (H) и (L) выполнены одновременно для P и для формально сопряженного оператора ${}^tP$, то, используя стандартную технику, можно доказать существование решения задачи Коши. Повторяя доказательство теоремы 9.3.2 из [10], можно показать, что для любой $f \in \mathring{H}_{(k,s)}(\overline{\mathbb{R}^+_{n+1}})$, где k — произвольное целое число, s — произвольное вещественное число, существует $u \in \mathring{H}_{(k+m-2,s)}(\overline{\mathbb{R}^+_{n+1}})$, для которой $Pu = f$ в Ω (относительно обозначений см. [10]).

Теорему единственности решения задачи Коши можно получить, используя технику доказательства теоремы Хольмгрена.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Иврий, В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических операторов. *Успехи мат. наук*, **29**, 1974, № 5, 3—70.
2. В. М. Петков. О задаче Коши для симметризуемых систем и для нестрого гиперболических уравнений. *Успехи мат. наук*, **26**, 1971, № 6, 251—252.
3. В. М. Петков. Задача Коши для гиперболических операторов с кратными характеристиками. Диссертация. Москва, 1972.
4. Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг. Алгебра псевдодифференциальных операторов. Псевдодифференциальные операторы. Москва, 1967, с. 9—62.
5. М. С. Агранович. Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов I порядка. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 1, 61—125.
6. М. С. Агранович. Граничные задачи для систем с параметром. *Мат. сб.*, **84**, 1971, № 1, 27—65.
7. S. Mizohata, Y. Ohya. Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques. *Publs. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Ser. A.* **4**. 1968. No. **2**, 511—526.
8. H. Kumano-go. Remarks on pseudo-differential operators. *J. Math. Soc. Japan*, **21**, 1969, No. 3, 413—438.
9. Л. Хёрмандер. Псевдодифференциальные уравнения и гипоэллиптические уравнения. Псевдодифференциальные операторы. Москва, 1967, с. 297—367.
10. Л. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, 1965.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 30. 10. 1974