Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА (p, q)-ЛАБИРИНТОВ

А. А. ПАНОВ

Из целочисленной решетки на плоскости выделим прямоугольник $D_{p,q}$ размером $q\times p$ и (p, q)-лабиринтом назовем замкнутую подобласть прямоугольника $D_{p,q}$, состоящую из элементарных квадратов решетки. Число (p, q)-лабиринтов обозначим через $L_{p,q}$. Бл. Сендовым и др. (1962) было показано, что подсчет ε-энтропии пространства непрерывных кривых, расположенных в единичном квадрате, с заданной на этом пространстве хаусдорфовой метрикой сводится к подсчету чисел $L_{p,q}$. Задача подсчета чисел $L_{p,q}$ подробно обсуждается Бл. Сендовым (1969).

Здесь доказывается предсказанное Сендовым (1969) существование пределов

$$\mu_q=\lim_{p\to\infty}(L_{p,q})^{1/pq},\quad \mu=\lim_{p,q\to\infty}(L_{p,q})^{1/pq}=\lim_{q\to\infty}\mu_q,$$

приводится простое доказательство того факта, что $\mu<2$ и точнее: $\mu<1{,}963\ldots$ Кроме того, доказано, что при больших n будет $L_{n,n}>2^{0,85915\,n^2}$ (т. е. при больших n подтверждается гипотеза Эрдеша, приведенная Сендовым (1969). Указано, что полученные результаты переносятся на многомерные лабиринты и некоторые близкие к лабиринтам объекты.

1. Введение. Как было показано в работе Сендова, Димиева и Пенкова [1], вычисление ε-энтропии пространства непрерывных кривых в единичном квадрате с заданной на этом пространстве хаусдорфовой метрикой сводится к подсчету объектов, называемых лабиринтами. Последняя задача подробно обсуждается в обзорной статье Сендова [2]. Настоящая работа как раз и возникла при попытке ответить на некоторые вопросы, поставленные в [2].

Сразу дадим определение (p, q)-лабиринта. Пусть на плоскости задана целочисленная решетка. Элементарным квадратом решетки будем

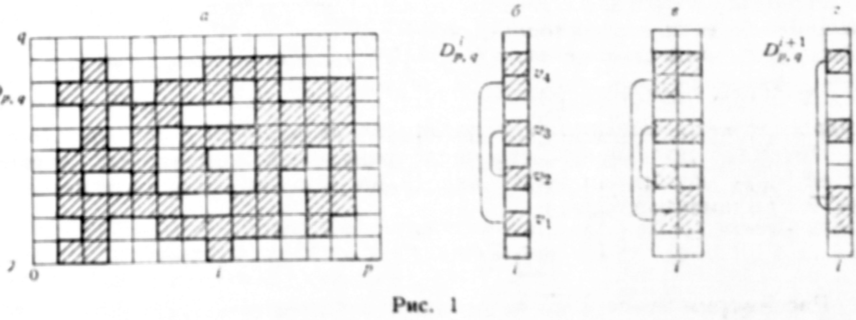

Рис. 1

называть единичный замкнутый квадрат, вершины которого лежат в узлах решетки. o-множеством будем называть внутренность множества, являющегося объединением элементарных квадратов.

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 399—408.

Определение 1. *Из целочисленной решетки на плоскости выделим прямоугольник $D_{p,q}$ размером $q \times p$. (p, q)-лабиринтом называется связное о-подмножество прямоугольника $D_{p,q}$.*

На рис. 1*а* приведен пример (p, q)-лабиринта. Данное здесь определение несколько отличается от определения, приведенного в [1, 2], но для обсуждаемых далее задач это отличие несущественно. Число (p, q)-лабиринтов обозначим $L_{p,q}$.

В настоящей работе исследуется поведение чисел $L_{p,q}$ при $p, q \to \infty$. В частности, устанавливаются следующие результаты.

Существует предел

$$\lim_{p,q\to\infty} (L_{p,q})^{1/pq} = \mu. \tag{1}$$

Для каждого $q \geq 2$ существуют такие числа c_q и μ_q, что

$$L_{p,q} \sim c_q \mu_q^{pq}, \quad p \to \infty. \tag{2}$$

(Знак $\sim$ употребляется здесь в том смысле, что отношение левой части (2) к правой стремится к 1.)

Кроме того,

$$\mu_q \leq \mu, \tag{3}$$

$$\mu_q \to \mu, \quad q \to \infty. \tag{4}$$

В работе [2] приведено значение $\mu_5 = 2^{0,85916\ldots}$. Отсюда, используя (1) и (3), получаем, что при достаточно больших n

$$L_{n,n} > 2^{0,85915\, n^2},$$

при больших n это доказывает приведенную в [2] гипотезу Эрдеша о том, что $L_{n,n} > 2^{3n^2/4}$.

И, наконец, в заключение будет дано простое и независящее от остального изложения доказательство того, что имеет место неравенство $\mu < 2$ и даже более точно $\mu < 1{,}963\ldots$

2. Жордановы эквивалентности и q-столбцы. Этот раздел носит вспомогательный характер. В нем приведены определения и ряд фактов, которые будут полезны при доказательстве соотношения (2).

Определение 2. *Пусть задано упорядоченное множество V. Отношение эквивалентности, определенное на V, называется жордановым, если для любых $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ истинно предложение*

$$\forall (v_1, v_2, v_3, v_4)[(v_1 < v_2 < v_3 < v_4 \text{ и } v_1 \sim v_3,\ v_2 \sim v_4) \Rightarrow (v_1 \sim v_2 \sim v_3 \sim v_4)] \tag{5}$$

(происхождение названия „жорданово“ выяснится в дальнейшем).

Нетрудно подсчитать, что число различных жордановых эквивалентностей $a(j)$, которые можно ввести на линейно упорядоченном множестве из j-элементов, равно

$$a(j) = C_{2j}^{j} - C_{2j}^{j-1} = \frac{(2j)!}{(j+1)!\, j!}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь o-подмножества прямоугольника $D_{1,q}$. Каждое такое подмножество $M \subset D_{1,q}$ разбивается на ряд компонент связности. Множество компонент o-подмножества M обозначим $V(M)$. Будем считать $V(M)$ линейно упорядоченным множеством, причем для $v_1, v_2 \in V(M)$ $v_1 < v_2$ в том и только в том случае, если компонента v_1 лежит в $D_{1,q}$ ниже компоненты v_2 (рис. 1, *о*).

Определение 3. *q-столбцом называется o-подмножество M прямоугольника $D_{1,q}$ вместе с жордановым отношением эквивалентности, заданном на линейно упорядоченном множестве компонент $V(M)$.*

В том случае, когда M — пустое подмножество $D_{1,q}$, q-столбец будем называть нулевым. Компоненту множества M будем называть и компонентой соответствующего q-столбца, а классом эквивалентности компоненты q-столбца будем называть и подмножество прямоугольника $D_{1,q}$, являющееся объединением компонент, эквивалентных данной.

Ясно, что число o-подмножеств прямоугольника $D_{1,q}$, имеющих в точности j компонент связности, равно C_{q+1}^{2j}. С учетом (6) отсюда получаем, что число всех ненулевых q-столбцов — $n(q)$, равно

$$n(q)=\sum_{j=1} C_{q+1}^{2j}\,\alpha(j)=\sum_{j=1} C_{q+1}^{2j}\frac{(2j)!}{(j+1)!\,j!}\,. \tag{7}$$

В частности, $n(1)=1$, $n(2)=3$, $n(3)=8$, $n(4)=20$, $n(5)=50$, $n(6)=126$ $n(7)=322$, $n(8)=834$ и т. д.

Поясним теперь, каким образом будут возникать q-столбцы при рассмотрении o-множеств. Пусть M — o-подмножество прямоугольника $D_{p,q}$. Разобьем прямоугольник $D_{p,q}$ вертикальными прямыми на p прямоугольников размером $q\times 1$. В порядке следования слева направо обозначим эти прямоугольники $D_{1,q}^{i}$, $i=1,\ldots,p$. Кроме того, введем еще обозначение $D_{i,q}$ для прямоугольников $D_{i,q}=\bigcup\limits_{j=1}^{i} D_{1,q}^{j}$. Множество M можно разбить на p частей $M^{i}=M\cap\mathring{D}_{1,q}^{i}$, где $\mathring{D}_{1,q}^{i}$ — внутренность прямоугольника $D_{1,q}^{i}$(рис. 1, *б*). При этом на множестве компонент $V^{i}=V(M)$ o-множества M^{i} возникает следующее отношение эквивалентности. Две компоненты $v_1, v_2\in V$ считаются эквивалентными, если они принадлежат одной компоненте связности множества $M\cap\mathring{D}_{i,q}$ (рис. 1, *б*). Используя теорему Жордана, легко доказать, что это отношение эквивалентности на V^{i} является жордановым, т. е. выполняется условие (5). Таким образом, видно, что o-множество $M\subset D_{p,q}$ определяет последовательность $m_1,\ldots,m_p$, состоящую из p q-столбцов, возникающих при пересечении M с внутренностью прямоугольников $D_{1,q}^{1},\ldots,D_{1,q}^{p}$. Ясно, что жорданова эквивалентность на столбце m_1 устроена наиболее просто — каждая компонента столбца эквивалентна самой себе и только.

Исследуем более детально связь, существующую между жордановыми эквивалентностями соседних столбцов m_i и m_{i+1}. Ясно, что, зная каково жорданово отношение на столбце m_i, можно, не используя более никакой информации о структуре множества $M\cap\mathring{D}_{i,q}$, однозначно установить жорданову эквивалентность, возникающую на V^{i+1} (рис. 1, *в*, *г*). Поэтому естественно ввести следующее

Определение 4. *Пусть имеются два столбца a и b. Будем говорить, что столбец a индуцирует жорданову эквивалентность на столбце b, если существуют такие p, i и такое $M\subset D_{p,q}$, что $a=m_i$ и $b=m_{i+1}$ в последовательности q-столбцов, индуцированных o-множеством M.*

При этом остается открытым вопрос, каждый ли q-столбец появляется в такой последовательности, индуцированной некоторым M, но то, что это так, выяснится ниже (см. предложение 1 и доказательство предложения 3).

3. q-столбцы и асимптотика чисел $L_{p,q}$ при $p\to\infty$. В этом разделе q-столбцы будут использованы для индуктивного построения (индукция по p при фиксированном q) некоторого достаточного массивного подкласса всех (p, q)-лабиринтов.

Определение 5. *$(p, q)'$-лабиринтом называется (p, q)-лабиринт, который при ортогональном проектировании полностью покрывает горизонтальную сторону прямоугольника $D_{p,q}$ (интервал $(0, p)$).*

Число $(p, q)'$-лабиринтов обозначим через $L'_{p,q}$. Поскольку имеется в точности $p-i+1$ целочисленных подынтервалов интервала $(0, p)$, имеющих длину i, для числа всех (p, q)-лабиринтов — $L_{p,q}$ получаем

$$L_{p,q}=\sum_{i=1}^{p}(p-i+1)L'_{i,q}+1. \tag{8}$$

(прибавляемая единица соответствует пустому лабиринту.)

Используя определение q-столбца, можно дать альтернативное определение $(p, q)'$-лабиринта.

Предложение 1. *Существует взаимнооднозначное соответствие между $(p, q)'$-лабиринтами и такими последовательностями из q-столбцов $m_1, \ldots, m_p$, что:*

(a) *среди q-столбцов $m_1, \ldots, m_p$ нет ненулевого столбца;*

(b) *каждая компонента столбца $m=m_1$ эквивалентна только самой себе;*

(c) *q_i-столбец m_i индуцирует жорданову эквивалентность на q-столбце m_{i+1}, $i=1, \ldots, p-1$;*

(d) *каждый класс жорданавой эквивалентности q-столбца m_i имеет непустое пересечение с некоторой компонентой q-столбца m_{i+1} (здесь столбцы m_i и m_{i+1} рассматриваются как подмножества одного прямоугольника $D_{1,q}$);*

(e) *все компоненты столбца $m=m_p$-эквивалентны между собой.*

Указанное взаимнооднозначное соответствие осуществляется при помощи сопоставления каждому $(p, q)'$-лабиринту последовательности q-столбцов, им индуцированной.

Не давая доказательства этого предложения, поясним некоторые пункты. Условие (a) гарантирует, что проекция множества, индуцирующего данную последовательность, полностью покрывает горизонтальную сторону $D_{p,q}$. Условия (b) и (c) обсуждались ранее, и существует взаимнооднозначное соответствие между последовательностями q-столбцов, удовлетворяющими только этим двум условиям, и всеми без исключения o-подмножествами прямоугольника $D_{p,q}$. И лишь условия (d) и (e) гарантируют связность рассматриваемого множества. При помощи условия (d) можно переходить из любого класса эквивалентности q-столбца m_i в q-столбец m_{i+1} (рис. 1, *в*), а при помощи условия (e) — из любой компоненты последнего q-столбца m_p в любую другую компоненту этого столбца.

Предложение 1 показывает, как $(p, q)'$-лабиринты склеиваются из q-столбцов.

Обозначим через A_q множество всех ненулевых q-столбцов, через A_q^0 — множество тех $m \in A_q$, для которых выполняется условие (b) предложения 1, и через A_q^1 — множество тех $m \in A_q$, для которых выполняется условие (e). Будем, кроме того, писать $m_i \prec m_{i+1}$ в том случае, когда для $m_i, m_{i+1} \in A_q$ выполняются условия (c) и (d). Через e_q^0 и e_q^1 обозначим функции, определенные на A_q и являющиеся характеристическими функциями, соответственно, A_q^0 и A_q^1. Через T_q обозначим линейный оператор, действующий на пространстве функций, определенных на A_q,

$$(T_q f)(a) = \sum_{\substack{b \prec a \\ b \in A_q}} f(b), \quad a \in A_q \tag{9}$$

и через (f, g) — число

$$(f, g) = \sum_{a \in A_q} f(a) g(a).$$

Предложение 2. *Число $(p, q)'$-лабиринтов — $L'_{p,q}$, равно*

$$L'_{p,q} = (T_q^{p-1} e_q^0, e_q^1). \tag{10}$$

Доказательство. Этот факт легко следует из того замечания, что значение функции $(T_q^{p-1} e_q^0)(a)$, $a \in A_q$, как это нетрудно видеть из определения (9) оператора T_q, равно числу последовательностей q-столбцов — $m_1, \ldots, m_p$, таких, что $m_1 \in A_q^0$; $m_j \prec m_{j+1}$; $m_p = a$. Т. е., $(T_q^{p-1} e_q^0)(a)$ равно числу таких последовательностей q-столбцов, которые удовлетворяют условиям (a) — (d) предложения 1 и которые заканчиваются столбцом a. И теперь остается указать, что скалярное умножение на функцию e_q^1 выделяет (суммирует) только те последовательности q-столбцов, для которых $m_p \in A_q^1$, т. е. выполняется условие (e) предложения 1. Обращаясь теперь к предложению 1, видим, что предложение 2 доказано.

Для того, чтобы при подсчете $(p, q)'$-лабиринтов можно было использовать предложение 2, установим следующее важное свойство оператора T_q.

Предложение 3. *Оператор $T_q^{\left[\frac{q+1}{2}\right]}$ положителен, т. е. переводит любую неотрицательную ненулевую функцию в строго положительную.*

Доказательство. Пусть $a \in A_q$ и e_a — характеристическая функция множества $\{a\}$. Тогда число $(T_q^{i-1} e_a)(b)$, используя опять определение (9), можем отождествить с числом последовательностей q-столбцов — $m_1, \ldots, m_i$, таких, что $m_1 = a$; $m_i = b$; $m_j \prec m_{j+1}$. И для доказательства положительности линейного оператора $T_q^{\left[\frac{q+1}{2}\right]}$ достаточно поэтому доказать, что для любых $a, b \in A_q$ существует такая последовательность q-столбцов — $m_1 \prec m_2 \prec \cdots \prec m_i$, что $i = \left[\frac{q+1}{2}\right] + 1$; $m_1 = a$; $m_i = b$. Но для любого q-столбца $a - a \prec s$, где s — полный q-столбец, т. е. столбец, совпадающий с внутренностью $D_{1,q}$. Поэтому последовательность q-столбцов можно начать отрезком $a \prec s \prec \cdots \prec s$. И остается показать, что можно построить подходящую последовательность, начинающуюся с полного столбца s и заканчивающуюся произвольным столбцом b, длина которой не превосходит $[(q+1)/2]$. Не останавливаясь на доказательстве этого факта, приведем лишь рис. 2, на котором представлены столбцы b, для которых реализуется наибольшая длина последовательности, равная как раз $[(q+1)/2]$. Предложение доказано.

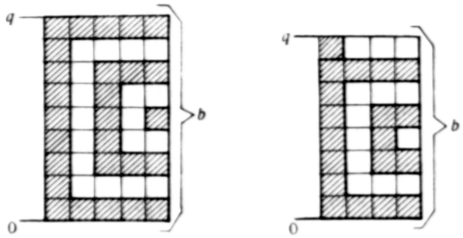

Рис. 2

Предложение 3 позволяет применить к оператору T_q следующую фундаментальную теорему [3, 4]:

Теорема Перрона. *Пусть A — конечномерный линейный оператор и существует такое n, что оператор A^n положителен. Тогда максимальное по модулю характеристическое число λ оператора A единственно и положительно. А для всякого ненулевого неотрицательного вектора e существует предельный вектор $\lim\limits_{m\to\infty}(A^m e)/\lambda^m$, являющийся положительным собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ*;

и доказать

Предложение 4. *Существуют такие числа $c'_q>0$ и $\mu_q>0$, что для числа $(p, q)'$-лабиринтов — $L'_{p,q}$, имеем*

$$L'_{p,q}\sim c'_q\mu_q^{pq},\ p\to\infty,$$

причем $\mu_q>1$ при $q>1$.

Доказательство. Пусть $\lambda_q>0$ — максимальное характеристическое число оператора T_q, существование которого вытекает из предложения 3 и теоремы Перрона. И пусть функция e_q, определенная на A_q, равна

$$e_q=\lim_{p\to\infty}(T_q^{p-1}e_q^0)/\lambda_q^p. \tag{11}$$

Эта функция существует и положительна по тем же причинам. Тогда, используя (10), получаем

$$L'_{p,q}=(T_q^{p-1}e_q^0,\ e_q^1)=\lambda_q^p(T_q^{p-1}e_q^0/\lambda_q^p,\ e_q^1)\sim(e_q,\ e_q^1)\,\lambda_q^p,\ p\to\infty.$$

Обозначая $c'_q=(e_q,\ e_q^1)>0$ и $\mu_q=\lambda_q^{1/q}$, получаем (11). Тот факт, что $\lambda_q>1$ и, значит, $\mu_q>1$ при $q>1$, очевиден. Предложение доказано.

Теперь обратимся к соотношению (8), связывающему числа $L_{p,q}$ и $L'_{p,q}$. Так как для $\mu\neq1$ верно соотношение

$$\sum_{i=1}^{p}(p-i+1)(\mu_q^q)^i=(\mu_q^{q(p+2)}-\mu_q^{2q}(p+1)+\mu_q^q p)/(\mu_q^q-1)^2,$$

из (8) и предложения 4 после очевидных преобразований получаем, наконец, что верна

Теорема 1. *Для каждого $q>1$ существуют такие числа $c_q>0$ и $\mu_q>1$, что для числа (p, q)-лабиринтов — $L_{p,q}$, имеем*

$$L_{p,q}\sim c_q\mu_q^{pq},\ p\to\infty. \tag{2}$$

Итак, доказано существование асимптотики (2) для числа (p, q)-лабиринтов при фиксированном q и $p\to\infty$.

4. Асимптотика чисел $L_{p,q}$ при $p, q\to\infty$. В этом разделе мы установим существование предела $\lim\limits_{q\to\infty}\mu_q=\mu$ и докажем, что μ совпадает с предельным значением $(L_{p,q})^{1/pq}$, $p, q\to\infty$. Эти факты допускают теперь простое геометрическое доказательство, причем, как в предыдущем разделе $(p, q)'$-лабиринты склеивались из q-столбцов, так и здесь (p, Q)-лабиринты будут склеиваться из $(p, q)'$-лабиринтов при $Q\gg q$.

Теорема 2. *Пусть числа μ_q определены равенствами $\mu_q=\lim\limits_{p\to\infty}(L_{p,q})^{1/pq}$. Тогда для данных $q\geqq 2$ и $\varepsilon>0$ существуют такие числа R, S, что при $r>R$, $s>S$*

$$L_{r,s}>(\mu_q-\varepsilon)^{rs}. \tag{12}$$

Кроме того, существуют и равны предельные значения

$$\mu=\lim_{q\to\infty}\mu_q=\lim_{p,q\to\infty}(L_{p,q})^{1/pq} \tag{13}$$

и для всякого q — $\mu_q\leq\mu$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство (12). Для данных $q\geq 2$ и $\varepsilon>0$ выберем такое R, что при $r>R$

$$L'_{r-1,q}>(\mu_q-\frac{\varepsilon}{2})^{rq},\ r>R. \tag{14}$$

Возможность такого выбора следует из предложения 4. Далее, для произвольного s прямоугольник $D_{r,s}$ разобьем, как это показано на рис. 3. При этом возникают прямоугольники $D_{r-1,q}$ в количестве $[s/q]$ штук и прямоугольник $D_{1,s}$. Рассмотрим те (r, s)-лабиринты, которые пересекаются с каждым прямоугольником $D_{r-1,q}$ по $(r-1, q)'$-лабиринту и которые целиком содержат внутренность прямоугольника $D_{1,s}$. Число таких (r, s)-лабиринтов не меньше $(L'_{r-1,q})^{[s/q]}$. Отсюда, учитывая (14), получаем

$$L_{r,s}\geq(L'_{r-1,q})^{[s/q]}>(\mu_q-\frac{\varepsilon}{2})^{rq[s/q]}=((\mu_q-\frac{\varepsilon}{2})^{[s/q]\,q/s})^{rs}. \tag{15}$$

Подобрав S таким, чтобы при $s>S$ было $(\mu_q-\frac{\varepsilon}{2})^{[\frac{s}{q}]\frac{q}{s}}\geq\mu_q-\varepsilon$, из (15) получаем, что при $r>R$, $s>S$ выполняется неравенство (12).

Извлекая из (12) корень степени rs и устремляя $r\to\infty$, получаем, что при $s>S$ будет и $\mu_s\geq\mu_q-\varepsilon$. Отсюда и следует и существование предела

$\mu=\lim\limits_{q\to\infty}\mu_q$ (μ_q ограничены сверху: $\mu_q\leq 2$), а также то, что $\mu_q\leq\mu$. Обращаясь теперь к (12), видим, что

$$\underline{\lim}_{p,q\to\infty}(L_{p,q})^{1/pq}\geq\mu. \tag{16}$$

Докажем, что $\overline{\lim\limits_{p,q\to\infty}}(L_{p,q})^{1/pq}\leq\mu$, откуда уже вытекает (13).

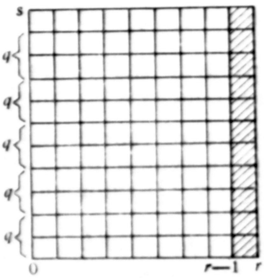

Рис. 3

Для данных q и $\varepsilon>0$ подберем такое R, что при $r>R$ будет

$$L_{r,q}\leq\left(\mu_q+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{rq}. \tag{17}$$

Возможность такого выбора следует из теоремы 1.

И при произвольном s разобьем прямоугольник $D_{r,s}$ горизонтальными прямыми на $[s/(q-2)]$ прямоугольников $D_{r,q-2}$. Каждый такой прямоугольник $D_{r,q-2}$ можно вложить в прямоугольник $D_{r,q}$, прибавив сверху и снизу к $D_{r,q-2}$ по прямоугольнику $D_{r,1}$. Пусть M — (r, s)-лабиринт. Пересечение M с внутренностью произвольного прямоугольника $D_{r,q-2}\subset D_{r,s}$ либо является $(r, q-2)$-лабиринтом и, значит, при описанном вложении $D_{r,q-2}\subset D_{r,q}$ является и (r, q)-лабиринтом, либо $M\cap\mathring{D}_{r,q-2}$ становится (r, q)-лабиринтом при присоединении к $(M\cap\mathring{D}_{r,q-2})\subset D_{r,q}$ всех элементарных квадратов верхнего или нижнего или сразу обоих прямоугольников $D_{r,1}$. Отсюда, так как число прямоугольников $D_{r,q-2}$ равно $[s/(q-2)]$, легко получаем, что $L_{r,s}\leq(L_{r,q})^{[s/(q-2)]+1}$. Воспользовавшись (17), находим, что

$$L_{r,s}\leq(L_{r,q})^{[(s/q-2)]+1}\leq\left(\left(\mu_q+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{rq}\right)^{[(s/q-2)]+1}.$$

Подобрав S таким, что при $s>S$ выполнено $\left(\mu_q+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{[(s/q-2)]+1}\leq(\mu_q+\varepsilon)^{s/(q-2)}$, приходим к тому, что при $r>R$, $s>S$ будет

$$L_{r,s}\leq((\mu_q+\varepsilon)^{q/(q-2)})^{rs}\ \text{или}\ (L_{r,s})^{1/rs}\leq(\mu_q+\varepsilon)^{q/(q-2)},$$

откуда сразу же получаем, что

$$\overline{\lim_{r,s\to\infty}}(L_{r,s})^{1/rs}\leq\mu, \tag{18}$$

и это вместе с (16) доказывает (13).

Теорема доказана.

5. Оценка сверху для числа (p, q)-лабиринтов. В этом разделе будет доказано, что $\overline{\lim\limits_{p,q\to\infty}}(L_{p,q})^{1/pq}<2$, причем доказательство этого факта не зависит от предыдущих рассмотрений и само по себе просто.

Фактически, сначала будет рассматриваться более широкий класс o-множеств, чем класс (p, q)-лабиринтов.

Определение 6. *Изолированным квадратом в о-множестве будет называться компонента этого о-множества, представляющая собой внутренность элементарного квадрата. Множеством без изолированных квадратов называется о-множество, не содержащее изолированных квадратов.*

а б в

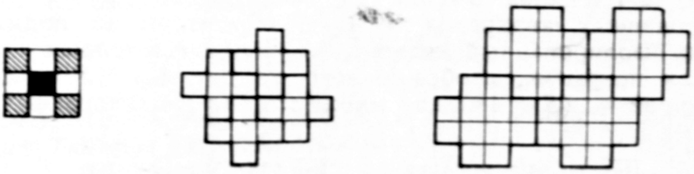

Рис. 4

Число подмножеств прямоугольника $D_{p,q}$, не содержащих изолированных квадратов, обозначим $M_{p,q}$.

Теорема 3. *Имеют место неравенства*

$$\varlimsup_{p,q\to\infty}(L_{p,q})^{1/pq}\le\varlimsup_{p,q\to\infty}(M_{p,q})^{1/pq}\le(496)^{1/9}=1{,}992\ldots \tag{19}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что каждый (p, q)-лабиринт, за исключением лабиринтов, состоящих из внутренности одного элементарного квадрата, является множеством без изолированных квадратов. Поэтому $L_{p,q}\le M_{p,q}+pq$, и первое из неравенств в (19) очевидно.

Далее, для данных p, q выберем числа r, s, которые оба делятся на 3 и $D_{p,q}\subset D_{r,s}\subset D_{p+2,q+2}$. Разделим прямоугольник $D_{r,s}$ на квадраты размером 3×3. Таких квадратов будет $rs/9$. Число всех o-подмножеств квадрата 3×3 равно, очевидно, $2^9=512$. При пересечении внутренности квадрата 3×3 с произвольным подмножеством без изолированных квадратов из этих 512 подмножеств не могут появиться $2^4=16$ подмножеств, которые состоят из центрального и некоторых из четырех угловых единичных квадратов квадрата 3×3 (рис. 4, a).

Таким образом, при пересечении подмножества без изолированных квадратов с произвольным квадратом 3×3 имеют место не более $512-16=496$ возможностей. Поскольку число квадратов 3×3, покрывающих $D_{r,s}$, равно $rs/9$, имеем $M_{r,s}\le(496)^{rs/9}$ и

$$M_{p,q}\le M_{r,s}\le(496)^{(p+2)(q+2)/9}=(1{,}992\ldots)^{(p+2)(q+2)}.$$

Извлечение корня степени pq и переход к пределу при $p, q\to\infty$ доказывает второе из неравенств в (19). Тем самым теорема доказана.

Посмотрим теперь, каким образом могут быть улучшены полученные уже оценки. Вместо квадратов 3×3 прямоугольник $D_{p,q}$ можно покрыть другими фигурами, например, крестами, изображенными на рис. 4, *б*. Применяя почти те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3, при помощи этого покрытия получаем более точную оценку

$$\varlimsup_{p,q\to\infty} (L_{p,q})^{1/pq} \leq \varlimsup_{p,q\to\infty} (M_{p,q})^{1/pq} \leq (2^5 - 1)^{1/9} = 1{,}987\ldots$$

Но, вообще говоря, выгоднее покрывать $D_{p,q}$ одинаковыми фигурами S, например, квадратами больших размеров. При этом оценки сверху будут иметь вид

$$(2^{|S|} - a(S))^{1/|S|}, \tag{20}$$

где $|S|$ — площадь множества S, и в случае лабиринтов $a(S)$ обозначает число o-подмножеств множества S, среди компонент которых существует компонента, не имеющая выхода на границу S. В случае подмножеств без изолированных квадратов $a(S)$ обозначает число подмножеств S, содержащих изолированный квадрат, не соприкасающийся с границей S.

Так, для покрытия, изображенного на рис. 4 *в*, $|S| = 12$, $a(S) = 817$ для лабиринтов и $a(S) = 480$ для множеств без изолированных квадратов, отсюда

$$\varlimsup_{p,q\to\infty} (L_{p,q})^{1/pq} < 1{,}963\ldots, \quad \varlimsup_{p,q\to\infty} (M_{p,q})^{1/pq} < 1{,}980\ldots.$$

Ясно, что, например, для покрытий квадратами при $|S| \to \infty$ оценка (20) для лабиринтов будет стремиться как раз к μ.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 переносятся с очевидными изменениями, во-первых, на замкнутые связные подмножества прямоугольника, состоящие из элементарных квадратов, а, во-вторых, и на многомерные аналоги рассматриваемых здесь объектов (многомерные лабиринты, многомерные множества без изолированных гиперкубов и т. д.). Не меняется существенно и характер доказательства этих теорем.

Нужно еще сказать, что, хотя существование предела (1) и доказано, вопрос вычисления точного значения μ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов, С. Димиев, Б. Пенков. ε-энтропии и ε-емкости множества непрерывных кривых. *Вестн. Моск. ун-та, Мат., Мех.*, сер. I, **3**, 1962, 20—23.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, вып. 5 (149), 141—178.
3. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. Москва, 1969.
4. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Москва, 1966.

СССР Москва 117935
Ленинский проспект 6
Московский Горный институт

Поступила 27. 11. 1974