Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОДИН ВАРИАНТ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОГО ТИПА

ДРУМИ Д. БАЙНОВ, СВЕТЛА Д. МИЛУШЕВА

В работе обоснован вариант метода усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного типа на конечном промежутке длины порядка ε^{-k}, $k \geqq 1$ ($\varepsilon > 0$ — малый параметр).

Метод усреднения для интегро-дифференциальных уравнений был обоснован А. Н. Филатовым. Обширную библиографию по этой тематике имеется в его монографиях [1] и [2].

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))ds\right) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где x, $X \in R_n$, $\varphi \in R_m$.

Предположим, что можно вычислить интеграл

$$\int_0^t \varphi(t, s, x)\, ds = \psi(t, x)$$

и что существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi(t, x))\, dt = \bar{X}(x).$$

Усредненной системой первого приближения для системы (1) с начальным условием (2) назовем систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon \bar{X}(\xi) \tag{3}$$

с начальным условием

$$\xi(0) = x_0. \tag{4}$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание, Том 2, 1976, с. 3—6

Отметим, что если $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A=(a_{ij})_{k,l}$, то по определению

$$\| x \|^2=\sum_{i=1}^{n}(x^{(i)})^2, \quad \| A \|^2=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^2.$$

Докажем теорему о близости решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) и решения $\xi(t)$ задачи Коши (3), (4).

Теорема I. *Пусть:*

I. *Функция $X(t, x, u)$ определена и непрерывна для всех $t \geqq 0$ и $(x, u) \in \Omega=\Omega(x) \times \Omega(u)$, где $\Omega(x)$ некоторая открытая область пространства R_n, а $\Omega(u) \equiv R_m$.*

2. *В соответствующих проекциях области $\{t \geqq 0,\ s \geqq 0,\ \Omega\}$ выполняются неравенства*

$$\| X(t, x, u)-X(t, x', u') \| \leqq \lambda(t) \| x-x' \| + \mu(t) \| u-u' \|,$$

$$\| \varphi(t, s, x)-\varphi(t, s, x') \| \leqq \sigma(t, s) \| x-x' \|,$$

где функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\sigma(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^r}\int_0^t \lambda(\tau)d\tau=C_1=\text{const},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^r}\int_0^t \mu(\tau)d\tau\int_0^\tau \sigma(\tau, s)ds=C_2=\text{const},$$

а число r-неравенству $0<r<1$.

3. *Задача Коши* (1), (2) *при предположении, что x_0 принадлежит области $\Omega(x)$, имеет единственное непрерывное и ограниченное решение $x(t)$* ($\| x(t) \| \leqq b$, $b=\text{const}$).

4. *Для всех $x \in \Omega(x)$ существует конечный предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^r}\int_0^T X(t, x, \psi(t, x))dt=\overline{X}_r(x), \tag{5}$$

причем предельный переход в (5) *происходит равномерно относительно $x \in \Omega(x)$.*

Тогда, если $x(t)$ — решение задачи Коши (1), (2), *а $\xi(t)$ — решение задачи Коши* (3), (4), *то для любых $\varrho>0$, $\omega>0$, $L>0$ и любого $r_1 \in (r, 1)$, можно указать такое $\varepsilon_0>0$, что при $0<\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, на отрезке $0 \leqq t \leqq L\varepsilon^{-1/r_1}$, для любой точки x_0, принадлежащей области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ — окрестностью, будет выполняться неравенство $\| x(t)-\xi(t) \| < \omega$.*

Доказательство. Введем функцию

$$v(t, x)=\int_{\Omega(x)} \Delta_a(x-x')\{\int_0^t X(\tau, x', \psi(\tau, x'))d\tau\}dx',$$

где

$$\Delta_a(x)=\begin{cases} A_a & \text{при } \|x\|\leqq a^{1+\omega} \\ 0 & \text{при } \|x\|>a^{1+\omega}, \end{cases} \qquad (a>0,\ \omega\geqq 0)$$

а положительная постоянная A_a определяется из условия

$$\int\limits_{R_n} \Delta_a(x)dx=1.$$

В силу условий теоремы существует такая монотонно убывающая функция $\alpha(t)$ ($\alpha(t)\to 0$ при $t\to\infty$), что для всех $x\in\Omega(x)$, при $t\geqq 0$, выполняется неравенство

$$\left\|\int\limits_0^t X(\tau, x, \psi(\tau, x))\,d\tau\right\|\leqq t^{r_1}\alpha(t).$$

Следовательно, для всех точек x, a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x)$ и для всех $t\geqq 0$ выполняется неравенство

(6) $$\|v(t, x)\|\leqq t^{r_1}\alpha(t).$$

Рассмотрим выражение $P(t, x)=\partial v(t, x)/\partial t-X(t, x, \psi(t, x))$. Для всех x, a — окрестность которых принадлежит области $\Omega(x)$, при $t\geqq 0$ получаем $\|P(t, x)\|\leqq[\lambda(t)+\mu(t)\sigma_0(t)]a$, где

$$\sigma_0(t)=\int\limits_0^t \sigma(t, s)ds.$$

Положим $\widetilde{x}(t)=x_0+\varepsilon v(t, x_0)$. Так как $x_0\in\Omega(x)$ вместе с некоторой своей ϱ — окрестностью, то при $a<\varrho$ для функции $v(t, x_0)$ выполняется неравенство (6). Следовательно, на отрезке $0\leqq t\leqq L\varepsilon^{-1/r_1}$, если ε достаточно мало ($\varepsilon\leqq\varepsilon_0'$), справедливы соотношения

(7) $$\|\varepsilon v(t, x_0)\|\leqq\varepsilon t^{r_1}\alpha(t)\leqq \sup_{0\leqq\tau\leqq L^{r_1}} \tau\alpha(\tau^{1/r_1}\varepsilon^{-1/r_1})<\delta=\min(\varrho/2,\ \omega/2).$$

Из (7) видно, что на отрезке $0\leqq t\leqq L\varepsilon^{-1/r_1}$ ($\varepsilon\leqq\varepsilon_0'$) $\widetilde{x}(t)$ принадлежит области $\Omega(x)$ вместо с некоторой своей ϱ_1 — окрестностью ($0<\varrho_1<\varrho$) и $\|\widetilde{x}(t)\|\leqq d=\text{const}$.

Оценим выражение

(8) $$Q(t)=\frac{d\widetilde{x}}{dt}-\varepsilon X\left(t, \widetilde{x}, \int\limits_0^t \varphi(t, s, \widetilde{x}(s))ds\right),$$

где $\widetilde{x}=\widetilde{x}(t)$. При $t\geqq 0$ и $\varepsilon\leqq\varepsilon_0'$ имеем $\|Q(t)\|\leqq\varepsilon[\lambda(t)+\mu(t)\sigma_0(t)](a+\delta)$. Предположим, что на отрезке $0\leqq t\leqq L\varepsilon^{-1/r_1}$ функция $x(t)$ не покидает области $\Omega(x)$. Тогда на этом отрезке из (1) и (8) получаем

$$\|d(x-\widetilde{x})/dt\|\leqq\varepsilon\lambda(t)\,\|x-\widetilde{x}\|+\varepsilon(b+d)\mu(t)\,\sigma_0(t)+\|Q(t)\|.$$

Отсюда, учитывая что $\widetilde{x}(0)=x(0)$, находим

$$\| x-\widetilde{x} \| \leq \left(1+\varepsilon \int_0^t \lambda(\tau) \exp\{\varepsilon \int_0^\tau \lambda(s)\,ds\}\,d\tau\right) \int_0^t [\varepsilon(b+d)\mu(\tau)\sigma_0(\tau)+\| Q(\tau) \|]\,d\tau. \tag{9}$$

Введем функции

$$\gamma_1(t)=\frac{1}{t^{r_1}}\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau, \quad \gamma_2(t)=\frac{1}{t^{r_1}}\int_0^t \mu(\tau)\sigma_0(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_i(t)\to 0 \quad (i=1,2) \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Для правой стороны неравенства (9), на отрезке $0\leq t\leq L\varepsilon^{-1/r_1}$ при условии, что $\varepsilon\leq\varepsilon_0'$, получаем оценку

$$\begin{aligned}&\left(1+\varepsilon\int_0^t \lambda(\tau)\exp\{\varepsilon\int_0^\tau \lambda(s)ds\}d\tau\right)\int_0^t [\varepsilon(b+d)\,\mu(\tau)\,\sigma_0(\tau)+\| Q(\tau) \|]\,d\tau \\ &\leq (1+C)\,\{(a+\delta)\,\gamma_1(L\varepsilon^{-1/r_1})+(a+\delta+b+d)\gamma_2(L\varepsilon^{-1/r_1})\}L^{r_1},\end{aligned} \tag{10}$$

где $C=L^{r_1}\gamma_1\,(L(\varepsilon_0')^{-1/r_1})\exp\{L^{r_1}\gamma_1\,(L(\varepsilon_0')^{-1/r_1})\}$.

Из (7), (9) и (10) видно, что если ε достаточно мало $(\varepsilon\leq\varepsilon_0\leq\varepsilon_0')$, то на отрезке $0\leq t\leq L\varepsilon^{-1/r_1}$ будет выполняться неравенство

$$\| x-\xi \| = \| x-x_0 \| \leq \| x-\widetilde{x} \| + \| \widetilde{x}-x_0 \| < \min(\varrho, \omega).$$

Покажем теперь, что $x(t)\in\Omega(x)$ на всем отрезке $0\leq t\leq L\varepsilon^{-1/r_1}$. Действительно, так как начальная точка x_0 принадлежит области $\Omega(x)$ вместе со своей ϱ — окрестностью, то на некотором отрезке $0\leq t\leq t^*$ $(t^*\leq L\varepsilon^{-1/r_1})$ решение $x(t)$ будет находиться внутри области $\Omega(x)$. Тогда, если ε достаточно мало $(\varepsilon\leq\varepsilon_0''\leq\varepsilon_0)$, то на всем отрезке $0\leq t\leq t^*$, на котором $x(t)\in\Omega(x)$ будем иметь $\| x(t)-x_0 \| < \varrho/2$.

Если предположить, что $t^*<L\varepsilon^{-1/r_1}$, то тогда на отрезке $0\leq t\leq L\varepsilon^{-1/r_1}$ в силу непрерывности решения $x(t)$ системы (1) найдется такая точка t^{**}, в которой будет выполняться неравенство $\varrho > \| x(t^{**})-x_0 \| > \varrho/2$. Но из этого неравенства видно, что при $t=t^{**}$ решение $x(t)$ еще не покинуло области $\Omega(x)$. Поэтому $t^{**}\in[0, t^*]$ и, следовательно, $\| x(t^{**})-x_0 \| < \varrho/2$. Полученное противоречие показывает, что $t^*\geq L\varepsilon^{-1/r_1}$. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Филатов. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, 1971.
2. А. Н. Филатов. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент, 1974.

Медицинская академия, София *Поступила 29. 1. 1974.*

Высший машинно-электротехнический институт имени В. И. Ленина, София