Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ИГР, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА КВАДРАТЕ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ

Вводя в множество смешанных стратегий непрерывной на квадрате игры расстояние Хаусдорффа, доказывается, что оно становится компактным и изучается зависимость множеств оптимальных стратегий от изменения критерия эффективности.

В [1] изучалась зависимость цены непрерывной игры от изменения критерия эффективности. В случае вырожденной выпуклой игры в [2] доказана теорема, характеризирующая зависимость множества оптимальных стратегий также от изменения критерия эффективности. Для изучения зависимости решения некоторых задач оптимального управления от начальных данных расстояние Хаусдорффа (см. [3]) применялось в [5—8].

1. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — линейные метрические пространства с метрическими функционалами соответственно r_1 и r_2, а $M\subset\mathfrak{M}$ и $N\subset\mathfrak{N}$ — выпуклые компактные подмножества. Если функция $F(x, y)$ определена и непрерывна на прямом произведении $M\times N$ и вогнута по x при каждом $y\in N$ и выпукла по y при каждом $x\in M$, то будем говорить, что определена вогнуто-выпуклая игра $\Gamma(F)$. Первый игрок, выбирая элемент $x\in M$, пытается максимизировать критерий эффективности $F(x, y)$, а второй игрок, выбирая $y\in N$, пытается минимизировать его. Множество всех таких игр, когда функция $F(x,y)$ меняется, а множества M и N фиксированы, обозначим через $\mathfrak{T}$. Согласно теореме 1 из [4], если $\Gamma(F)\in\mathfrak{T}$, то существует седловая точка $(x_0, y_0)\in M\times N$ такая, что

$$\max_{x\in M}\min_{y\in N}F(x, y)=F(x_0, y_0)=\min_{y\in N}\max_{x\in M}F(x, y).$$

Число $F(x_0, y_0)$ обозначим через $v(F)$, а множество всех седловых точек $(x_0, y_0)\in M\times N$ для игры $\Gamma(F)\in\mathfrak{T}$ — через $S(F)$.

Утверждение следующей теоремы легко следует из теоремы 29, из [1].

Теорема 1. *Пусть $\Gamma(F_0)\in\mathfrak{T}$ и задана последовательность $\{\Gamma(F_k)\}_1^\infty$, $\Gamma(F_k)\in\mathfrak{T}$. Тогда если*

$$\lim_{k\to\infty}\max_{x\in M}\max_{y\in N}|F_k(x, y)-F_0(x, y)|=0,$$

то $\lim_{k\to\infty}v(F_k)=v(F_0)$.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma(F_0)\in\mathfrak{T}$ и ε — произвольное положительное число. Тогда существует такое число $\delta>0$, что если для игры $\Gamma(F)\in\mathfrak{T}$ имеет место неравенство*

$$\max_{x\in M}\max_{y\in N}|F(x, y)-F_0(x, y)|<\delta$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 29—34

и точка $(\xi, \eta) \in S(F)$, *то найдется такая точка* $(\xi_0, \eta_0) \in S(F_0)$, *что*

$$r_1(\xi, \xi_0)+r_2(\eta, \eta_0)<\varepsilon.$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0>0$, последовательность игр $\{\Gamma(F_k)\}_1^{\infty}$, $\Gamma(F_k) \in \mathfrak{T}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \max_{x \in M} \max_{y \in N} |F_k(x, y)-F_0(x, y)|=0$$

и последовательность точек

$$\{(x_k, y_k)\}_1^{\infty},\ (x_k, y_k) \in S(F_k),\ \lim_{k\to\infty}(x_k, y_k)=(x_0, y_0)$$

такие, что для любой точки $(\xi, \eta) \in S(F_0)$ при $k=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$r_1(x_k, \xi)>\varepsilon_0. \tag{1}$$

Аналогичным образом рассматривается и случай, когда для любой точки $(\xi, \eta) \in S(F_0)$ и $k=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $r_2(y_k, \eta)>\varepsilon_0$.

Из непрерывности функций $F_k(x, y)$, $k=0, 1, \ldots$, и свойств последовательности $\{(x_k, y_k)\}$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x_k, y_k)=F_0(x_0, y_0). \tag{2}$$

В силу теоремы 1 имеем

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x_k, y_k)=\lim_{k\to\infty} v(F_k)=v(F_0). \tag{3}$$

Из соотношения (2) и (3) получается, что точка $(x_0, y_0) \in S(F_0)$. Для этой точки и для всех достаточно больших индексов k имеет место неравенство $r_1(x_k, x_0)\leq\varepsilon_0$, которое противоречит неравенству (1). Этим доказательство теоремы закончено. Для игры с критерием эффективности

$$F(p, q)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j, \quad p=(p_1, \ldots, p_n), \quad q=(q_1, \ldots, q_m),$$

эта теорема доказана в [2].

2. Дополненным графиком $\bar{\psi}$ ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции ψ (см. [3]), называется множество

$$\bar{\psi}=\{(x, z) \mid x \in [a, b],\ z \in [I_\psi(x), S_\psi(x)]\},$$

где

$$I_\psi(x)=\lim_{\lambda\to 0} \inf_{|\xi-x|\leq\lambda} \psi(\xi), \quad S_\psi(x)=\lim_{\lambda\to 0} \sup_{|\xi-x|\leq\lambda} \psi(\xi).$$

Если ψ_1 и ψ_2 — ограниченные функции на отрезке $[a, b]$, а $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ — их дополненные графики, то вводим обозначения:

$$\psi_i(\xi) \dot{-} \psi_j=\min_{(\eta, z) \in \bar{\psi}_j} [|\xi-\eta|, |\psi_i(\xi)-z|]; \quad i, j=1, 2; \quad i\neq j;$$

$$\psi_1(\xi)\dot{\div}\varphi_2(\xi)=\max[\psi_1(\xi)\dot{-}\psi_2, \psi_2(\xi)\dot{-}\psi_1].$$

Расстоянием Хаусдорффа между функциями ψ_1 и ψ_2 называется число

$$R(\psi_1, \psi_2)=\sup_{\xi \in [a, b]} (\psi_1(\xi)\dot{\div}\psi_2(\xi)).$$

Множество всех монотонно неубывающих скалярных функций φ, определенных на отрезке $[a, b]$ и таких, что $|\varphi(x)| \leqq c$, $c \geqq 1$, обозначим через $\mathfrak{L}$, а через $\mathfrak{L}^*$ обозначим множество тех функций $\varphi \in \mathfrak{L}$, для которых $\varphi(a)=0$ и $\varphi(b)=1$. Будем считать, что в $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^*$ введено расстояние с помощью метрического функционала R.

Лемма 1. *Пусть последовательность функций* $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\varphi_k \in \mathfrak{L}$ *и ограниченная на* $[a, b]$ *функция* ψ *такие, что для каждой точки* $\xi \in [a, b]$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi_k(\xi) \div \psi(\xi)) = 0. \tag{4}$$

Тогда $\psi \in \mathfrak{L}$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} R(\varphi_k, \psi) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Сначала докажем, что функция $\psi \in \mathfrak{L}$. Согласно [8] ψ — функция с ограниченным изменением. Допустим, что она не является монотонно неубывающей. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдутся две такие точки x_1 и x_2, что $x_1 < x_2$, но $\psi(x_1) > \psi(x_2)$. Из (4) следует, что существует такое натуральное число k_0, что если $k > k_0$, то в квадратах с центрами соответственно в точках $(x_1, \psi(x_1))$ и $(x_2, \psi(x_2))$ и сторонами $\min[(x_2 - x_1)/2, (\psi(x_1) - \psi(x_2))/2]$ найдутся точки дополненных графиков функций φ_k, т. е. существуют точки x_1^k и x_2^k такие, что

$$x_1^k \in [a, b] \cap [x_1 - (x_2 - x_1)/4,\ x_1 + (x_2 - x_1)/4],$$
$$x_2^k \in [a, b] \cap [x_2 - (x_2 - x_1)/4,\ x_2 + (x_2 - x_1)/4]$$

и

$$\varphi_k(x_1^k) \geqq \psi(x_2) + 3(\psi(x_1) - \psi(x_2))/4, \tag{6}$$

$$\varphi_k(x_2^k) \leqq \psi(x_1) - 3(\psi(x_1) - \psi(x_2))/4. \tag{7}$$

В силу (6) и (7) имеет место

$$\begin{aligned}\varphi_k(x_1^k) &\geqq \varphi(x_2) + 3(\psi(x_1) - \psi(x_2))/4 = \psi(x_1) - (\psi(x_1) - \psi(x_2)) + 3(\psi(x_1) - \psi(x_2))/4 \\ &\geqq \varphi_k(x_2^k) + 3(\psi(x_1) - \psi(x_2))/4 - (\psi(x_1) - \psi(x_2))/4 \\ &= \varphi_k(x_2^k) - (\psi(x_1) - \psi(x_2))/2 > \varphi_k(x_2^k).\end{aligned}$$

С другой стороны имеет место неравенство $x_1^k < x_2^k$. Но неравенство $\varphi_k(x_1^k) > \varphi_k(x_2^k)$ противоречит свойствам функции φ_k. Этим доказано, что функция $\psi \in \mathfrak{L}$.

Для доказательства соотношения (5) необходимо доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{a \leq x \leq b} (\psi(x) \dot{-} \varphi_k) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{a \leq x \leq b} (\varphi_k(x) \dot{-} \psi) = 0. \tag{9}$$

Соотношение (8) доказано в [8]. Докажем (9). Допустим, что существуют подпоследовательность последовательности $\{\varphi_k\}_1^\infty$ (обозначим ее снова через $\{\varphi_k\}_1^\infty$), число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{x^k\}_1^\infty$, точек отрезка $[a, b]$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x_0$, $x^k \in [x_0, x_0 + \varepsilon_0/4)$, $[a, b] \supset [x_0, x_0 + \varepsilon_0/2)$ и

(10) $$(\varphi_k(x^k) \dot{-} \psi) > \varepsilon_0.$$

Аналогично рассматривается и случай, когда существует последовательность точек x^k, для которых $x^k \leqq x_0$.

В силу (10) и из соотношения $\psi \in \mathfrak{L}$ следует, что для всех точек $\xi \in (x_0 - \varepsilon_0/2,\ x_0 + \varepsilon_0/2)$ и любого числа k имеет место

(11) а) либо неравенство $\psi(\xi) + \varepsilon_0 < \varphi_k(x^k)$;

б) либо неравенство $\psi(\xi) - \varepsilon_0 > \varphi_k(x^k)$.

Предположим для определенности, что имеет место случай а). Случай б) рассматривается аналогично. Из соотношения $\varphi_k \in Z$ следует, что если $\xi \geqq x_0 + \varepsilon_0/4$, то

(12) $$\varphi_k(\xi) \geqq \varphi_k(x^k).$$

Тогда из (11) и (12) для любого натурального числа k и каждой точки $\xi \in (x_0 + \varepsilon_0/4,\ x_0 + \varepsilon_0/2)$ получаем $\varphi_k(\xi) \geqq \varphi_k(x^k) \geqq \psi(x_0 + 3\varepsilon_0/8) + \varepsilon_0$. Следовательно,

$$\varphi_k(x_0 + 3\varepsilon_0/8) \dot{-} \psi(x_0 + 3\varepsilon_0/8) \geqq \varepsilon_0/8.$$

Полученное неравенство противоречит (4). Соотношение (9) доказано.

Лемма 2. *Множество $\mathfrak{L}$ компактно.*

Доказательство. Согласно теореме Хелли из всякого бесконечного подмножества множества $\mathfrak{L}$ можно выбрать последовательность, сходящуюся к некоторой функции с ограниченным изменением во всех точках отрезка $[a, b]$. Но в силу леммы 1 эта последовательность будет сходиться и относительно метрического функционала R к этой же предельной функции и эта функция принадлежит множеству $\mathfrak{L}$.

Следствие 1. *Множество $\mathfrak{L}^*$ выпукло и компактно.*

Лемма 3. *Если для последовательности функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\varphi_k \in \mathfrak{L}$ и функции $\varphi \in \mathfrak{L}$* имеет место

(13) $$\lim_{k\to\infty} R(\varphi_k, \varphi) = 0,$$

то в каждой точке непрерывности функции φ выполняется предельное равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\xi) = \varphi(\xi)$,

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся точка $\xi_0 \in [a, b]$ непрерывности функции φ, число $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность последовательности $\{\varphi_k\}_1^\infty$ (обозначим ее снова через $\{\varphi_k\}_1^\infty$) такие, что $\varphi_k(\xi_0) - \varphi(\xi_0) > \varepsilon^0$ и $|\varphi(x) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon_0/2$ для всех точек интервала $(\eta_0 - \delta,\ \eta_0 + \delta)$, $\delta > 0$, содержащего точку ξ_0. Аналогично рассматривается и случай $\varphi_k(\xi_0) - \varphi(\xi_0) < -\varepsilon_0$. Тогда для ξ_1^*, $\xi_1 \in (\xi_0, \eta_0 + \delta)$ будет выполняться неравенство

$$\varphi_k(\xi_1^*) - \varphi(\xi_1) \geqq \varphi_k(\xi_0) - \varphi(\xi_0) - \varepsilon_0/2 > \varepsilon_0/2$$

и, следовательно, для точки ξ_1 имеем

$$\varphi_k(\xi_1) \dot{-} \varphi(\xi_1) \geqq \min[\xi_1 - \xi_0,\ \eta_0 - \delta - \xi_1,\ \varepsilon_0/8].$$

Это неравенство противоречит равенству (13). Доказательство закончено.

3. Используя следствие 1 и лемму 3 можно легко получить основную теорему непрерывных игр, рассматриваемых на квадрате (теорема 41 из [1]), из основной теоремы выпукло-вогнутых игр (теорема 1 из [4])·

Теорема 3. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна для $x \in [a, b]$ и $y \in [a, b]$. Тогда существуют такие функции $f_0(x) \in \mathfrak{L}^*$ и $g_0(y) \in \mathfrak{L}^*$, что*

$$v^*(F) = \max_{f\in\mathfrak{L}^*} \min_{g\in\mathfrak{L}^*} \int_a^b \int_a^b F(x, y) df(x) dg(y)$$

$$(14) \qquad = \int_a^b \int_a^b F(x, y) df_0(x) dg_0(y) = \min_{g\in\mathfrak{L}^*} \max_{f\in\mathfrak{L}^*} \int_a^b \int_a^b F(x, y)\, df(x)\, d\, g(y).$$

Доказательство. Функция $A(f, g) = \int_a^b \int_a^b F(x, y) df(x) dg(y)$ выпукла по g при каждом $f \in \mathfrak{L}^*$ и вогнута по f при каждом $g \in \mathfrak{L}^*$. Если последовательности $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{g_k\}_1^\infty$, $f_k \in \mathfrak{L}^*$, $g_k \in \mathrm{L}^*$ и функции $f \in \mathfrak{L}^*$ и $g \in \mathfrak{L}^*$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} (R(f_k, f) + R(g_k, g)) = 0,$$

то в силу леммы 3 во всех точках $\xi \in [a, b]$ непрерывности функций f и g выполняются соотношения

$$(15) \qquad \lim_{k\to\infty} f_k(\xi) = f(\xi), \quad \lim_{k\to\infty} g_k(\xi) = g(\xi).$$

Из (15) и теоремы Хелли — Брея следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} A(f_k, g_k) = A(f, g)$, т. е. непрерывность функции $A(f, g)$ на множестве $\mathfrak{L}^* \times \mathfrak{L}^*$.

С другой стороны, согласно следствию 1, множество $\mathfrak{L}^*$ выпукло и компактно. Следовательно, все предположения теоремы 1, [4] выполняются и утверждение теоремы 3 следует из этой теоремы.

Дальше через $\mathfrak{T}^*$ обозначим множество всех непрерывных игр $\Gamma(F)$, рассматриваемых на квадрате $[a, b] \times [a, b]$, которые соответствуют различным непрерывным функциям $F(x, y)$. Через $S^*(F)$ обозначим множество пар функций (f, g), $f \in \mathfrak{L}^*$, $g \in \mathfrak{L}^*$, которые определяются из соотношения (14) и соответствуют функции $F(x, y)$, а через $v^*(F)$ — число

$$v^*(F) = \max_{f\in\mathfrak{L}^*} \min_{g\in\mathfrak{L}^*} \int_a^b \int_a^b F(x, y)\, df(x)\, dg(y).$$

Из теоремы 1 и теоремы 2 получаем:

Теорема 4. *Пусть $\Gamma(F_0) \in \mathfrak{T}^*$ и ε — произвольное положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что если для игры $\Gamma(F) \in \mathfrak{T}^*$ имеет место*

$$\max_{a\le x\le b} \max_{a\le x\le b} |F(x, y) - F_0(x, y)| < \delta$$

и $(f, g) \in S^*(F)$ то существует пара функций $(f_0, g_0) \in S^*(F_0)$ такие, что

$$|v^*(F) - v^*(F_0)| < \varepsilon,$$

$$(16) \qquad R(f, f_0) + R(g, g_0) < \varepsilon.$$

Замечание. В теореме 4 неравенство (16) можно заменить следующим:

$$\int_a^b |f(x)-f_0(x)|\,dx+\int_a^b |g(y)-g_0(y)|\,dy<\varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Б. Гермейер. Введение в теорию исследования операций. Москва, 1971.
2. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Москва, 1964.
3. Б. Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук.*, **24**, 1969, 5, 141—178.
4. Фань Цзи, К. Теоремы о минимаксе. Бесконечные антагонистические игры. Москва, 1963, 31—39.
5. Т. Гичев. Некоторые вопросы корректности линейной задачи оптимального управления с минимальным импульсом I. *Дифференц. уравнения*, 9, 1973, № 8, 1383—1392.
6. Т. Гичев. Некоторые вопросы корректности линейной задачи оптимального управления с минимальным импульсом II. *Дифференц. уравнения*, 9, 1973, № 9, 1561—1571.
7. Т. Гичев. β-непрекъснатост на оптималното управление като функция на началното състояние. *Известия Мат. инст. БАН*, **14**, 1973, 35—48.
8. Н. Х. Розов, Т. Гичев. Возмущение нелинейной управляемой импульсной системы. (в печати).

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 19. 11. 1974 г.