Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА СЕТКАХ, МЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

ЕВГЕНИЙ Г. ДЬЯКОНОВ, АЛЕКСАНДР Г. БОКОВ

Рассматриваются разностные схемы на сетках, меняющихся во времени. Шаг сетки на верхнем слое в сравнении с шагом на нижнем в два раза увеличивается или уменьшается. Доказаны леммы о невозростании норм при сгущении сетки. Получены энергетические неравенства для неявных разностных схем для общего параболического уравнения и для схем с расщепляющимся оператором для случая двух пространственных переменных. Доказана теорема сходимости и рассмотрены задачи оптимизации, связанные с изменением сетки.

При решении нестационарных краевых задач разностными методами, могут встретиться ситуации, в которых оценки норм погрешности аппроксимации существенно меняются во времени, что может быть вызвано, например, различным поведением соответствующих производных от известных коэффициентов и искомого решения.

Если при этом использовать сетку по пространственным переменным, постоянную во времени, исходя из худшего случая, то это может привести к избыточной вычислительной работе. В работах Н. С. Бахвалова [1, 2], были получены оценки на число узлов пространственной сетки при меняющейся гладкости решения во времени и на простейшем примере было показано, что асимптотически оптимальные по числу используемых узлов разностные схемы связаны с использованием пространственных сеток, меняющихся во времени (см., также [3]). Разностные схемы с пространственными сетками, меняющимися во времени, рассматривались также и с других точек зрения [4—6]. Исследование устойчивости разностных схем на сетках, меняющихся во времени, имеет специфическую особенность, связанную с тем, что одному и тому же моменту времени могут соответствовать две различные сеточные функции, совпадающие в общих узлах, но имеющие, вообще говоря, различные нормы. Поэтому каждое изменение сетки может приводить к увеличению соответствующей нормы в q раз ($q>1$) и попытка простого комбинирования известных теорем корректности для схем с постоянной сеткой [6, 7] приводит к „теоремам корректности“ с увеличением нормы не менее, чем в q^M раз, где M — число изменений сетки во времени и может, вообще говоря, стремиться к $+\infty$, [2, 3]. Основной целью настоящей работы было получение теорем корректности на основе метода энергетических неравенств [6] для двухслойных неявных разностных схем на сетках, меняющихся во времени, которые бы позволили рассматривать случай $M\to\infty$. Изложение ведется на примере общего линейного параболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными.

Пусть на отрезке времени $0\leq t\leq T (T>0)$ рассматривается сетка $\omega_t\equiv\{t_n\}$, где $t_{n+1}\equiv t_n+\tau_n$, $t_0\equiv 0$, $0\leq n\leq \hat{k}$, $t_{\hat{k}+1}\equiv T$, $\tau_n>0$ — шаг сетки по t

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 53—68.

в момент времени t_n. Пусть ω_t^* — подмножество ω_t, составленное из таких t_n, что пространственные сетки в моменты времени t_n и t_{n+1} не совпадают, а $\omega_t^0 \equiv \omega_t \setminus \omega_t^*$; условимся всегда считать, что $t_0 \in \omega_t^0$. Тогда при $t_n \in \omega_t^*$ изменения пространственной сетки, при которых удалось получить нужные энергетические неравенства, могут быть двух типов: на сетке в момент времени t_{n+1} по сравнению с сеткой в момент времени t_n может происходить либо укрупнение h_r^n — шага сетки по одному из пространственных x_r в два раза (разрежение сетки в два раза по x_r), либо уменьшение h_r^n в два раза (сгущение сетки в два раза по x_r). При этом при сгущении сетки недостающие нужные значения u в момент времени t_n получаются с помощью интерполяции по x_r. Множество $t_n \in \omega_t^*$, при которых производится разрежение сетки, обозначим через $\overline{\omega}_t^*$; тогда $\widetilde{\omega}_t^* \equiv \omega_t^* \setminus \overline{\omega}_t^*$ — множество моментов времени t_n, в которые производится сгущение сетки.

Энергетические неравенства доказаны при условии вида:

$$h_r^n \leqq \varkappa \tau_{n-1}, \quad t_n \in \overline{\omega}_t^*, \tag{1}$$

где h_r^n — шаг пространственной сетки в момент времени t_n по тому x_r, по которому производится разрежение сетки; число $\varkappa > 0$ может быть выбрано произвольно, но выбор его определяет соответствующую константу в априорной оценке.

Знание оценки погрешности аппроксимации и полученные теоремы корректности позволяют получить и соответствующие теоремы сходимости с оценками погрешности, зависящими от вида области и выбора сеток. Наличие оценок погрешности, зависящих от выбора сеток, приводит к естественной формулировке задач нелинейного программирования, решение которых тесно связано с задачей минимизации погрешности за счет оптимального выбора сетки из рассматриваемого класса при общем ограничении числа используемых узлов (см., например, [8] стр. 147 и 606).

1. Аппроксимация пространств сеточных функций.

1.1. Обозначения. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $R^2 \equiv \{x;\, x = (x_1, x_2)\}$ с границей Γ, $h \equiv (h_1, h_2)$ — вектор шагов прямоугольной сетки с узлами $x_i \equiv (i_1 h_1, i_2 h_2)$, $i \equiv (i_1, i_2)$, $|h|^2 \equiv h_1^2 + h_2^2$, $\hbar = h_1 h_2$, $u_i \equiv u(x_i)$, $l_1 \equiv (1, 0)$, $l_2 \equiv (0, 1)$,

$$\begin{gathered} \partial_r u_i \equiv h_r^{-1}[u(x_i + h_r l_r) - u(x_i)], \quad \overline{\partial}_r u_i \equiv h^{-1}[u(x_i) - u(x_i - h_r l_r)] \\ \Delta_r u_i \equiv \overline{\partial}_r \partial_r u_i \equiv h_r^{-1}(\partial_r u_i - \overline{\partial}_r u_i). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Если в Ω мы рассматриваем 1-ую краевую задачу для эллиптического уравнения 2-го порядка, то при выбранном векторе шагов сетки обычным образом определяется множество внутренних узлов сетки Ω_h, множество граничных узлов сетки Γ_h и $\overline{\Omega}_h \equiv \Omega_h \cup \Gamma_h$. Обозначим через u_h сеточную функцию, определенную на Ω_h, а через H_h соответствующее конечномерное гильбертово пространство, $(u_h, v_h) \equiv \hbar \sum_{x_i \in \Omega_h} u_h(x_i) v_h(x_i)$, $\|u_h\|^2 \equiv (u_h, u_h)$

Для $u_h \in H_h$ будем иногда рассматривать ее финитное продолжение (обозначая его той же буквой), т. е. сеточную функцию, определенную во всех узлах сетки, равную нулю вне Ω_h и совпадающую с u_h на Ω_h. Множество таких финитных продолжений будет образовывать конечномерное гильбертово пространство $\overset{0}{H}_h$

$$(1.2) \qquad (u_h, v_h)_0 \equiv \hbar \Sigma u_h(x_i) v_h(x_i), \quad \| u_h \|_0^2 \equiv (u_h, u_h)_0,$$

суммирование в (1.3) проводится по всем узлам сетки.

В дальнейшем встречаются выражения типа $\| \partial_r u \|_0$, $\| \partial_r \partial_l u \|_0$ с $u \in H_h$. Они должны пониматься в следующем смысле: по заданному $u \in H_h$ рассматривается соответствующее финитное продолжение; от него вычисляются нужные разности и для них определяются нормы по (1.3).

Все предыдущие определения относились к произвольному вектору шагов сетки h. Нам потребуется в дальнейшем рассматривать все эти понятия одновременно по отношению к вектору h и двум другим векторам $\bar{h}$ и $\tilde{h}$, которые отличаются от h лишь какой-то одной r-ой компонентой. А именно, мы будем полагать $\bar{h}_r \equiv 2h_r$, $\tilde{h}_r \equiv h_r/2$. Тем самым мы определяем сетки, получающиеся из исходной соответственно разрежением и сгущением по x_r в два раза, и соответствующие множества $\Omega_{\bar{h}}$, $\Gamma_{\bar{h}}$, $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$, $\Omega_{\tilde{h}}$, $\Gamma_{\tilde{h}}$, $\bar{\Omega}_{\tilde{h}}$; при этом: $\Omega_{\bar{h}} \subseteq \Omega_h \subseteq \Omega_{\tilde{h}}$, $\bar{\Omega}_{\bar{h}} \subseteq \bar{\Omega}_h \subseteq \bar{\Omega}_{\tilde{h}}$.

Пусть $\bar{u}_h$ и $\tilde{u}_h$ — сеточные функции, определенные на $\Omega_{\bar{h}}$ и $\Omega_{\tilde{h}}$; определим и соответствующие пространства $\bar{H}_h$, $\tilde{H}_h$, $\bar{H}_h^0$, $\tilde{H}_h^0$ полной по аналогии с определениями H_h и H_h^0. Ради краткости обозначений индекс h в дальнейшем условимся в ряде случаев не указывать.

Нам потребуются линейные операторы $\bar{p}$ и $\tilde{p}$, отображающие H в $\bar{H}$ и в $\tilde{H}$ соответственно. Поскольку $\Omega_{\bar{h}} \subseteq \Omega_h$, то оператор $\bar{p}$ может быть определен очень просто:

$$(1.3) \qquad \bar{p}u(x) \equiv \bar{u}(x) \equiv u(x) \text{ при } x \in \Omega_{\bar{h}}.$$

Определение же оператора $\tilde{p}$ производится как с помощью формулы

$$(1.4) \qquad \tilde{p}u(x) \equiv \tilde{u}(x) \equiv u(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega_h \cap \Omega_{\tilde{h}},$$

так и с использованием интерполяции (линейной, квадратичной или кубической — в зависимости от нужной точности) по x_r.

А именно, при $x \in \Omega_{\tilde{h}} \setminus \Omega_h$ мы полагаем

$$(1.5) \qquad \tilde{p}u \equiv \tilde{p}_1 u(x) \equiv 2^{-1}\left[u\left(x - \frac{h_r}{2} l_r\right) + u\left(x + \frac{h_r}{2} l_r\right)\right],$$

$$(1.6) \qquad \tilde{p}u \equiv \tilde{p}_2 u(x) \equiv 8^{-1}\left[3u\left(x - \frac{h_r}{2} l_r\right) + 6u\left(x + \frac{h_r}{2} l_r\right) - u\left(x + \frac{3}{2} h_r l_r\right)\right],$$

$$(1.7) \qquad \tilde{p}u \equiv \tilde{p}_3 u(x) \equiv 16^{-1}\Big[-u\left(x - \frac{3}{2} h_r l_r\right) + 9u\left(x - \frac{h_r}{2} l_r\right) + 9u\left(x + \frac{h_r}{2} l_r\right) - u\left(x + \frac{3}{2} h_r l_r\right)\Big],$$

в зависимости от выбранного типа интерполяции, причем в точках, не принадлежащих Ω_h, значения $u(x)$ берутся равными нулю (ниже рассматривается лишь случай однородного краевого условия, что достаточно для изучения устойчивости разностных схем по начальным данным и по правой части).

1.2. Искажение норм операторами $\bar{p}$ и $\tilde{p}$. Введенные выше операторы $\bar{p}$ и $\tilde{p}$, отображающие H в пространства $\bar{H}$ и $\tilde{H}$, не являются изометрическими, т. е., вообще говоря, $\|\bar{p}u\|_{\bar{H}} \neq \|u\|_H \neq \|\tilde{p}u\|_{\tilde{H}}$, что вызывает необходимость дополнительного исследования их „меры неизометричности". Легко проверить справедливость следующей леммы:

Лемма 1. $\|\bar{p}\| \equiv \sup\limits_{u\neq 0} \|\bar{p}u\|_{\bar{H}} / \|u\|_H = \sqrt{2}.$

В доказательствах следующих лемм ради простоты записей предполагается, что изменения производятся по x_1.

Лемма 2. *Для любой функции $u \in H$ справедливо неравенство:*

$$\|\bar{p}u\|^2_{\bar{H}} \leq \|u\|^2_H + \sqrt{2h_r}\, \|\partial_r u\|_0 \, \|u\|_H. \tag{1.8}$$

Доказательство. Рассматривая финитное продолжение функции u, нетрудно заключить, что

$$\|\bar{p}u\|^2_{\bar{H}} - \|u\|^2_H \leq \hbar \sum_{i_2} \Big\{ 2 \sum_{i_1} (u_{2i_1,\, i_2})^2 - \sum_{i_1} (u_{i_1,\, i_2})^2 \Big\} \tag{1.9}$$

$$= h_1 \hbar \sum_{i_1,\, i_2} \partial_1 u_{i2_1,\, i_2} (u_{2i_1+1,\, i_2} + u_{2i_1,\, i_2}).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского для оценки сверху правой части (1.9), нетрудно из (1.9) получить нужное неравенство (1.8).

Лемма 3. *При всех указанных в (1.5) — (1.7) видах интерполяции справедливо неравенство*

$$\|\tilde{p}\| \equiv \sup_{u \neq 0} \|\tilde{p}u\|_{\tilde{H}} / \|u\|_H < 1. \tag{1.10}$$

Доказательство. Для доказательства (1.10) достаточно показать справедливость соответствующих неравенств для случая финитных функций, зависящих только от одного переменного x_1. А именно, если $\tilde{p}$ определяется по формулам (1.4) и (1.5) и $\|u\|_H > 0$, то (1.10) эквивалентно очевидному неравенству

$$\frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big[u_i^2 + \Big(\frac{u_i + u_{i+1}}{2} \Big)^2 \Big] \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i^2,$$

где $u_i \equiv u(ih_1)$. Если $\tilde{p}$ определяется по формулам (1.4) и (1.5) и $\|u\|_H > 0$, то (1.10) эквивалентно неравенству

$$\frac{h_1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [u_i^2 + (3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2})^2 / 64] < h_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i^2.$$

Это же неравенство легко приводится к виду

$$(1.11)\qquad h_1\sum_{i=-\infty}^{\infty}(6u_i^2-8u_{i+1}\,u_i+2u_{i+2}u_i)>0.$$

Остается еще заметить, что левая часть (1.11) может быть записана в виде $h_1^4(\bar\partial_1^2\partial_1^2 u, u)$ и поэтому равна $h_1^4\|\Delta_1 u\|_0^2$, это >0 при $\|u\|>0$. При использовании кубической интерполяции (1.7) неравенство (1.10) эквивалентно неравенству

$$\frac{h_1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Big[u_1^2+\frac{1}{256}(-u_i+9u_{i+1}+9u_{i+2}-u_{i+3})^2\Big]\leq h_1\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_i^2.$$

Последнее неравенство можно привести к неравенству

$$(1.12)\qquad h_1\sum_{i=-\infty}^{\infty}(92u_i^2-126u_iu_{i+1}+36u_iu_{i+2}-2u_iu_{i+3})>0.$$

Неравенство (1.12) будет справедливо при $\|u\|>0$, т. к. левая часть (1.12) может быть представлена в виде:

$$-h_1^6(\Delta^3u, u)_0+12h_1^4(\Delta^2(u, u)=h_1^6\|\partial^3u\|_0^2+12h_1^4\|\Delta u\|_0^2.$$

Заметим, что если бы мы рассматривали не финитные, а периодические по x_1 функции, то из приведенных доказательств можно заключить о том, что в этом случае $\|\widetilde{p}\|=1$.

1.3. Аппроксимация пространств сеточных функций. Приводимая ниже лемма полезна при исследовании итерационных методов типа [9—11] и разностных схем на сетках, меняющихся во времени. По-видимому, она представляет и самостоятельный интерес в связи с задачей аппроксимации пространства H_h пространством $\overline{H}_h$, родственная задачи аппроксимации исходного пространства последовательностью конечномерных подпространств изучалась, например в [12—14].

Пусть $\widetilde{p}'_m$ обозначает оператор $\widetilde{p}_m$ (см. (1.5)—(1.17)), отнесенный к пространству $\overline{H}$, т. е. он по функции u, заданной на сетке с шагом $2h_r$, восстанавливает функцию, заданную на сетке с шагом h_r.

Лемма 4. *Для любой функции $u\in H$ справедливы неравенства:*

$$(1.13)\qquad \|u-\widetilde{p}'_m\bar{p}u\|_0\leq A_mh_r\|\partial_r u\|_0,$$

$$(1.14)\qquad \|u-\widetilde{p}'_m\bar{p}u\|_0\leq B_mh_r^2\|\Delta_r u\|_0,$$

$$(1.15)\qquad A_1=\sqrt{2}/2,\quad B_1=1/2,\quad A_2=A_3=5/4,\quad B_2=B_3=3/4.$$

Доказательство. Можно проверить, что

$$\|u-\widetilde{p}'_1\bar{p}u\|_0^2=\frac{h}{4}\sum_{i_2}\sum_{i_1}(2u_{2i_1+1,\,i_2}-u_{2i_1,\,i_2}-u_{2i_1+2,\,i_2})^2,$$

$$\|u-\widetilde{p}'_2\bar{p}u\|_0^2=\frac{h}{64}\sum_{i_2}\sum_{i_1}(8u_{2i_1+1,\,i_2}-3u_{2i_1,\,i_2}-6u_{2i_1+2,\,i_2}+u_{2i_1+4,\,i_2})^2,$$

$$\|u-\widetilde{p}'_3\overline{p}u\|_0^2=\frac{\hbar}{256}\sum_{i_2}\sum_{i_1}(16u_{2i_1+3,\,i_2}+u_{2i_1,\,i_2}-9u_{2i_1+2,\,i_2}-9u_{2i_1+4,\,i_2}+u_{2i_1+6,\,i_2})^2.$$

Из этих представлений $\|u-\widetilde{p}_m\widetilde{p}u\|$ с помощью группировки и неравенства Коши-Буняковского нетрудно получить и неравенства (1.13)—(1.15).

2. Энергетические неравенства для неявных разностных схем на сетках, меняющихся во времени.

2.1. Исходные задачи. Пусть в цилиндре $Q_T\equiv\Omega\times[0\leq t\leq T]$ ищется $u(t, x)$ — решение краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\overset{\circ}{L}u=f,$$

$$u(0, x)=\varphi(x),\ x\in\Omega;\quad u(t, x)=0 \text{ при } x\in\Gamma,$$

где $\overset{\circ}{L}u\equiv-\sum_{r,\,l=1}^{2}D_r(a_{rl}(t, x)D_lu)+\sum_{r=1}^{2}b_r(t, x)D_ru+c(t, x)u,\ D_r\equiv\frac{\partial}{\partial x_r},$

$$\sum_{r,\,l=1}^{2}a_{rl}\xi_r\xi_l\geq\nu\sum_{r=1}^{2}\xi_r^2,\quad \nu>0.$$

В момент времени $t_{n+1}=t_n+\tau_n$, где $\tau_n>0,\ 0\leq n\leq\hat{k},\ t_0\equiv0\ \ t_{\hat{k}+1}=T$ будем рассматривать сетки с шагом $h^{n+1}\equiv(h_1^{n+1}, h_2^{n+1})$. Заменим оператор $\overset{\circ}{L}$, например, разностным оператором

$$(2.1)\quad L^{n+1}u_1\equiv-\frac{1}{2}\sum_{r,\,l=1}^{2}[\bar{\partial}_r(a_{rl}\partial_lu)+\partial_r(a_{rl}\bar{\partial}_lu)]_i+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}[b_r(\bar{\partial}_ru+\partial_ru)]_i+(cu)_i,$$

где все коэффициенты вычисляются при $t=t_{n+1}$. Предполагая теперь, что h^{n+1} совпадает либо с h^n, либо с $\bar{h}^n$, либо с $\widetilde{h}^n$ (см. 1), (h^{n+1} может отличаться от h^n лишь какой-то одной компонентой h_r^n), рассмотрим следующую разностную схему:

$$(2.2)\qquad \frac{u_i^{n+1}-(p^{n+1}u^n)_i}{\tau_n}+L^{n+1}u_i^{n+1}=f_i^{n+1},\quad x_i\in\Omega^{n+1},\quad 0\leq n\leq\hat{k},$$

$$(2.3)\qquad u_i^0=\varphi_i,\quad u_i^n=0,\quad x_i\in\Gamma^n,$$

где p^{n+1} в зависимости от указанных случаев есть либо тождественный оператор, либо $\bar{p}^{n+1}$, либо $\widetilde{p}^{n+1}$ (см. (1.3)—(1.7)), $\Omega^n\equiv\Omega_{h^n},\ \Gamma^n\equiv{}_{h^n}$.

Определим гильбертовы пространства $H_{h^n}\equiv H^n$ как в 1, полагая $(u, v)_{H^n}\equiv(u, v)_{(n)},\ \|u\|_{(n)}^2\equiv(u, u)_{(n)}$. Тогда (2.2), (2.3) можно переписать в операторном виде

$$(2.4)\qquad \frac{u^{n+1}-p^{n+1}u^n}{\tau_n}+\Lambda^{n+1}u^{n+1}=f^{n+1};\quad 0\leq n\leq\hat{k};\quad u^0=\varphi,$$

где $u^n\in H^n$, оператор Λ^{n+1} отображает H^{n+1} в H^{n+1} и определяется с помощью формулы (2.1); u_i^{n+1} на Γ^{n+1} считается равной нулю. Определим аналогично оператор $R_1^{n+1}u_i^{n+1} \equiv -\sum_{r=1}^{2} \Delta_r u_i^{n+1}, \quad x_i \in \Omega^{n+1}$.

Известно, что $(R_1^{n+1})^* = R_1^{n+1} > 0$ и что

$$\| u^{n+1} \|^2_{1,(n+1)} = \| u^{n+1} \|^2_{R_1^{n+1}} \equiv (R_1^{n+1}u^{n+1}, u^{n+1}) = \sum_{r=1}^{2} \| \partial_r u \|^2_0.$$

Положим также $\| f^{n+1} \|^2_{-1,(n+1)} \equiv ((R_1^{n+1})^{-1} f^{n+1}, f^{n+1})_{(n+1)}$.

2.2. Корректность. Предполагаем, что

$$(\Lambda^{n+1}u^{n+1}, u^{n+1}) \geq \delta \| u^{n+1} \|^2_{1,(n+1)} - \sigma \| u^{n+1} \|_{1,(n+1)} \| u^{n+1} \|_{(n+1)} \tag{2.5}$$

$$\delta > 0, \quad \sigma > 0$$

с константами, не зависящими от u^{n+1} и сетки [6, 7].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1), (2.5) и*

$$\max_n \tau_n \leq \tau^* < \min\left(T, \frac{\delta}{\sigma^2}\right).$$

Тогда для решения (2.4) справедливы априорные оценки:

$$\| u^{k+1} \|^2_{(k+1)} \leq \sigma_1 [e^{\sigma_2 t_k} \| \varphi \|^2_{(0)} + \sum_{n=0}^{k} \tau_n e^{\sigma_2 (t_{k+1} - t_n)} \| f^{n+1} \|^2_{-1,(n+1)}$$

$$\leq K_1 (\| \varphi \|^2_{(0)} + \sum_{n=0}^{k} \tau_n \| f^{n+1} \|^2_{-1,(n+1)}), \quad 0 \leq k \leq \hat{k}, \tag{2.6}$$

$$\| u \|^2_T \equiv \max_k \| u^{k+1} \|^2_{(k+1)} + \sum_{n=0}^{\hat{k}} \tau_n \| u^{n+1} \|^2_{1,(n+1)} \leq K_2 (\| \varphi \|^2_{(0)} + \sum_{n=0}^{\hat{k}} \tau_n \| f^{n+1} \|^2_{-1,(n+1)}),$$

где

$$\sigma_1 \equiv (\delta - \tau_* \sigma^2)^{-1}, \quad \sigma_2 \equiv \left(\sigma + \frac{\varkappa}{\sqrt{2}}\right)^2 \sigma_1, \quad K_1 \equiv \sigma_1 e^{\sigma_2 T}, \quad K_2 \equiv K_2(T, \tau, \sigma, \delta, \varkappa) \tag{2.7}$$

константа $\varkappa$ при $\omega_t^* = \widetilde{\omega}_t^*$ должна считаться равной нулю.

Доказательство. Из (2.4) обычным образом получаем

$$I_{1,k} + I_{2,k} = J_k, \quad 0 \leq k \leq \hat{k}, \tag{2.8}$$

где $I_{1,k} \equiv 2\sum_{n=0}^{k} (u^{n+1} - p^{n+1}u^n, u^{n+1})_{(n+1)}$, $I_{2,k} = 2\sum_{n=0}^{k} \tau_n (\Lambda^{n+1}u^{n+1}, u^{n+1})_{(n+1)}$,

$$J_k \equiv 2\sum_{n=0}^{k} \tau_n (f^{n+1}, u^{n+1})_{(n+1)}.$$

Для $I_{1,k}$ нетрудно получить оценку:

$$I_{1,k} \geq \| u^{k+1} \|^2_{(k+1)} - \| u^0 \|^2_{(0)} + \sum_{n=0}^{k} (\| u^n \|^2_{(n)} - \| p^{n+1}u^n \|^2_{(n+1)}).$$

Если же $t_n \in \bar{\omega}_t^*$, то в силу леммы 2:

$$\| u^n \|_{(n)}^2 - \| p^{n+1} u^n \|_{(n+1)}^2 \geqq -\sqrt{2} h_{\Gamma_n} \| \partial_r u^n \|_{0,(n)} \| u^n \|_{(n)}.$$

Если же $t_n \in \omega_t^0 \cup \bar{\omega}_t^*$, то в силу леммы 3 $\| u^n \|_{(n)}^2 - \| p^{n+1} u^n \|_{(n+1)}^2 \geqq 0$. Используя ещё условие (1), находим, что

$$I_{1,k} \geqq \| u^{k+1} \|_{(k+1)}^2 - \| u^0 \|_{(0)}^2 - \varkappa \sqrt{2} \sum_{t_n \in \bar{\omega}_t^*} \tau_{n-1} \| u^n \|_{1,(n)} \| u^n \|_{(n)}.$$

Для $I_{2,k}$ оценка снизу получается непосредственно из условия (2.5), а для J_k оценка сверху выводится обычным образом:

$$J_k \leqq 2 \sum_{n=0}^{k} \tau_n \| f^{n+1} \|_{-1,(n+1)} \| u^{n+1} \|_{1,(n+1)}.$$

Объединяя (2.8) и оценки $I_{1,k}$, $I_{2,k}$, и J_k, находим, что:

(2.9)
$$\| u^{k+1} \|_{(k+1)}^2 + 2\delta \sum_{n=0}^{k} \tau_n \| u^{n+1} \|_{1,(n+1)}^2 \leqq \| u^0 \|_{(0)}^2$$
$$+ 2 \sum_{n=0}^{k} \tau_n \| u^{n+1} \|_{1,(n+1)} (\sigma \| u^{n+1} \|_{(n+1)} + \| f^{n+1} \|_{-1,(n+1)})$$
$$+ \sqrt{2} \varkappa \sum_{t_n \in \bar{\omega}_t^*} \tau_{n-1} \| u^n \|_{1,(n)} \| u^n \|_{(n)}.$$

Из этого неравенства с помощью ε-неравенства $2ab \leqq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ получаем

(2.10)
$$\| u^{k+1} \|_{(k+1)}^2 \leqq \sigma_2 \sum_{n=0}^{k-1} \tau_n \| u^{n+1} \|_{(n+1)}^2 + \sigma_1 \left(\| u^0 \|_{(0)}^2 + \sum_{n=0}^{k} \tau_n \| f^{n+1} \|_{-1,(n+1)}^2 \right).$$
$$(k \geqq 1)$$

При $V_k \equiv \sum_{n=1}^{k-1} \tau_n \| u^{n+1} \|_{(n+1)}^2$ неравенство (2.10) переписывается в виде:

$$V_{k+1} \leqq (1 + \tau_k \sigma_2) V_k + \tau_k \sigma_1 \left(\| u^0 \|_{(0)}^2 + \sum_{n=0}^{k} \tau_n \| f^{n+1} \|_{-1,(n+1)}^2 \right).$$

Поэтому стандартным образом ([6], стр. 47; [7], стр. 311) можно оценить V_{k+1}, что вместе с неравенством (2.10) приводит к (2.16). Из (2.6) и (2.9) с помощью ε-неравенства выводится и оценка (2.7).

Заметим, что по аналогии со схемой (2.4) можно исследовать и корректность схемы вида $(u^{n+1} - p^{n+1} u^n)/\tau_n + \hat{\Lambda}^{n+1} u^{n+1} + Q^{n+1} p^{n+1} u^n = f^{n+1}$, где $\hat{\Lambda}^{n+1}$ удовлетворяет условию типа (2.5), а

$$| (Q^{n+1} p^{n+1} u^n, u^{n+1})_{(n+1)} | \leqq \sigma_3 \| u^n \|_{1,(n)} \| u^{n+1} \|_{(n+1)}.$$

При этом нетрудно так выбрать оператор $\hat{\Lambda}^{n+1}$, чтобы вместо условия (2.7) было $(\hat{\Lambda}^{n+1}u^{n+1},\ u^{n+1})_{(n+1)} \geqq \delta_1 \| u^{n+1} \|^2_{1,(n+1)}$, $\delta_1 > 0$, что делает излишним ограничение на τ_*. В случае, когда $\omega_t^* = \widetilde{\omega_t^*}$, т. е. при отсутствии разрежения сетки, использование леммы 3 позволяет исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{u^{n+1}-p^{n+1}u^n}{\tau_n} + \Lambda^{n+\frac{1}{2}} \frac{u^{n+1}+p^{n+1}u^n}{2} = f^{n+\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

где индекс $n+1/2$ означает, что соответствующие коэффициенты берутся при $t = t_n + \tau_n/2$. Для исследования устойчивости (2.11) можно, например, использовать оценки из ([6], стр. 85).

2.3. Разностная схема с расширенно расщепляющимся оператором. Ограничимся простейшим примером, когда

$$\overset{\circ}{L}u \equiv \sum_{r=1}^{2} \overset{\circ}{L}_r u, \quad \overset{\circ}{L}_r u \equiv - D_r^2 u.$$

При заданном шаге $h^n \equiv (h_1^n,\ h_2^n)$ будем определять Ω^n как множество x_i, принадлежащих $\bar{\Omega}$ вместе с прямоугольниками: $| x_r - i_r h_r^n | \leqq h_r^n$, $r = 1,2$.

Рассмотрим следующую разностную схему:

$$\frac{1}{\tau_n}\left\{\left[\prod_{r=1}^{2}(E-\tau_n\Lambda_r)\right]u^{n+1}\right\}_i - \frac{1}{\tau_n}(p^{n+1}u^n)_i = f_i^{n+1}, \quad x_i \in \Omega^{n+1} \tag{2.12}$$

$$u_i^0 = \varphi_i; \quad u_i^n = 0, \quad x_i \in \Gamma^n. \tag{2.13}$$

Известно ([6], стр. 191), что функция u^{n+1} для ряда криволинейных областей может быть найдена с затратой всего лишь $O((h_1^{-n}\ h_2^{-n})$ арифметических действий. Схему (2.12), (2.13) можно переписать в операторном виде

$$\frac{u^{n+1}-p^{n+1}u^n}{\tau_n} + R_1^{n+1}u^{n+1} + \tau_n R_2^{n+1}u^{n+1} = f^{n+1}, \quad u^0 = \varphi, \tag{2.14}$$

где $R_1^n u_i^n \equiv -\sum_{r=1}^{2} \Lambda_r u_i^n$; $R_2^n u_i^n \equiv \Lambda_1 \Lambda_2 u_i^n$. Эти операторы R_l^n являются самосопряженными, положительно определенными и порождают нормы $\| u^n \|_{l,(n)}$, $\| u^n \|_{-l,(n)}$, где $\| u^n \|_{l,(n)} \equiv (R_l^n u^n,\ u^n)^{1/2}_{(n)}$, $\| u^n \|_{-l,(n)} \equiv ((R_l^n)^{-1}u^n,\ u^n)^{1/2}_{(n)}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (1) и* $\hat{k} \geqq 0$. *Тогда для решения (2.14) с*

$$f^{n+1} = \sum_{l=1}^{2} \tau_n^{l-1} f_l^{n+1}$$

справедлива априорная оценка:

$$\| u \|^2 \equiv \max_k \| u^k \|^2_{(k)} + \sum_{n=0}^{\hat{k}} \sum_{l=1}^{2} (\tau_n)^l \| u^{n+1} \|^2_{l,(n+1)}$$

$$\leq K_3 \left\{ \| \varphi \|^2_{(0)} + \sum_{n=0}^{\hat{k}} \sum_{l=1}^{2} (\tau_n)^l \| f^{n+1} \|^2_{-l,\,(n+1)} \right\},$$

где $K_3 \equiv K_3(T, \varkappa)$. Доказательство этой теоремы сочетает доказательство соответствующей теоремы для случая постоянной сетки ([6], стр. 66) и уже рассмотренные выше дополнительные моменты, саязанные с изменением сетки.

3. Оценки погрешности и задачи оптимизации, связанные с изменением сетки

3.1. Оценки погрешности. Рассмотрим задачу оценки погрешности разностной схемы (2.4), (2.5).

Обозначая через z разность решений исходной и разностной задачи получим, что z удовлетворяет системе:

$$\frac{z_i^{n+1} - (p^{n+1} z^n)_i}{\tau_n} + L^{n+1} z_i^{n+1} = \zeta_{1,i}^{n+1} + \zeta_{2,i}^{n+1}, \quad x_i \in \Omega^{n+1},$$

$$z_i^0 = 0, \quad x_i \in \Omega^0,$$

$$\begin{cases} z_i^n = 0 & \text{при} \quad x_i \in \Gamma^n \cap \Gamma \\ z_i^n \neq 0 & \text{при} \quad x_i \in \Gamma^n \setminus \Gamma, \end{cases}$$

где $\zeta_{1,i}^{n+1}$ — погрешность аппроксимации дифференциального оператора $\overset{\circ}{L}$ разностным оператором L^{n+1} в точке (t_{n+1}, x_i),

$$\zeta_{2,i}^{n+1} \equiv \frac{u_i^{n+1} - (p^{n+1} u^n)_i}{\tau_n} - D_0 u_i^{n+1}, \tag{3.1}$$

u — точное решение краевой задачи.

Пусть $\| z^n \|^2_{(n)} \equiv h_1^n h_2^n \sum_{x_i} (z_i^n)^2, \quad x_i \in \Omega^n \cup \Gamma^n,$

$$\| z^n \|^2_{1,\,(n)} \equiv h_1^n h_2^n \sum_{x_i} [(\partial_1 z_i^n)^2 + (\partial_2 z_i^n)^2], \tag{3.2}$$

где суммирование в (3.2) проводится по всем точкам $\Omega^n \cup \Gamma^n$, в которых определены соответствующие разности. Пусть также $z_i^n = w_i^n + g_i^n$, где g^n — функция, равная нулю на Ω^n и совпадающая с z^n на Γ^n. Тогда для $\{w^n\}$ получаем операторное соотношение $((w^{n+1} - p^{n+1} w^n)/\tau_n + \Lambda^{n+1} w^{n+1} = \zeta_1^{n+1} + \zeta_2^{n+1} + \zeta_g^{n+1} \equiv \zeta^{n+1}$, где ζ_1 и ζ_2 определены выше, а

$$(\zeta_g^{n+1})_i \equiv -\frac{g_i^{n+1} - (p^{n+1} g^n)_i}{\tau_n} - L^{n+1} g_i^{n+1} \tag{3.3}$$

и может быть отлично от нуля лишь в приграничных точках Ω^{n+1}. Таким образом, для оценки функции w^n можно воспользоваться теоремой 1, если известны оценки $\| \zeta_1^n \|_{-1,\,(n)}$, $\| \zeta_2^n \|_{-1,\,(n)}$, $\| \zeta_g^n \|_{-1,\,(n)}$. Оценки же последних величин существенно зависят от имеющейся информации об исходных данных и искомом решении и типов применяющихся сеток. Для $\|\zeta_1^n\|_{-1,(n)}$ обычным образом могут быть получены оценки типа

$$\|\zeta_1^n\|_{-1,(n)} \leqq M_{1,1}|h^n|^\alpha, \quad (\alpha = 1/2,\ \alpha = 1,\ \alpha = 2) \tag{3.4}$$

в зависимости от гладкости исходных данных и решения ([15], стр. 131); для $\alpha = 1/2$, например, требуется, чтобы все производные $D_r u$ удовлетворяли условию Липшица, а коэффициенты a_{rl} могут быть и кусочнонепрерывны.

Предположим, что $\|u_i^n\| \leqq M_{2,0}|h^n|$ при $x_i \in \Gamma^n$ и что $|h^n|h_r^{-n} \leqq \nu_0$, $r = 1$, $r = 2$. Тогда для $\|\zeta_2^{n+1}\|_{-1,(n+1)}$ можно получить оценки типа

$$\|\zeta_2^{n+1}\|_{-1,(n+1)} \leqq M_{2,1}^{(n+1)}\tau_n + M_{2,2}^{(n)}|h^n|^{\alpha_1}/\tau_n + M_{2,3}|h^n|^{\frac{5}{2}}\tau^n \tag{3.5}$$

с константами $M_{2,r} > 0$, причём при $t_n \in \omega_t^0 \cup \bar{\omega}_t^*$ константы $M_{2,2}^{(n)}$ и $M_{2,3}$ равны нулю, а при $t_n \in \widetilde{\omega}_t^*$ показатель α_1 равен степени соответствующей интерполяции (см. (1.5) — (1.7)), увеличенной на единицу, и число $M_{2,3} = 0$, если $\Gamma^n \subset \Gamma$ и применялась линейная интерполяция. В самом деле, при $t_n \in \omega_t^0 \cup \bar{\omega}_t^*$ формула (3.1) упрощается и принимает вид $\zeta_{2,i}^{n+1} = (u_i^{n+1} - u_i^n)/\tau_n - D_0 u_i^{n+1}$ и, следовательно, можно при соответствующей гладкости считать, что

$$\|\zeta_2^{n+1}\|_{(n+1)} = O(\tau_n) \quad \text{и} \quad \|\zeta_2^{n+1}\|_{-1,(n+1)} = O(\tau_n).$$

В остальных же случаях $\zeta_{2,i}^{n+1}$ может быть представлена в виде:

$$\zeta_{2,i}^{n+1} = ((u_i^{n+1} - u^n)/\tau_n - D_0 u_i^{n+1}) + (u_i^n - (p^{n+1}u^n)_i/\tau_n.$$

Разность $u_i^n - (p^{n+1}u^n)_i$ при $\Gamma^n \subset \Gamma$ и использовании линейной интерполяции легко оценивается как $O(|h^n|^2)$. При использовании же квадратичной и кубической интерполяции мы в формулах (1.6) и (1.7) в некоторых точках $x_i \notin \Omega^n$ брали нулевое значение вместо $u(t_n, x_i)$ и тем самым допускали ошибку в некоторых приграничных точках типа $O(|h^n|)$. Поэтому в этих приграничных точках $|\widetilde{\zeta}_{2,i}^{n+1}| \equiv |u_i^n - (p^{n+1}u^n)_i|/\tau_n = O(|h^n|/\tau_n)$, а в остальных точках $\tau_n|\widetilde{\zeta}_{2,i}^{n+1}|$ совпадает с погрешностью соответствующей интерполяции. Вводя в рассмотрение функцию η_2^{n+1}, совпадающую с $\tau_n\widetilde{\zeta}_2^{n+1}$ в указанных приграничных точках и равную нулю в остальных, можно показать, что

$$\eta_{2,i}^{n+1} = \sum_{s=1}^{2} (\bar{\partial}_s \bar{\psi}_{s,i}^{n+1} + \partial_s \psi_{s,i}^{n+1}),$$

где функции $\bar{\psi}_s^{n+1}$ и ψ_s^{n+1} могут быть отличны от нуля лишь в некоторых граничных и приграничных точках, число которых есть $O(|h^n|^{-1})$, причём в этих точках они оцениваются как $O(|h^n|^2)$. Поэтому, применяя указанный, например, в [6] на стр. 98 способ оценки $\|\eta_2^{n+1}\|_{-1,(n+1)}$ нетрудно найти, что

$$\| \eta_2^{n+1} \|_{-1,\,(n+1)} = O(|h^n|^{\frac{5}{2}}). \tag{3.6}$$

Из вышесказанного и вытекает справедливость оценки (3.5). Осталость найти оценку для $\| \zeta_g^{n+1} \|_{-1,\,(n+1)}$ (см. (3.3)). Имеем:

$$\| \zeta_g^{n+1} \|_{-1,\,(n+1)} \leq \| L^{n+1} g^{n+1} \|_{-1,\,(n+1)} + \| (g^{n+1} - p^{n+1} g^n)/\tau_n \|_{-1,\,(n+1)}. \tag{3.7}$$

Оба слагаемых в (3.16) можно оценить сверху по аналогии с получением оценки (3.15), что дает:

$$\| L^{n+1} g^{n+1} \|_{-1,\,(n+1)} \leq M_3^1 |h^{n+1}|^{\frac{1}{2}},$$

$$\| \zeta_g^{n+1} \|_{-1,\,(n+2)} \leq M_{3,1}^{(n+1)} |h^{n+1}|^{\frac{1}{2}} + M_{3,2} |h^n|^{\frac{5}{2}}/\tau_n, \tag{3.8}$$

причём нетрудно сообразить, что если все $\Gamma^n \subseteq \Gamma$ и либо $t_n \in \omega_t^0 \cup \omega_t^*$, либо $t_n \in \widetilde{\omega}_t^*$ и применяется линейная интерполяция, $M_{3,1}^{(n+1)} = 0$, $M_{3,2} = 0$. Из оценок (3.4), (3.5) и (3.8) следует, что

$$\| \zeta^{n+1} \|^2_{-1,\,(n+1)} \leq M_1^{(n+1)} |h^{n+1}|^\beta + M_2^{(n+1)} \tau_n^2 + M_3^{(n)} |h^n|^\gamma/\tau_n^2 \tag{3.9}$$

с соответствующими $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1; коэффициенты исходной задачи и её решение таковы, что справедлива оценка (3.9) и:*

$$\overline{\| g^n \|}^2_{(n)} \leq M |h^n|^2,$$

$$\| g^n \|^2_{1,\,(n)} \leq M_0 |h^n|. \tag{3.10}$$

Тогда:

$$\| z^{k+1} \|^2_{(k+1)} \leq 2\{M |h^{k+1}|^2 + \sum_{n=0}^{k} \tau_n (\overline{M}_1^{(n+1)} |h^{n+1}|^\beta + \overline{M}_2^{(n+1)} \tau_n^2)$$

$$+ \sum_{t_n \in \widetilde{\omega}_t^*} \overline{M}_3^{(n)} |h^n|^\gamma/\tau_n, \tag{3.11}$$

$$\overline{\| z \|}^2_T \leq 2 \Big\{ M \max_n |h^n|^2 + K_2 \sum_{n=0}^{\hat{k}-1} \tau_n [K_2^{-1} M_0 |h^{n+1}| + M_1^{(n+1)} |h^{n+1}|^\beta$$

$$+ M_2^{(n+1)} \tau_n^2] + K_2 \sum_{t_n \in \widetilde{\omega}_t^*} M_3^{(n)} |h^n|^\gamma/\tau_n \Big\} \tag{3.12}$$

где

$$\overline{M}_r^{(n+1)} = M_r^{(n+1)} \sigma_1 e^{\sigma_2 (T - t_n)},\ \overline{\| z \|}^2_T = \max_n \overline{\| z^n \|}^2_{(n)} + \sum_{n=0}^{\hat{k}-1} \tau_n \overline{\| z^{n+1} \|}^2_{1,\,(n+1)}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\| z^{k+1} \|^2_{(k+1)} \leqq 2 (\| g^{k+1} \|^2_{(k+1)} + \| w^{k+1} \|^2_{(k+1)}).$$

Для оценки w^{k+1} можно применить теорему 1, что вместе с (3.9) и (3.10) приводит к (3.11). Аналогично получается и оценка (3.12). Оценки (3.11) и (3.12) содержат ряд важных частных случаев: например, при $\Gamma^n \subseteq \Gamma$ и пустом множестве $\widetilde{\omega}^*_t$ можно считать, что $\overline{M}^{(n)}_3 = 0$, $\gamma = 4$ (при подходящей гладкости исходных данных и решения).

Для ряда простых областей Ω, когда можно построить в явном виде достаточно гладкую функцию типа g^n, снимающую погрешность краевых условий, слагаемое $M_0 | h^n |$ в (3.10) и (3.12) можно заменить на $M_0 | h^n |^2$ ([6], стр. 101 и [17]). Следует заметить, что если бы вместо 1-ой краевой задачи рассматривалась задача Коши с периодическими данными, то можно было бы считать $\gamma = 2\alpha_1$, $M^{(n)}_{2,3} = M^{(n)}_{3,1} = M^{(n)}_{3,2} = 0$. Именно для этого случая при $\beta = 2$ и представляет особый интерес использование кубической интерполяции.

3.2. Потеря аппроксимации в отдельные моменты времени. Предположим, что на отрезке времени $[0, T]$ при наборе значений $t'_1, t'_2, \ldots, t'_m$ могут отсутствовать производные, которые использовались для получения оценки (3.9). Причём нормы этих производных ведут себя в окрестности каждого t'_k, как $O((t-t'_k)^{-\varrho})$, $O \leqq \varrho < 5/2$.

Тогда всё же можно получить некоторые оценки погрешности, если известно, например, что искомое решение всюду удовлетворяет условию Липшица по t с константой Q. Для простоты изложения рассмотрим только $m = 1$ и $0 < t' \equiv t'_1 < T$ (случай $t' = 0$ и $t' = T$ рассматриваются аналогично). Возьмем такую временную сетку, что при некотором $r > 0$ будет $t_{r-1} < t' < t_{r+1}$. В разностной схеме соотношения (2.1) будем использовать лишь при $n \neq r-1$, $n \neq r$, заменяя их при $n = r-1$ и $n = r$ соотношениями:

$$u^r_i = u^{r-1}_i, \quad u^{r+1}_i = u^r_i, \quad x_i \in \Omega^{r-1} \cup \Gamma^{r-1} \tag{3.13}$$

т. е. $t_{r-1} \in \omega^0_t$, $t_r \in \omega^0_t$. Тогда на отрезке $[0, t_{r-1}]$ в силу теоремы 3 можно получить оценку $\max\limits_{0 \leqq n \leqq r-1} \overline{\| z^n \|}_{(n)}$. В силу (3.13) нетрудно найти, что

$$\max_{0 \leqq n \leqq r-1} \overline{\| z^n \|}_{(n)} \leqq \max_{0 \leqq n \leqq r-1} \overline{\| z^n \|}_{(n)} + Q(\tau_{r-1} + \tau_r)(\mathrm{mes}\, \Omega)^{\frac{1}{2}}.$$

После этого на отрезке $[t_{r+1}, T]$ можно вновь использовать теорему 3, т. к. оценка начальной погрешности для этого отрезка только что найдена выше. Тем самым находится полная оценка погрешности для $\max\limits_n \overline{\| z^n \|}_{(n)}$: Вклад в эту оценку, вносимый погрешностями аппроксимации вблизи критической точки t', можно оценить с помощью следующей леммы:

Лемма 5. *Пусть* $t_{r-1} < t'$, $0 \leqq \varrho$, $A \geqq 0$, $a_n \geqq 0$,

$$\| \eta^{n+1} \|^2_{-1,(n+1)} \leqq A a_n (t' - t_{n+1})^{-\varrho}; \quad \tau_n (t' - t_{n+1})^{-1} < q; \quad n = r-1-r^*, \ldots, r-1. \tag{3.14}$$

Тогда

$$(3.15)\quad \sum_{n=r-2-r^*}^{r-2} \tau_n \|\eta^{n+1}\|^2_{-1,(n+1)} \le A \left\{ \sum_{n=r-2-r^*}^{r-2} \tau_n a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} K(\varrho, t'-t_{r-1}, t_{r-r^*-2}),$$

где

$$K(\varrho, t'-t_{r-1}, t_{r-r^*-2}) \equiv (1+q)^{\varrho} \begin{cases} (1-2\varrho)^{-\frac{1}{2}}(t'-t_{r-2-r^*}) & \text{при } 0 \le \varrho < \frac{1}{2}, \\ \left(\ln \frac{t'-t_{r-1}}{t'-t_{r-r^*-2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{при } \varrho = \frac{1}{2}, \\ (2\varrho-1)^{-\frac{1}{2}}(t'-t_{r-1})^{\frac{1-2\varrho}{2}} & \text{при } \varrho > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Доказательство: в силу (3.14) и неравенства Коши — Буняковского:

$$(3.16)\quad \sum_{n=r-r^*-2}^{r-2} \tau_n \|\eta^{n+1}\|^2_{-1,(n+1)} \le A \left\{ \sum_{n=r-r^*-2}^{r-2} \tau_n a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=r-r^*-2}^{r-2} \tau_n (t'-t_{n+1})^{-2\varrho} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

Заметим теперь, что

$$(3.17)\quad \sum_{n=r-r^*-2}^{r-2} \tau_n (t'-t_{n+1})^{-2\varrho} \le (1+q)^{2\varrho} \int_{t_{r-r^*-2}}^{t_{r-1}} (t'-t)^{-2\varrho} dt$$

и, следовательно, оценка (3.15) следует из (3.16) и (3.17). Предполагая, что $t_{r+1} > t'$, $\frac{\tau_n}{t_n - t'} \le q$, $\|\eta^{n+1}\|^2_{-1,(n+1)} \le A a_n (t_n - t')^{-2\varrho}$, $n = r+1, r+2, \ldots, r+r^*$, аналогично (3.15) можно оценить величину $\sum_{n=r+1}^{r+r^*} \tau_n \|\eta^{n+1}\|^2_{-1,(n+1)}$. При применении указанных оценок следует предполагать, что $A^{1/2}(t'-t_{n+1})^{-\frac{\varrho}{2}}$ мажорирует нормы соответствующих производных, а $a_n^{1/2}$ выступает в роли соответствующих величин типа τ_n, $|h^n|^{\beta}$, $\tau_n^{-1}|h^n|^{\gamma}$, связанных с сеткой. Частные случаи указанных оценок рассматривались в [2, 3] и ([17], стр. 88). Заметим, что условие $\varrho < 5/2$ использовалось лишь для того, чтобы имелась сходимость при $\tau_n \to 0$, т. к., например, при $\tau_n = \tau$ и $1/2 < \varrho < 5/2$ погрешность, вносимая аппроксимацией $D_0 u$, будет типа $O(\tau^2 \tau^{(1-2\varrho)/2})$.

3.3. Задачи оптимизации. Общая схема рассуждений при рассмотрении задач минимизации погрешности при ограничении числа узлов (вычислительной работы) примерно та же, что и в ([8] стр. 147 и 606): получается оценка погрешности, зависящая как от исходных данных, так и параметров, характеризующих сетки; фиксируется допустимый класс параметров, что связано как с ограничениями на число узлов, так и с предположениями, использованными при выводе соответствующей оценки погрешности; выбирается набор параметров, дающий в допустимом классе погрешность, достаточно близкую к минимальной. Нетрудно понять, что для рассматривавшихся выше разностных схем, зависящих от большого числа параметров $\hat{k}$, τ_n, h^n, $\varkappa$ и связанных ещё сложной зависимостью $h_r^{n+1}=d_r h_r^n$, где d_r, например, при сгущении сетки может принимать значения 1 и 1/2, указанная задача оптимизации является крайне сложной. Можно указать серию более простых случаев для задачи, когда можно резко уменьшить число исходных параметров и тем самым повысить её практическую значимость.

Пусть, например, рассматривается случай задачи Коши с периодическими данными по x (длина периода равна 1) для уравнения $D_0 u - D^2 u = f$. Пусть $0 < T_1 < T$ и на $[0, T]$ производные $D_0^2 u$ и $D^4 u$ ограничены константами A_0 и A_1, а на $[T_1, T]$ — константами B_0 и B_1, причём $B_0 \geq A_0$, $B_1 \geq A_1$. Пусть применяются сетки с постоянным шагом по времени на каждом из отрезков $[0, T]$, $[T_1, T]$ и фиксировано общее число узлов пространственно-временной сетки. Требуется выяснить, что делать: применять ли всюду на $[0, T]$ сетку постоянную по x или же при $t = T_1$ провести её сгущение в два раза с использованием кубической интерполяции. Таким образом, неизвестными параметрами служат: $h > 0$ — шаг по x при $t = 0$, $\tau^{(1)} > 0$, $\tau^{(2)} > 0$, — шаги по времени на $[0, T_1]$ и $[T_1, T]$ и число d, равное 1 или 1/2. Ограничениями, связанными с целочисленностью $1/h$, $T_1/\tau^{(1)}$ и $(T - T_1)/\tau^{(2)}$, будем пренебрегать. Ограничение, связанное с общим числом используемых узлов, запишется как

$$\frac{T_1}{\tau^{(1)}}\frac{1}{h} + \frac{T - T_1}{\tau^{(2)}}\frac{1}{dh} \leq N. \tag{3.18}$$

Тогда $\max\limits_n \| z^n \|^2 \leq W_d(h, \tau^{(1)}, \tau^{(2)})$, где

$$W_1(h, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}) \equiv T_1\left(\frac{A_0}{2}\tau^{(1)} + \frac{A_1}{12}h^2\right)^2 + (T - T_1)\left(\frac{B_0}{2}\tau^{(2)} + \frac{B_1}{12}h^2\right)^2,$$

$$W_{1/2}(h, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}) \equiv T_1\left(\frac{A_0}{2}\tau^{(1)} + \frac{A_1}{12}h^2\right)^2 + \frac{9A_1^2 h^8}{128^2\tau^{(2)}} + (T - T_1)\left(\frac{B_0}{2}\tau^{(2)} + \frac{B_1}{48}h^2\right)^2. \tag{3.19}$$

Задача минимизации функций W_1 и $W_{1/2}$ по трём положительным параметрам h, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, для которых можно предполагать выполнение (3.18) в форме равенства, является достаточно простой: считая фиксированным h из (3.18) можно выразить $\tau^{(2)}$ через $\tau^{(1)}$ и h и найти наилучшие значения $\tau^{(2)}$ и $\tau^{(1)}$; после этого можно отыскать и наилучшее значение h и связанные с ним $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$. Сравнивая полученные минимумы для W_1 и $W_{1/2}$, находим и наилучшее значение d. Слагаемым $9A_1^2 h^8/128^2\tau^{(2)}$ в (3.19), вызванным погрешностью интерполирования, при этом можно, по-видимому, пренебрегать для более сложных случаев, например, когда известны оценки соответствующих производных на большом числе интервалов и возможны многократные изменения сеток, по-видимому, целесообразно иметь специально составленные программы для решения возникающих задач минимизации функций многих переменных [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Бахвалов. Об оптимальных способах задания информации при решении дифференциальных уравнений. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* **2**, 1962, № 4, 569—592.
2. Н. С. Бахвалов. Об оценке количества вычислительной работы, необходимой при приближенном решении задач. С. К. Годунов и В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1962, 316—329.
3. Чжан Гуан Цзюань. О минимальном числе узлов при численном интегрировании уравнения теплопроводности. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* **2**, 1962, № 1, 80—89.
4. Г. Б. Алалыкин и др. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. Москва, 1970.
5. Ф. П. Васильев. О методе конечных разностей для решения однофазовой задачи Стефана. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **3**, 1963, № 5, 861—873.
6. Е. Г. Дьяконов. Разностные методы решения краевых задач. Нестационарные задачи. Москва, МГУ, Вып. 2, 1972.
7. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.
8. Н. С. Бахвалов. Численные методы. Москва, 1973.
9. Р. П. Федоренко. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. *Успехи мат. наук*, **38**, 1973, № 2, 121—183.
10. Н. С. Бахвалов. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **6**, 1966, № 5, 861—883.
11. Г. П. Астраханцев. Конечно-разностный метод решения третьей краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений в произвольной области. Итерационное решение разностных уравнений. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **11**, 1971, № 1, 105—121.
12. I. P. Aubin. Approximation of elliptic boundary-value problems. New York, 1972.
13. Ю. К. Демьянович. Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **8**, 1968, № 1, 79—96.
14. Н. А. Стрелков. Об аппроксимациях некоторых функциональных пространств и их применениях. *Доклады АН СССР*, **200**, 1973, № 3, 565—568.
15. Е. Г. Дьяконов. Разностные методы решения краевых задач. Вып. 1 (Стационарные задачи). Москва, МГУ, 1971.
16. А. Д. Ляшко, М. М. Карчевский. Исследование одного класса нелинейных разностных схем. *Изв. высш. учебн. заведений. Математика*, **98**, 1970, № 7.
17. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Москва, 1960.
18. Ф. П. Васильев. Основы численных методов решения экстремальных задач. Вып. 1. Москва, МГУ, 1972.

СССР Москва, М — 461
ул. Херсонская, д. 7, корпус 4, кв. 47

Поступила 9. 1. 1975 г.

ул. 6ти септември, 76-Б
Русе Болгария