

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>

or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ОДНО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ГЕОРГИ З. ЗЛАТАНОВ

Полугеодезические кодационные сети (v, w) с общим геодезическим полем v_i и чебышевским вектором $a_i = \partial_i a$ единичной сферы пространства E_3 определяют линейчатые поверхности, являясь для них сферическими отображениями асимптотических.

Эти линейчатые поверхности имеют одинаковые гауссовы кривизны, параллельные прямолинейные образующие и получаются друг от друга распределением прямолинейных образующих $\varphi = \text{const}$ (Д. Ф. Егоров, 1970).

Если g_{is} и g_{is}^* первые тензоры двух из этих линейчатых поверхностях, то

$$g_{is}^* - g_{is} = 4e^{a_i \varphi} F(\varphi) [F(\varphi) e^{-a} + 2 \text{ctg } \omega].$$

В работе рассматривается множество кодационных сетей с общим геодезическим семейством и общим чебышевским вектором на единичной сфере пространства E_3 . Каждая такая сеть определяет линейчатую поверхность, что приводит к преобразованию линейчатых поверхностей с сохранением гауссовой кривизны. Это преобразование является частным случаем преобразования поверхности путем распределения линий, изученного Д. Ф. Егоровым [2].

Пусть на единичной сфере дано геодезическое поле v_i . Рассмотрим все полугеодезические кодационные сети сферы с общим геодезическим полем v_i и одинаковыми чебышевскими векторами $a_i = \partial_i a$. Как известно [1, § 30] признак существования полугеодезической сети с данным геодезическим полем v_i и чебышевским вектором $a_i = \partial_i a$ имеет вид

$$(1) \quad e^a v_i = (\text{grad } \varphi) = \partial_i \varphi.$$

Кроме того, при выполнении [1, § 30, (1)] следует, что существует бесконечное число сетей с общим геодезическим полем v_i и одинаковыми чебышевскими векторами $a_i = \partial_i a$.

Пусть сеть (v, w) на сфере является кодационной. Если ω — сетевой угол сети (v, w) , то согласно [1; § 21, § 23] имеем

$$(2) \quad a_i w^i \sin \omega = r = t_i v^i = \omega_i v^i,$$

где r — чебышевская кривизна линии (v) , а t_i — трансверсальный вектор поля w_i . Вектор w_i можно разложить по ортогональным векторам v_i и \tilde{v}_i

$$(3) \quad w_i = v_i \cos \omega + \tilde{v}_i \sin \omega.$$

В силу (2) и (3) находим уравнение для сетевого угла

$$\frac{\omega_i v^i}{\sin^2 \omega} = a_i v^i \text{ctg } \omega + a_i \tilde{v}^i,$$

которое можно записать следующим образом: $(\text{ctg } \omega)_i v^i = -a_i v^i \text{ctg } \omega - a_i \tilde{v}^i$. Умножая обе части этого равенства на e^a , находим

$$(4) \quad [(e^a \text{ctg } \omega)_i - (\tilde{e}^a)_i] v^i = 0,$$

где $(\tilde{e}^a)_i = \gamma_i^k (e^a)_k$, γ_i^k — аффинор метрического тензора единичной сферы.

Пусть (v, p) другая кодацциева сеть с чебышевским вектором $a_i = \partial_i a$ и сетевым углом θ . Можно записать аналогично как (4)

$$(5) \quad [(e^a \text{ctg } \theta)_i - (\tilde{e}^a)_i] v^i = 0.$$

Из (1), (4) и (5) имеем

$$(6) \quad e^a (\text{ctg } \theta - \text{ctg } \omega) = F(\varphi).$$

Этим доказана

Лемма. Множество всех полугеодезических кодацциевых сетей с общим геодезическим полем v_i и одинаковыми чебышевскими векторами $a_i = \partial_i a$ на единичной сфере определяется с точностью до одной произвольной функцией $F(\varphi)$, где $e^a v_i = \partial_i \varphi$.

Пусть S и S^* — линейчатые поверхности, для которых сети (v, ω) и (v, p) являются сферическими отображениями асимптотических. Если b_{ij} и b_{ij}^* обозначают вторые тензоры поверхностей S и S^* , то как известно

$$(7) \quad b_{ij} = 2 \frac{v_i \omega_j}{\sin \omega} e^{2a}, \quad b_{ij}^* = 2 \frac{v_i p_j}{\sin \theta}.$$

Подставляя b_{ij} и b_{ij}^* из (6) в формулы $r_i = -b_{is} \gamma^{sk} n_k$, $r_i^* = -b_{is}^* \gamma^{sk} \bar{n}_k$, где r и r^* являются радиусвекторами поверхностей S и S^* , а \bar{n} — нормальный вектор поверхностей, находим

$$(8) \quad \begin{aligned} \tilde{r}_i &= -2 (\varphi_i \tilde{\varphi}^k \text{ctg } \omega - \varphi_i \tilde{\varphi}_s \gamma^{sk}) n_k, \\ \bar{r}_i^* &= -2 (\varphi_i \tilde{\varphi}^k \text{ctg } \theta - \varphi_i \tilde{\varphi}_s \gamma^{sk}) \bar{n}_k. \end{aligned}$$

Из (6) и (8) следует

$$(9) \quad \bar{r}^* - \bar{r} = -2 \int F(\varphi) \tilde{v}^k \bar{n}_k \varphi_i dk^i = \bar{R}(\varphi).$$

Согласно (9) и в силу [2] вытекает, что поверхность S^* получается путем распределения геодезических $\varphi = \text{const}$ поверхности S [2]. Так как $a_i = -1/4 \partial_i \ln K$, то гауссовы кривизны поверхностей S и S^* равны. Из (9) следует, что прямолинейные образующие поверхностей S и S^* параллельные.

Этим доказана

Теорема. Линейчатые поверхности, сферическое отображение сетей асимптотических которых являются полугеодезическими кодацциевыми сетями с одинаковыми чебышевскими векторами и общим геодезическим полем, получают друг из друга распределением прямолинейных образующих, имеют одинаковые гауссовы кривизны и параллельные образующие.

В силу (8) для метрических тензоров поверхностей S и S^* находим $g_{is} = 4e^{2a}\varphi_s(\operatorname{ctg}^2 \omega + 1)$, $g_{is}^* = 4e^{2a}\varphi_i\varphi_s(\operatorname{ctg}^2 \theta + 1)$, откуда согласно (4) получаем $g_{is}^* - g_{is} = 4e^a\varphi_i\omega_s F(\varphi)[F(\varphi)e^{-a} + 2\operatorname{ctg} \omega]$, где ω является сетевым углом асимптотической сети поверхностей S .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Москва, 1963.
2. Д. Ф. Егоров. Работы по дифференциальной геометрии. Москва, 1970.

Пловдивский университет
4000 Пловдив

Поступила 17. 9. 1973