Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДНО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ГЕОРГИ З. ЗЛАТАНОВ

Полугеодезические кодацциевы сети (v, w) с общим геодезическим полем v_i и чебышевским вектором $a_i=\partial_i a$ единичной сферы пространства E_3 определяют линейчатые поверхности, являясь для них сферическими отображениями асимптотических.

Эти линейчатые поверхности имеют одинаковые гауссовые кривизны, параллельные прямолинейные образующие и получаются друг от друга распределением прямолинейных образующих $\varphi=\text{const}$ (Д. Ф. Егоров, 1970).

Если g_{is} и $\overset{*}{g}_{is}$ первые тензоры двух из этих линейчатых поверхностях, то

$$\overset{*}{g}_{is}-g_{is}=4e^{a}\varphi_i\varphi_s F(\varphi)\,[F(\varphi)\,e^{-a}+2\operatorname{ctg}\omega].$$

В работе рассматривается множество кодацциевых сетей с общим геодезическим семейством и общим чебышевским вектором на единичной сфере пространства E_3. Каждая такая сеть определяет линейчатую поверхность, что приводит к преобразованию линейчатых поверхностей с сохранением гауссовой кривизны. Это преобразование является частным случаем преобразования поверхности путем распределения линий, изученного Д. Ф. Егоровым [2].

Пусть на единичной сфере дано геодезическое поле v_i. Рассмотрим все полугеодезические кодацциевые сети сферы с общим геодезическим полем v_i и одинаковыми чебышевскими векторами $a_i=\partial_i a$. Как известно [1, § 30] признак существования полугеодезической сети с данным геодезическим полем v_i и чебышевским вектором $a_i=\partial_i a$ имеет вид

$$e^a v_i=(\operatorname{grad}\varphi)=\partial_i\varphi. \tag{1}$$

Кроме того, при выполнении [1, § 30, (1)] следует, что существует бесконечное число сетей с общим геодезическим полем v_i и одинаковыми чебышевскими векторами $a_i=\partial_i a$.

Пусть сеть (v, w) на сфере является кодацциевой. Если ω — сетевой угол сети (v, w), то согласно [1; § 21, § 23] имеем

$$a_i w^i \sin\omega=r=t_i v^i=\omega_i v^i, \tag{2}$$

где r — чебышевская кривизна линии (v), а t_i — трансверсальный вектор поля w_i. Вектор w_i можно разложить по ортогональным векторам v_i и $\widetilde{v}_i$

$$w_i=v_i\cos\omega+\widetilde{v}_i\sin\omega. \tag{3}$$

В силу (2) и (3) находим уравнение для сетевого угла

$$\frac{\omega_i v^i}{\sin^2\omega}=a_i v^i\operatorname{ctg}\omega+a_i\widetilde{v}^i,$$

которое можно записать следующим образом: $(\operatorname{ctg}\omega)_i v^i = -a_i v^i \operatorname{ctg}\omega - a_i \widetilde{v}^i$. Умножая обе части этого равенства на e^a, находим

$$[(e^a \operatorname{ctg}\omega)_i - (\widetilde{e^a})_i]\, v^i = 0, \tag{4}$$

где $(\widetilde{e^a})_i = \gamma_i^k (e^a)_k$, γ_i^k — аффинор метрического тензора единичной сферы.

Пусть (v, p) другая кодацциева сеть с чебышевским вектором $a_i = \partial_i a$ и сетевым углом θ. Можно записать аналогично как (4)

$$[(e^a \operatorname{ctg}\theta)_i - (\widetilde{e^a})_i]\, v^i = 0. \tag{5}$$

Из (1), (4) и (5) имеем

$$e^a(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}\omega) = F(\varphi). \tag{6}$$

Этим доказана

Лемма. *Множество всех полугеодезических кодацциевых сетей с общим геодезическим полем v_i и одинаковыми чебышевскими векторами $a_i = \partial_i a$ на единичной сфере определяется с точностью до одной произвольной функцией $F(\varphi)$, где $e^a v_i = \partial_i \varphi$.*

Пусть S и S^* — линейчатые поверхности, для которых сети (v, w) и (v, p) являются сферическими отображениями асимптотических. Если b_{ij} и b^*_{ij} обозначают вторые тензоры поверхностей S и S^*, то как известно

$$b_{ij} = 2\,\frac{v_{(i} w_{j)}}{\sin\omega}\, e^{2a}, \quad b^*_{ij} = 2\,\frac{v_{(i} p_{j)}}{\sin\theta}. \tag{7}$$

Подставляя b_{ij} и b^*_{ij} из (6) в формулы $\overline{r}_i = -b_{is}\gamma^{sk}\overline{n}_k$, $\overline{r}^*_i = -b^*_{is}\gamma^{sk}\overline{n}_k$, где $\overline{r}$ и $\overline{r}^*$ являются радиусвекторами поверхностей S и S^*, а $\overline{n}$ — нормальный вектор поверхностей, находим

$$\begin{aligned} \overline{r}_i &= -2(\varphi_i \widetilde{\varphi}^k \operatorname{ctg}\omega - \varphi_i \widetilde{\varphi}_s \gamma^{sk})\, \overline{n}_k, \\ \overline{r}^*_i &= -2(\varphi_i \widetilde{\varphi}^k \operatorname{ctg}\theta - \varphi_i \widetilde{\varphi}_s \gamma^{sk})\, \overline{n}_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует

$$\overline{r}^* - \overline{r} = -2\int F(\varphi)\widetilde{v}^k \overline{n}_k \varphi_i\, dk^i = \overline{R}(\varphi). \tag{9}$$

Согласно (9) и в силу [2] вытекает, что поверхность S^* получается путем распределения геодезических $\varphi = \text{const}$ поверхности S [2]. Так как $a_i = -1/4\, \partial_i \ln K$, то гауссовые кривизны поверхностей S и S^* равны. Из (9) следует, что прямолинейные образующие поверхностей S и S^* параллельные.

Этим доказана

Теорема. *Линейчатые поверхности, сферическое отображение сетей асимптотических которых являются полугеодезическими кодацциевыми сетями с одинаковыми чебышевскими векторами и общим геодезическим полем, получаются друг из друга распределением прямолинейных образующих, имеют одинаковые гауссовые кривизны и параллельные образующие.*

В силу (8) для метрических тензоров поверхностей S и S^* находим $g_{is} = 4e^{2a}\varphi\ \varphi_s(\mathrm{ctg}^2\,\omega+1), g^*_{is} = 4e^{2a}\,\varphi_i\varphi_s(\mathrm{ctg}^2\,\theta+1)$, откуда согласно (4) получаем $g^*_{is} - g_{is} = 4e^a\,\varphi_i\,\omega_s\,F(\varphi)\,[F(\varphi)\,e^{-a}+2\,\mathrm{ctg}\,\omega]$, где ω является сетевым углом асимптотической сети поверхностей S.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Москва, 1963.
2. Д. Ф. Егоров. Работы по дифференциальной геометрии. Москва, 1970.

Пловдивский университет
4000 Пловдив

Поступила 17. 9. 1973