Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КРИВОЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТОМ ИЗ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ ЧЕРЕЗ ОДНУ ИЗ НИХ

БИСТРА Б. ЦАРЕВА

Построен канонический репер кривой в трехмерном пространстве $A_2(g)$ с абсолютом из двух действительных точек и действительной прямой через одну из них. Вводится специальное семейство реперов $A_1A_2A_3A_4$, где вершины A_3, A_4 совпадают с абсолютными точками, а абсолютная прямая g определяется точками A_2, A_4. Точка A_1 описывает кривую C, а точка A_2 лежит на абсолютной прямой, соединяющей неподвижную точку A_3 с точкой пересечения касательной к кривой C с абсолютной плоскостью. Получены основные формулы дифференциальной геометрии кривых в $A_2(g)$. Найдено условие равнинности кривой C.

Аналогичные вопросы в пространствах с другими абсолютами рассматривали Г. Станилов (1967), А. Борисов (1970).

Пусть абсолютные точки рассматриваемого пространства $A_2(g)$ являются вершинами A_3 и A_4, а абсолютная прямая g, проходящая через A_4, является координатным ребром A_2A_4 проективной координатной системы. Тогда для инфинитезимальных преобразований вершин репера имеем

$$dA_i=\omega_i^jA_j \quad i, j=1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

где

$$\omega_2^1=\omega_2^3=\omega_3^1=\omega_3^2=\omega_3^4=\omega_4^1=\omega_4^2=\omega_4^3=0. \tag{2}$$

Внешнее дифференцирование равенств (1), учитывая (2), приводит к следующим уравнениям структуры пространства

$$\begin{gathered}D\omega_1^1=0, \quad D\omega_2^2=0, \quad D\omega_3^3=0, \quad D\omega_4^4=0,\\ D\omega_1^2=[\omega_1^1-\omega_2^2, \omega_1^2] \quad D\omega_1^3=[\omega_1^1-\omega_3^3, \omega_1^3],\\ D\omega_1^4=[\omega_1^1-\omega_4^4, \omega_1^4]-[\omega_2^4, \omega_1^2],\\ D\omega_2^4=[\omega_2^2-\omega_4^4, \omega_2^4].\end{gathered} \tag{3}$$

Пусть вершина A_1 описывает кривую

$$C: A_1=A_1(t). \tag{4}$$

Стационарная подгруппа точки A_1 определяется вполне интегрируемой системой

$$\omega_1^2=\omega_1^3=\omega_1^4=0. \tag{5}$$

Это означает, что когда точка A_1 описывает C, формы ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4 являются линейными дифференциальными формами только параметра t, кото-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 106—111

рый назовем главным параметром. Формы ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4 называем главными дифференциальными формами первого порядка. Оказывается, что $\delta\omega_1^2=(\pi_1^1-\pi_2^2)\omega_1^2$, $\delta\omega_1^3=(\pi_1^1-\pi_3^3)\omega_1^3$, $\delta\omega_1^4=(\pi_1^1-\pi_4^4)\omega_1^4+\pi_2^4(\omega_2^4-\omega_1^2)$, т. е. ω_1^2 и ω_1^3 являются относительными инвариантнымн формами.

Так как базис главных форм первого порядка состоит из независимой формы dt, то между ними существуют два линейных соотношения. Пусть ω_1^4 является базисной формой. Когда $\omega_1^2=0$

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^3A_3+\omega_1^4A_4, \tag{6}$$

откуда следует, что касательная к кривой $A_1=A_1(t)$ в каждой ее точке пересекает неподвижную прямую A_3A_4. Следовательно, кривая C плоская и ее плоскость проходит через прямую A_3A_4. Действительно, пусть $A_1(t)$ и $A_1(t+h)$, $h\neq 0$ две близкие точки на C, для которой выполнено (6). Для соприкасающейся плоскости кривой C в точке A_1 имеем $\xi_{A_1}=(A_1, dA_1, d^2A_1)=(A_1A_3A_4)$. После развития $A_1(t+h)$ в ряд Тейлора получаем $A_2(t+h)=a_1A_1+a_3A_3+a_4A_4$, где $a_i=a_i(\omega_k^j, d\omega_k^j, h)$. Легко увидеть, что определитель $(A_1dA_1d^2A_1A_1(t+h))=0$. т. е. $A_1(t+h)$ лежит в соприкасающейся плоскости ξ_{A_1}, откуда следует, что кривая C плоская и её плоскость содержит точки A_3 и A_4. Итак, относительная инвариантная форма $\omega_1^2=0$ определяет класс плоских кривых, плоскости которых образуют пучок с осью, совпадающей с неподвижной прямой A_3A_4. Мы назовем этот класс плоских кривых K_{34}. Когда ω_1^2 является базисной формой, аналогично получаем, что $\omega_1^3=0$ определяет класс плоских кривых, плоскости которых образуют пучок с осью, совпадающей с абсолютной прямой A_2A_4. Назовем этот класс классом плоских кривых K_{24}.

Пусть в дальнейшем ω_1^2 будет базисной линейной дифференциальной формой. Таким образом, мы не будем рассматривать плоских кривых класса K_{34}. Между тремя главными дифференциальными формами ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4 существуют два линейных соотношения: $\omega_1^3=a\omega_1^2$, $\omega_1^4=b\omega_1^2$. Внешним дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} &da+a(\omega_3^3-\omega_2^2)-a^*\omega_1^2,\\ &db+b(\omega_4^4-\omega_2^2)+\omega_2^4=b^*\omega_1^2. \end{aligned} \tag{7}$$

При вариации только по вторичным параметрам имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\delta a+a(\pi_3^3-\pi_2^2)=0,\\ &\delta b+b(\pi_4^4-\pi_2^2)+\pi_2^4=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Равенства (8) дают закон изменения коэффициентов a и b под действием изменения вторичных параметров, т. е. параметров группы (5). Мы выберем $a=1$ или $\omega_1^3\neq 0$ $(a\neq 0)$, и, следовательно, не будем рассматривать кривых, принадлежащих классу K_{24}. Геометрически выбор $a=1$ означает: касательная прямая к кривой (4) в точке A_1 пересекает абсолютную плоскость $\varepsilon=(g, A_3)$ в точке прямой (A_4, A_2+A_3). Верно и обратное: если касательная к кривой C в точке A_1 и абсолютная плоскость ε пересекаются в точке прямой (A_4, A_2+A_3), то $a=1$. Этим доказана

Теорема 1. *Касательная к кривой C в точке A_1 и абсолютная плоскость ε пересекаются в точке прямой (A_4, A_2+A_3) тогда и только тогда, когда $a=1$.*

Мы выберем $b=0$. Из геометрической интерпретации этого выбора следует

Теорема 2. *Касательная к кривой C в точке A_1 пересекает прямую A_2A_3 тогда и только тогда, когда $b=0$.*

Из теорем 1 и 2 следует:

Теорема 3. *Для того, чтобы единичная точка A_2+A_3 проективной координатной системы координатного ребра A_2A_3 лежала на касательной к кривой C в точке A_1, необходимо и достаточно $a=1$, $b=0$.*

Из (8) при $a=1$ и $b=0$ следует

$$\pi_2^2=\pi_3^3, \quad \pi_2^4=0. \tag{10}$$

Сделанной таким образом нормировкой вершина A_2 определяется полностью. Она лежит на абсолютной прямой g и на прямой, соединяющей неподвижную точку A_3 с точкой пересечения касательной к кривой C с абсолютной плоскостью ε.

В силу (7) при $a=1$, $b=0$ получаем $\omega_3^3-\omega_2^2=a^*\omega_1^2$, $\omega_2^4=b^*\omega_1^2$. Тогда формы $\omega_3^3-\omega_2^2$, ω_2^4 уже главные. Из $\delta(\omega_3^3-\omega_2^2)=0$ и $\delta\omega_2^4=(\pi_2^2-\pi_4^4)\omega_2^4$ следует, что $\omega_3^2-\omega_2^2$ и ω_2^4 соответственно абсолютная и относительная инвариантные формы. Если $\omega_2^4=0$, т. е. $b^*=0$, $a^*\neq 0$, то $dA_2=\omega_2^2A_2$ или A_2 — неподвижная точка. Тогда и прямая A_2A_3 неподвижная. Следовательно, $\omega_2^4=0$ определяет класс кривых, касательные к которым пересекают неподвижную прямую A_2A_3. Уже известно, что этот класс плоских кривых и их плоскости принадлежат пучку с осью, совпадающей с прямой A_2A_3. Обозначим этот класс плоских кривых K_{23}. Верно и обратное утверждение: если C плоская кривая и прямая A_2A_3 лежит в её плоскости, то $b^*=0$, $a^*\neq 0$. Действительно, это легко видно, учитывая, что

$$\Delta=(A_1dA_1d^2A_1A_1(t+h))$$

$$=f(\omega_i^j)(A_1,\ A_2+A_3,\ b^*A_4+a^*A_3,\ (db^*+b^*\omega_4^4)A_4+(da^*+a^*\omega_3^3)A_3)=0,$$

и что плоскость кривой совпадает с $\xi_{A_1}=(A_1, A_2+A_3, b^*A_4+a^*A_3)$. Этим доказана

Теорема 4. *Для того, чтобы кривая с уравнением (4) принадлежала классу K_{23}, необходимо и достаточно $\omega_2^4=0$, $\omega_3^3-\omega_2^2\neq 0$, т. е. $b^*=0$, $a^*\neq 0$.*

Равенство $\omega_3^3-\omega_2^2=0$, т. е. $a^*=0$, $b^*\neq 0$ характеризует кривые, соприкасающиеся плоскости которых проходят через абсолютную точку A_4. Действительно, при $a^*=0$ и $b^*\neq 0$ получаем

$$d^2A_1=[d\omega_1^1+(\omega_1^1)^2]A_1+(d\omega_1^1+\omega_1^1\omega_1^2+\omega_1^2\omega_2^2)(A_2+A_3)+\omega_1^2\omega_2^4A_4.$$

Тогда соприкасающейся плоскостью в точке A_1 является $\xi_{A_1}=(A_1, A_2+A_3, A_4)$. Верно и обратное: если соприкасающаяся плоскость в любой точке рассматриваемой кривой проходит через абсолютную точку A_4, то $a^*=0$, $b^*\neq 0$.

Полученные таким образом кривые являются плоскими и их плоскости образуют связку с центром A_4, так как при $\omega_3^3=\omega_2^2$ и $\omega_2^4\neq 0$ имеем

$A_1(t+h)=\beta_1 A_1+\beta_2(A_2+A_3)+\beta_3 A_4$, $\beta_i=\beta_i(\omega_k^j, d\omega_k^j, h)$ и определитель $(A_1 dA_1 d^2A_1 A_1(t+h))=0$. Обозначим этот класс кривых через K_4. Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. *Для того, чтобы кривая с уравнением* (4) *принадлежала классу* K_4, *необходимо и достаточно* $\omega_3^3-\omega_2^2=0$, $\omega_2^4\neq 0$ или $a^*=0$, $b^*\neq 0$.

Случай $a^*=0$, $b^*=0$ мы исключили из-за компланарности точек A_1, A_2, A_3, A_4.

Дифференцируя внешним образом и применяя лемму Картана, имеем

$$da^*+a^*(\omega_1^1-\omega_2^2)=\varkappa_1\omega_1^2,$$
$$\tag{10} db^*+b^*(\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4)=\varkappa_2\omega_1^2.$$

Варьируя (10) по вторичным параметрам, получаем

$$\delta a^*+a^*(\pi_1^1-\pi_2^2)=0,$$
$$\tag{11} \delta b^*+b^*(\pi_1^1-2\pi_2^2+\pi_4^4)=0.$$

Равенства (11) определяют изменение коэффициентов a^* и b^* и показывают, что можно выбрать $a^*=b^*=\sigma\neq 0$, исключая из рассмотрения кривые, пррнадлежащие классам K_{23} и K_4. Геометрически выбор $a^*=b^*\neq 0$ означает, что точка пересечения абсолютной прямой A_3A_4 и соприкасающейся плоскости кривой C в точке A_1 является единичной точкой проективной координатной системы координатного ребра A_3A_4. Легко доказывается и обратное, рассматривая выражения dA_1 и $d^2A_1=[d\omega_1^1+(\omega_1^1)^2]A_1+(\omega_1^1\omega_1^2+d\omega_1^2+\omega_1^2\omega_2^2)(A_2+A_3)+(a^*A_3+b^*A_4)\omega_1^2$. Полученные результаты можно сформулировать в следующую теорему:

Теорема 6. *Для того, чтобы единичная точка* A_3+A_4 *проективной координатной системы прямой* A_3A_4 *лежала на соприкасающейся плоскости* C *в точке* A_1, *необходимо и достаточно* $a^*=b^*\neq 0$.

Из этой теоремы получаем:

Следствие 1. *Касательная прямая к плоской кривой, описываемой единичной точкой* A_2+A_3, *является общей прямой абсолютной плоскости* ε *и соприкасающейся плоскости к кривой* C;

Следствие 2. *Единичная точка* A_2+A_4 *проективной координатной системы абсолютной прямой* g *определяется из ангармонического отношения* $(A_2A_4A_2-A_4A_2A_4)$, *где* A_2-A_4 является точкой пересечения прямой g и соприкасающейся плоскости кривой C.

Специализируя еще репер, выберем $\sigma=1$. Геометрическая интерпретация этой нормировки приводит нас к следующему утверждению:

Теорема 7. *Для того, чтобы касательная к кривой, описываемой единичной точкой* A_1+A_2 *проективной координатной системы прямой* A_1A_2 *пересекала прямую* $(A_1, A_2+A_3+A_4)$, *необходимо и достаточно* $\sigma=1$.

Из (13) при $\sigma=1$ получаем

$$\tag{14} \pi_1^1=\pi_2^2=\pi_4^4,$$

а из (10) при $\sigma=1$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\varkappa_1\omega_1^2,$$

$$\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4=\varkappa_2\omega_1^2.$$

Теперь формы $\omega_1^1-\omega_2^2$ и $\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_2^2$ главные. Из $\delta(\omega_1^1-\omega_2^2)=0$ и $\delta(\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4)=0$ следует, что они являются абсолютными инвариантными формами кривой C. После нормирования $(A_1A_2A_3A_4)=1$ дифференцированием получаем

(13) $$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0.$$

При вариации по вторичным параметрам (13) принимает вид

(14) $$\pi_1^1-\pi_2^2-\pi_3^3+\pi_0^4=0.$$

Из (9), (12), (14) получаем $\pi_1^1=\pi_2^2=\pi_2^3=\pi_4^4=0$.

Все вторичные параметры уже фиксированы и репер кривой C определен однозначно в любой точке кривой C. Все формы ω_i^j выражаются через базисную ω_1^2, а также и коэффициенты $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, которые имеют инвариантный характер.

(15) $$\omega_1^1=-\frac{1}{4}(1-4\varkappa_1+\varkappa_2)\omega_1^2,\quad \omega_2^2=-\frac{1}{4}(1+\varkappa_2)\omega_1^2,$$
$$\omega_3^3=\frac{1}{4}(3-\varkappa_2)\omega_1^2,\quad \omega_4^4=-\frac{1}{4}(1+4\varkappa_1+3\varkappa_2)\omega_1^2,$$
$$\omega_2^4=\omega_1^3=\omega_1^2.$$

В рассматриваемой геометрии инварианты $\varkappa_1$ $\varkappa_2$ называем кривизнами кривой.

Теорема 8. *Для того, чтобы точка пересечения касательной к кривой, описываемой точкой A_1+A_2 и прямой $(A_1, A_2+A_3+A_4)$ была единичной точкой $A_1+A_2+A_4+A_4$, необходимо и достаточно $\varkappa_1=1$.*

Из нормировки $\sigma=1$ следует $D\omega_1^2=0$ и можно записать $\omega_1^2=ds$. Вводим об значение $A_i'=dA_i/ds$. Тогда из (1) и (15) получаем следующую систему дифференциальных уравнений кривой:

$$A_1'=-\frac{1}{4}(1-4\varkappa_1+\varkappa_2)A_1+A_2+A_3,$$
$$A_2'=-\frac{1}{4}(1+\varkappa_2)A_2+A_4,$$
$$A_3'=\frac{1}{4}(3-\varkappa_2)A_3,$$
$$A_3'=-\frac{1}{4}(1-4\varkappa_1+3\varkappa_2)A_4,$$

которую назовем системой Френе для этой кривой.

Рассмотрим теперь плоские кривые. Пусть $A_1(t)$ и $A_1(t+h)$, $h\neq 0$ две близкие точки кривой C: $A_1=A_1(t)$. Линия C будет плоской, если точка $A_1(t+h)$ лежит в соприкасающейся плоскости точки $A_1(t)$, т. е.

(16) $$(A_1\ \ A_2+A_3\ \ A_3+A_4\ \ A_1(t+h))=0,$$

где $A_1(t+h)$ вычислено по формуле Тейлора

$$A_1(t+h)=\cdots+\frac{h^3}{24}[(3-\varkappa_2)A_3=(1+4\varkappa_1+3\varkappa_2)A_4]. \tag{17}$$

Слагаемые, обозначенные точками в (17), выражаются через A_1, A_2+A_3, A_3+A_4. Из (16), учитывая (17), получаем

$$2\varkappa_1+\varkappa_2+2=0. \tag{18}$$

По обратному пути сразу видно, что если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ удовлетворяют (18), то кривая C плоская. Этим доказана

Теорема 9. Для того, чтобы кривая C была плоской, необходимо и достаточно $2\varkappa_1+\varkappa_2+2=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. Москва, 1948.
2. Г. Станилов. Геометрия одного пространства с фундаментальной семипараметрической группой. *Доклады БАН*, **20**, 1967, 261—264.
3. А. Борисов. Криви линии и повърхнини в тримерно проективно пространство с абсолют две реални равнини и две реални точки върху тяхната пресечница. *Известия Мат. инст. БАН*, **11**, 1970, 5—15.

Пловдивский университет
4000 Пловдив

Поступила 17. 9. 1973