Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

КОГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ $\pi^{n,n-1}$ ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ

ТОМА В. ТОНЕВ

В работе характеризируются некоторые гомотопические инварианты пространства максимальных идеалов M полупростой коммутативной банаховой алгебры A над $\mathbb{C}$ с единицей. Группа $\langle A(M, SL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$ связных компонент множества $n\times n$ матриц над A с единичным определителем отождествляется с множеством $\pi^{n,n-1}(M)$ классов гомотопных отображений M в пространстве Штифеля $V_{n,n-1}$. Если в алгебре A разрешимо уравнение $g^n=f$ для каждого $f\in A$, группа $\langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$ оказывается изоморфной декартову произведению $H^1(M, Z)\times\pi^{n,n-1}(M)$.

1. Известны сколь интересные, а иногда даже и неожиданные связи, существующие между алгебраической структурой коммутативной банаховой алгебры A и топологическими свойствами ее спектра, т. е. пространства ее максимальных идеалов. Может быть одной из самых характерных среди них является утверждение теоремы Аренса-Ройдена [14], устанавливающей изоморфность группы связных компонент множества обратимых элементов A одномерной когомологической группе Чеха ее спектра $H^1(M, Z)$. Вместе с теоремой Шилова об идемпотентах [1], устанавливающей биекции между множествами образующих группы $H^0(M, Z)$ и кольца идемпотентов A, она положила начало последовательного изучения гомотопических инвариантов спектра алгебры. В 1965 году Аренс [15] нашел новый гомотопический инвариант спектра — группу связных компонент обратимых $n\times n$ матриц с элементами из A, т. е. множество тех n^2-векторов A, совместный спектр которых лежит в группе $GL(n, \mathbb{C}^1)$. С точностью до кручения эта группа оказалась изоморфной прямой сумме когомологий $\Sigma_{i=1}^{n} H^{2i-1}(M, \mathbb{C})$ [2], [3]. В терминах алгебры разными авторами изучались и другие топологические свойства спектра, как полная несвязность, метризуемость, наследственная паракомпактность и пр.

В настоящей работе предлагается топологико-алгебраическое описание некоторых групп, связанных с топологической структурой спектра M полупростой коммутативной банаховой алгебры A над $\mathbb{C}$ с единицей. Так например, когомотопическое множество $\pi^{n,n-1}(M)$ отождествляются либо с множеством $\langle V_{n,n-1}(A)\rangle$ (теорема 1), либо с группой $\langle A(M, SL(n,\mathbb{C}^1))\rangle$ связных компонент множества $n\times n$ матриц над A с единичным определителем (следствие 1). Когда в алгебре разрешимо каждое уравнение вида $g^n=f$ для некоторого $n>1$, то группа $\langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$ оказывается изоморфной декартовому произведению $H^1(M, Z)\times\pi^{n,n-1}(M)$. При некоторых дополнительных ограничениях на A получается и описание группы $H^{2n-1}(M, Z)$ (теорема 2). Группа $\pi^3(M)$, как и у Эйдлина, [3] совпадае с множеством связных компонент пар не аннулирующихся одновременно на M функций из A. Например, если A есть алгебра функций, определенных

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 143—148.

на S^1, S^2 или на каком-нибудь симплексе, то множество таких пар линейно связно. Для алгебр на S^n, $n>2$ это уже не имеет места: если $n=4$, компоненты связности рассматриваемого множества ровно две, если $n=3$, их счетное множество.

2. Группы $\pi^{n,n-1}(M)$. Пусть A — полупростая коммутативная банахова алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей, и пусть M — ее спектр, т. е. пространство ее максимальных идеалов, так что A можно рассматривать как алгебру функций на M. Через $\mathcal{E}_n(A)$ будем обозначать множество всех несингулярных n-наборов из элементов A, т. е. множество тех n-векторов над A, совместный спектр которых не содержит нулевого вектора. Множество $\mathbb{C}^n\setminus\{0, 0, \ldots, 0\}$ будем обозначать через $\mathbb{C}^n_*$, а множество элементов A^n, совместный спектр которых содержится в $Y\subset\mathbb{C}A^n$, — через $A(M, Y)$. Так в случае алгебры всех непрерывных на M функций $C=C(M)$ получим обычное обозначение $C(M, Y)$. Мы будем употреблять и такие стандартные обозначения как $GL(n, \mathbb{C}^1)$ — для полной линейной группы, $SL(n, \mathbb{C}^1)$ — для специальной линейной группы (т. е. для группы комплексных матриц с единичным определителем), $V_{n,k}$ — для пространства Штифеля, состоящем из k-реперов $\mathbb{C}^n$. Множество компонент линейной связности топологического пространства X будем обозначать через $\langle X\rangle$. Заметим, что так как $\mathcal{E}_n(A)=A(M, \mathbb{C}^n_*)$, где $\mathbb{C}^n_*$ — открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, то компоненты связности множества $\mathcal{E}_n(A)$ совпадают с его линейно связными компонентами [2].

Напомним, что совместным спектром $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ n-набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i\in A$ называется компактное подмножество $\mathbb{C}^n$, состоящее из всех точек вида $(a_1(m), a_2(m), \ldots, a_n(m))$, где m — произвольный линейный мультипликативный функционал из M. Точки спектра $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — это те векторы $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\in\mathbb{C}^n$, для которых идеал, порожденный элементами $a_1-\lambda_1 e$, $a_2-\lambda_2 e, \ldots, a_n-\lambda_n e$, не совпадает с A, т. е. для которых не существуют такие элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ из A, что $\Sigma b_i(a_i-\lambda_i e)=e$ (см. напр. [8]). Отсюда видно, что точки $\mathcal{E}_n(A)$ — это те n-векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ над A, для которых существуют такие элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в A, что $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=e$. Иными словами, $\mathcal{E}_n(A)$ — это множество тех n-векторов над A, элементы которых не принадлежат одновременно никакому максимальному идеалу A. Так например $\mathcal{E}_1(A)$ совпадает с множеством всех обратимых элементов A. Мы будем рассматривать еще и множества $V_{n,k}(A)$, состоящие из тех $n\times k$ матриц с элементами из A, которые дополняются тоже в A до квадратных $n\times n$ матриц с единичным определителем. Множество $\langle V_{n,k}(C)\rangle$, на самом деле совпадающее с множеством $[X, V_{n,k}]$ гомотопических классов отображений X в $V_{n,k}$ для краткости будем обозначать через $\pi^{n,k}(X)$. Так например, $\pi^{n,n}(X)$ — это множество $[X, SL(n, \mathbb{C}^1)]$. $V_{2,1}(A)=\mathcal{E}_2(A)$, а $\pi^{2,1}(X)=\pi^3(X)$. Заметим, что как показал Лин [9], матрица из элементов A принадлежит множеству $V_{n,k}(A)$ тогда и только тогда, когда она дополняется до обратимой $n\times n$ матрицы в $C(X)$.

В силу условия полупростоты, алгебра A содержится в $C(M)$, так что $\mathcal{E}_n(A)\subset\mathcal{E}_n(C)$, $V_{n,k}(A)\subset V_{n,k}(C)$, и естественно возникают соответствия $\varphi_n:\langle\mathcal{E}_n(A)\rangle\to\langle\mathcal{E}_n(C)\rangle$ и $\psi_{n,k}:\langle V_{n,k}(A)\rangle\to\langle V_{n,k}(C)\rangle$ между соответствующими связными компонентами. Следующее предложение уточняет теорему Аренса [15].

Предложение 1. *$\psi_{n,n}$ отображает биективно множество $\langle V_{n,n}(A)\rangle$ на $\langle V_{n,n}(C)\rangle$.*

Доказательство. Пусть матрица N_0 принадлежит множеству $V_{n,n}(C)=C(M, SL(n, \mathbb{C}^1))\subset C(M, GL(n, \mathbb{C}^1))$. Согласно теореме Аренса N_0 связывается непрерывным путем $t\to N_t$ в $C(M, GL(n, \mathbb{C}^1))$ с некоторой матрицей N_1 из $A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))$. Рассмотрим отображение $\delta: I(=[0, 1])\to \mathcal{E}_1(C)$, заданным как $\delta(t)=\det N_t$. Тогда путь $t\to\delta(t)*N_t$, полученный из $t\to N_t$ умножением последней строки матриц N_t на $\delta^{-1}(t)$, уже в $C(M, SL(n, \mathbb{C}^1))$ свяжет N_0 с $\delta^{-1}(1)*N_1\in A(M, SL(n, \mathbb{C}^1))$. Если U_0 и $U_1\in A(M, SL(n, \mathbb{C}^1))\subset A(M, GL(n,\mathbb{C}^1))$ связываются в $C(M, SL(n,\mathbb{C}^1))\subset C(M, GL(n, \mathbb{C}^1))$ непрерывным путем $t\to U_t$, они оказываются связанными и в $A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))$ путем Аренса $t\to U'_t$. Тогда путь $t\to\delta^{-1}(t)t)\ U'_t$, где как и выше $\delta(t)=\det U'_t\in\mathcal{E}_1(A)$, свяжет U_0 с U_1 в $V_{n,n}(A)$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Множества* $\langle V_{n,n-1}(A)\rangle$ *и* $\langle V_{n,n}(A)\rangle$ *биективны для любого* n.

Доказательство. Покажем, что требуемая биекция индуцируется проекцией p_{n-1} на первых $n-1$ строк матриц-представителей элементов второго множества. Пусть $\|a_{ij}\|\in V_{n,n-1}(A)$ двумя способами дополняется до матриц из $V_{n,n}(A)$ с помощью элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда путь, который всех a_{ij} оставляет на месте, а b_i связывает афинно с c_i, свяжет обе дополненные матрицы в $V_{n,n}(A)$. Пусть сейчас $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ — два элемента $V_{n,n-1}(A)$, связанные в нем непрерывным путем $\|F_{ij}(t)\|$, $t\in I$, причем $F_{ij}(0)=a_{ij}$, $F_{ij}(1)=b_{ij}$. Мы покажем, что $\|F_{ij}(t)\|$, будучи элементом пространства $C(I, V_{n,n-1}(A))$, принадлежит $V_{n,n-1}(C(I, A))$. Действительно, если $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — определители матриц $(n-1)$-ого порядка, полученные вычеркиванием i-того столбца в матрице

$$\begin{pmatrix} F_{11}(t), \ldots F_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_{n-11}(t), \ldots F_{n-1n}(t) \end{pmatrix}$$

и снабженные подходящими знаками, так чтобы для каждого t имелись такие $w^t_i\in A$, $i=1, \ldots, n$, что $\Sigma^n_{i=1} D_i(t)w^t_i\equiv 1$, то $D_i\in C(I, A)$, а $(D_1, D_2, \ldots, D_n)\in\mathcal{E}_n(C(I, A))$. Из последнего соотношения заключаем, что существуют такие $E_1, E_2, \ldots, E_n\in C(I, A)$, для которых $\Sigma D_iE_i=1$. Итак, с помощью элементов $E_1(0), \ldots, E_n(0)$ и $E_1(1), \ldots, E_n(1)$ мы дополнили матрицы $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ до квадратных $n\times n$ матриц, связанных непрерывным путем в $V_{n,n}(A)$ (именно набором функций $\{F_{ij}\}_{i,j}$ и $\{E_i\}_i$). Следовательно, отображение, индуцированное проекцией p_{n-1} — обратимо, чем и заканчивается доказательство.

Непосредственным следствием этих предложений является биективность множеств $\langle V_{n,n-1}(A)\rangle$ и $\langle V_{n,n-1}(C)\rangle$. Но так как $\langle V_{n,n-1}(C)\rangle=[M, V_{n,n-1}]=\pi^{n,n-1}(M)$ для $n>1$, получаем:

Теорема 1. *Множества* $\pi^{n,n-1}(M)$ и $\langle V_{n,n-1}(A)\rangle$ *биективны.*

Отсюда и из предложения 2 имеем

Следствие 1. *Когомотопическое множество* $\pi^{n,n-1}(M)$, $n>1$ *биективно группе* $\langle A(M, SL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$ *связных компонент квадратных* $n\times n$ *матриц над* A *с единичным определителем.*

Группа $\langle A(M, SL'(n, \mathbb{C}^1))\rangle$, состоящая из матриц с определителями из $\mathcal{E}'_1(A)$, является ядром гомоморфизма $\det: \langle A(M, GL(n, \mathbb{C}_1))\rangle\to\mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A)$, индуцированный определителем. Следовательно

$$\mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A)\simeq\langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle/\langle A(M, SL'(n, \mathbb{C}^1))\rangle.$$

Покажем, что эпиморфизм det можно расщепить, если в алгебре для каждого $f \in A$ разрешимо уравнение $g^n = f$. Действительно, пусть

$$f \in \varphi \in \mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A) \text{ и } g^n = f.$$

Тогда для гомоморфизма $\eta : \mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A) \to \langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$, определенного как

$$\eta(\varphi) = \begin{pmatrix} f & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & f & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & f \end{pmatrix},$$

будем иметь, что $\det \eta(\varphi) = \varphi$. Рассмотрим отображение ξ:

$$\langle A(M, SL'(n, \mathbb{C}^1))\rangle \times \mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A) \to \langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle,$$

определенное как $\xi(s, h) = s \, . \, \eta(h)$. Заметим, что η отображает $\mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A)$ в центр группы $\langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$. На самом деле, если $h = g \, . \, E \in \eta(\varphi)$, то для каждого $m \in M$ $h(m)$ будет гомотетией, т. е. будет принадлежать центру группы $GL(n, \mathbb{C}^1)$ (см. напр. [12]), так что из $b(m) \, . \, h(m) = h(m) \, . \, b(m)$ для каждого $b \in \beta \in \langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$ получим, что $bh = hb$, откуда $\beta \, . \, \eta(\varphi) = \eta(\varphi) \, . \, \beta$. Сейчас нетрудно увидеть, что отображение ξ, гомоморфность которого мы показали в ходе рассуждений, на самом деле является изоморфизмом.

Теорема 2. *Пусть в группе $H^1(M, Z)$ возможно деление на $n > 1$. Тогда группа $\langle A(M, GL(n, \mathbb{C}^1))\rangle$ изоморфна группе $H^1(M, Z) \times \pi^{n, n-1}(M)$.*

Доказательство. Условие теоремы гарантирует нам разрешимость уравнений $g^n = f$ для каждого f из A (см. напр. [6]), и утверждение теоремы следует из сказанного выше, имея ввиду, что если $n > 1$

$$\langle A(M, SL'(n, \mathbb{C}^1))\rangle \cong \langle A(M, SL(n, \mathbb{C}^1))\rangle = \pi^{n, n-1}(M),$$

и что $\mathcal{E}_1(A)/\mathcal{E}'_1(A) \cong H^1(M, Z)$ в силу теоремы Аренса-Ройдена.

Этот результат уточняет теорему Новодворского-Эйдлина [2], [3], не игнорируя в рассматриваемом случае кручения групп.

3. Группа $H^{2n-1}(M, Z)$. В [3] Эйдлин показал, что $\langle \mathcal{E}_n(A)\rangle = \pi^{2n-1}(M)$.

Предложение 3. *Пусть* $\dim M \leq 2n-1$, *либо* $H^k(M, Z) = 0$ *для* $k \geq 2n$. *Тогда группа* $H^{2n-1}(M, Z)$ *биективна множеству* $\langle \mathcal{E}_n(A)\rangle$.

Это вытекает сразу из [3] и из классификационной теоремы Хопфа [7], [13], согласно которой в указанных случаях $\pi^{2n-1}(M)$ и $H^{2n-1}(M, Z)$ биективны. Если алгебра A конечно порождена и n — количество ее образующих, то согласно предложению группа $\langle \mathcal{E}_k(A)\rangle$ совпадает с $H^{2n-1}(M, Z)$ (и значит тривиальна) для любого $k > n$, так как тогда размерность спектра $M \subset \mathbb{C}^n$ не превышает $2n \leq 2k-1$. Для регулярных алгебр этот результат можно усилить. Напомним, что аналитической называется такая алгебра, для которой разрешимо каждое уравнение вида $g^2 = f$, $f \in A$, причем $f = h^2$ для некоторого $h \in C(M)$ [17] (достаточным условием для этого является эпиморфность гомоморфизма $\alpha \to \alpha^2$: $H^1(M, Z) \to H^1(M, Z)$, [6]).

Теорема 3. *Пусть A — регулярная полупростая банахова алгебра, каждое конечное количество элементов которой содержится в подалгебре с n образующими, такими, что порожденная ими симметрическая алгебра аналитична. Тогда $H^{2k-1}(M, Z) = \langle \mathcal{E}_k(A)\rangle$, $k > n$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}=\{U_j\}_{j\leqq s}$ — открытое покрытие M, а $\mathfrak{W}=\{W_j\}_{j\leqq s}$ — такое измельчение $\mathfrak{U}$, замкнутые оболочки элементов которого тоже образуют измельчение $\mathfrak{U}$, [17]. В силу регулярности A найдем такие $f_1, f_2, \ldots, f_s$ в A, чтобы включения $W_j\subset Z(f_j)\subset U_j$ имели место для каждого $j\leqq s$. Пусть B — конечно порожденная подалгебра A с n образующими $g_1, \ldots, g_n$, содержащая согласно условию теоремы элементы $f_1, f_2, \ldots, f_s$. Пусть $y\in\sigma(g_1, \ldots, g_n)=M_B$ и $\sigma^{-1}_{g_1, g_2, \ldots, g_n}(y)=N\subset M$, где через $\sigma_{g_1, g_2, \ldots, g_n}(m)$ обозначено непрерывное отображение $M\to\sigma(g_1, \ldots, g_n)$, определенное как $m\to(g_1(m), \ldots, g_n(m))$. Для любой компоненты связности S множества N найдется такое W_{j_0}, что $W_{j_0}\cap S\neq\emptyset$, а значит и $N\cap Z(f_{j_0})\neq\emptyset$. Так как $g_1, \ldots, g_n$ постоянны на N, то и f_{j_0}, как элемент B, тоже будет постоянным на N, но тогда $N\subset Z(f_{j_0})$, так что $U_{j_0}\supset N\supset S$. В силу второго условия теоремы N является связным, т. е. $N=S$, [17]. Следовательно, покрытие $\mathfrak{U}$ окружает совокупность множеств вида $\sigma^{-1}_{\mathrm{Reg}_1, \ldots, \mathrm{Jm}\, g_n}(z)=\sigma^{-1}_{g_1, \ldots, g_n}(y)$, где $y\in M_B$, а $z\in M_{[B,\bar{B}]}$, что гарантирует существование измельчения $\mathfrak{U}$ порядка не выше $2n$ (см. 17), т. е. что $\dim M\leqq 2n$. Чтобы доказать теорему, остается применить предложение 3.

4. Примеры. Как мы заметили в начале, $V_{2,1}(A)=\mathcal{E}_2(A)$, $\pi^{2,1}(M)=\pi^3(M)$, так что в частном случае $n=2$ из теоремы 1 имеем

Следствие 2. *Третье когомотопическое множество $\pi^3(M)$ спектра полупростой коммутативной банаховой алгебры A с единицей биективно множеству связных компонент пар элементов A с совместным спектром, не содержащим нуля.*

Если $H^3(M, Z)=0$ и $\dim M\leqq 3$, согласно следствию 2, множество $V_{2,1}(A)=\mathcal{E}_2(A)$ будет линейно связным. Например, для любой алгебры функций на S^1 или на S^2 множество пар функций без общих нулей линейно связное, в случае алгебры на S^3 это множество имеет счетное количество компонент связности, поскольку $H^3(S^3, Z)\cong Z$. Имеет место более общее утверждение:

Следствие 3. *Множество $\langle\mathcal{E}_2(A)\rangle$ связных компонент пар функций без общих нулей в алгебре функций на сфере S^n биективно группе $\pi_n(S^3)$.*

Это так, потому что $\pi^3(M)=\pi_n(S^3)$, когда $M=S^n$. Значит, например для алгебры на S^4, так как $\pi_4(S^3)=Z_2$, у пар, не аннулирующихся одновременно на M функций, ровно две компоненты связности.

Введенная в следствии 1 групповая структура в множестве $\langle V_{2,1}(A)\rangle$ сводится к следующему. Пусть (a, b) и (c, d) — два элемента $\mathcal{E}_2(A)$, а a_1, b_1, c_1, d_1 — такие элементы A, что $aa_1+bb_1=cc_1+dd_1=e$. Произведение $(a, b)^{\sim}.(c, d)^{\sim}$ определяется как $(ac-b_1d, a_1d+bc)^{\sim}$, где, как обычно, тильдами обозначены классы данных элементов. Единичный элемент совпадает с классом пары $(e, 0)$, а обратный $(a, b)^{\sim}$ — с классом пары $(a_1, -b)$. Легко видеть, что это умножение индуцируется умножением кватернионов, рассматриваемых как пары комплексных чисел. Известно, что тогда их произведение выражается так: $(u, v).(w, z)=(uw-\bar{v}z, \bar{u}z+vw)$. В $\pi^3(M)$ тоже существует операция, индуцированная умножением кватернионов на S^3 (см. напр. [7]), и фигурирующие в следствиях 2 и 3 биекции на самом деле являются изоморфизмами групп.

В качестве примера рассмотрим случай вполне симметрической алгебры [1]. Теперь $fh-gl$ и $\bar{f}l+gh$ являются элементами алгебры A вместе с f, g, h и l, причем если (f, g) и (h, l) принадлежат $\mathcal{E}_2(A)$, то и $(fg-\bar{g}h, \bar{f}l+gh)$ будет принадлежать туда же. Следовательно, в этом случае само $\mathcal{E}_2(A)$ будет группой и $\langle\mathcal{E}_2(A)\rangle$ является факторгруппой $\mathcal{E}_2(A)/\mathcal{E}'_2(A)$, где $\mathcal{E}'_2(A)$ есть связная компонента единичного элемента $(e, 0)$.

Следствие 4. *Для вполне симметрической алгебры A (коммутативной, полупростой, с единицей) со спектром M группа $\pi^3(M)$ изоморфна группе $\mathcal{E}_2(A)/\mathcal{E}'_2(A)$.*

В этом случае мы можем явно указать функции E_i, участвующие в доказательстве предложения 2. Если вектор $D_1, D_2, \ldots, D_n$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_n(C(I, A))$, то $\Sigma|D_i^2|\neq 0$ и следовательно функции $E_i=\bar{D}_i(\Sigma|D_i^2|)^{-1}$ из A связаны интересующим нас тождеством $\Sigma D_iE_i\equiv 1$.

Автор выражает благодарность Г. Скордеву и Е. Любеновой за полезные обсуждения.

Замечание. Так как теорема Аренса [15] верна не только в полупростом случае, то предложения 1, 2 теоремы 1, 2 и следствия 1, 2, 3, 4 вместо с их доказательствами (при очевидных изменениях) остаются в силе и для произвольных коммутативных банаховых алгебр с радикалом.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца, Москва, 1960.
2. М. Е. Новодворский. О некоторых гомотопических инвариантах пространства максимальных идеалов. *Мат. заметки*, **1**, 1967, № 4, 487—494.
3. В. Л. Эйдлин. О топологических характеристиках пространства максимальных идеалов банаховой алгебры. *Вестник ЛГУ*, **13**, № 3, 1967, 173—174.
4. Д. Б. Фукс, А. Т. Фоменко, В. Л. Гутенмахер. Гомотопическая топология. Москва, 1969.
5. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. Москва, 1971.
6. Е. А. Горин, В. Я. Лин. Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос. *Матем. сб.*, **78**, 1969, 579—610.
7. Ху Сы-цзян. Теория гомотопий. Москва, 1964.
8. Л. Хермандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. Москва, 1968.
9. В. Я. Лин. Голоморфные расслоения и многозначные функции от элементов банаховой алгебры. *Функц. анализ и его прилож.*, **7**, 1973, № 2, 43—51.
10. Х. Ройден. Функциональные алгебры. *Математика, период., сборн. перев.*, **9**, 1965, № 2, 98—114.
11. Т. Гамелин. Равномерные алгебры. Москва, 1973.
12. Ж. Дьёдонне. Геометрия классических групп. Москва, 1974.
13. H. Hopf. Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf der n-dimensionale Sphäre. *Comment. Math. Helv.*, **5**, 1933, 39—54.
14. R. Arens. The group of invertible elements of a commutative Banach algebra. *Studia Math., ser. spec., Z*, 1, 1963. 21—23.
15. R. Arens. To what extent does the space of maximal ideals determine the algebra? Function algebras, Proc. Int. Symp. on Funct. alg., Tulane Univ., 1965.
16. K. J. Ramspott. Uber die Homotopieklassen holomorphen Abbildungen in homogene komplexe Mannigfaltigkeiten. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss.*, 1962, 57—62.
17. L. Gillman, M. Jerison. Rings of Continuous Functions. New York, 1960.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 15. 1. 1975