Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДИН СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КИМ Г. ВАЛЕЕВ, ГАЛИНА Х. САРАФОВА

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений. При определенных условиях, применяя метод исследования, введенный Валеевым и Кулеско (1968), строится система обыкновенных дифференциальных уравнений, все решения которой совпадают с решениями первоначальной системы интегро-дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t)=f\left(t, y(t), \int_0^t \varphi(t, s, y(s))ds\right), \tag{1}$$

где $y(t)$ — n-мерный вектор. Пусть вектор-функция $f(t, y, z)$ определена и непрерывна для $t\geqq 0$ и удовлетворяет условиям

$$\left\| f\left(t, 0, \int_0^t \varphi(t, s, 0)\, ds\right)\right\| \leqq M,$$

$$\| f(t, y_1, z_1)-f(t, y_2, z_2)\| \leqq L_1\| y_1-y_2\|+L_2\| z_1-z_2\|,$$

а вектор-функция $\varphi(t, s, y)$ определена и непрерывна для $t, s\geqq 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\| \varphi(t, s, y_1)-\varphi(t, s, y_2)\| \leqq \mu \exp(-\lambda(t-s))\| y_1-y_2\|, \quad \mu=\mathrm{const}$$

для $t\geqq s$, $\lambda > L_1$.

Ищем систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-ного порядка

$$\dot{y}(t)=F(t, y(t)), \tag{2}$$

все решения которой являются решениями системы (1) и где вектор-функция $F(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y. Имеем

$$y(s)=y(t)+\int_t^s F(u, y(u))du, \quad (t\geqq s). \tag{3}$$

Следовательно, функция $F(t, y)$ должна удовлетворять условию

$$F(t, y)=f\left(t, y, \int_0^t \varphi\left(t, s, y+\int_t^s F(u, y(u))du\right)ds\right), \quad y\equiv y(t),$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 154—159

где $y(u)$ — решение системы (3). Для отыскания $F(t, y)$ используем метод последовательных приближений. Полагаем

$$F_0(t, y) = 0, \tag{4.1}$$

$$F_{n+1}(t, y) = f\left(t, y, \int_0^t \varphi\left(t, s, y + \int_t^s F_n(u, y_n(u))du\right)ds\right), \tag{4.2}$$

$$y_n(u) = y + \int_t^u F_n(\tau, y_n(\tau))d\tau. \tag{4.3}$$

2. Покажем, что при определенных условиях функции $F_n(t, y)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же постоянной L. Из (4) имеем

$$F_1(t, y) = f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y)ds\right).$$

Покажем, что $F_1(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица.

$$\| F_1(t, y_1) - F_1(t, y_2) \| = \left\| f\left(t, y_1, \int_0^t \varphi(t, s, y_1)ds\right) - f\left(t, y_2, \int_0^t \varphi(t, s, y_2)ds\right)\right\| \tag{5}$$

$$\leq L_1 \| y_1 - y_2 \| + L_2 \mu \int_0^t \exp(-\lambda(t-s))ds \,.\, \| y_1 - y_2 \|$$

$$\leq L_1 \| y_1 - y_2 \| + L_2 \mu \| y_1 - y_2 \| / \lambda = (L_2 + L_2 \mu/\lambda) \| y_1 - y_2 \|.$$

Для произвольного $n \geq 1$ имеем

$$\| F_{n+1}(t, y) - F_{n+1}(t, z) \| = \left\| f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y_n(s))ds\right)\right. \tag{6}$$

$$\left. - f\left(t, z, \int_0^t \varphi(t, s, z_n(s))ds\right)\right\|,$$

где $y_n(s) = y + \int_t^s F_n(\tau, y_n(\tau))d\tau, \quad z_n(s) = z + \int_t^s F_n(\tau, z_n(\tau))d\tau.$

Для нормы разности решений получим

$$\| y_n(s) - z_n(s) \| = \| y - z \| - \int_t^s \| F_n(\tau, y_n(\tau)) - F_n(\tau, z_n(\tau)) \| d\tau. \tag{7}$$

Предположим, что $F_n(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, $\lambda > L$. Тогда из (7) будем иметь $\| y_n(s) - z_n(s) \| \leq \| y - z \| \exp(L(t-s))$. Из (6) получим неравенство

$$\|F_{n+1}(t, y)-F_{n+1}(t, z)\| \leq L_1\|y-z\|+L_2\mu\int_0^t \exp(-\lambda(t-s))\,\|y_n(s)-z_n(s)\|ds$$

$$\leq L_1\|y-z\|+L_2\mu\int_0^t \exp(-(\lambda-L)(t-s))ds\,.\,\|y-z\|$$

$$=L_1\|y-z\|+L_2\mu\|y-z\|/(\lambda-L)=(L_1+L_2\mu/(\lambda-L))\,.\,\|y-z\|.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$L_1+L_2\mu/(\lambda-L)\leq L, \quad (L>0), \tag{8}$$

то для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ будет справедливо неравенство

$$\|F_{n+1}(t, y)-F_{n+1}(t, z)\|\leq L\|y-z\|.$$

Положительное решение L неравенства (8) существует при $\mu\leq\mu_0$, где $\mu_0=L_2^{-1}(\lambda-L_1)^2/4$. При $\mu=\mu_0$ находим наибольшее значение $L=L_{\max}$; $L_{\max}=(\lambda+L_1)/2$.

3. Введем вспомагательную величину $q=L_2\mu/L(\lambda-L)$. Для $\mu\leq\mu_0$, $L=L_{\max}$, $q<1$. Оценим при этих предположениях $F_n(t, y)$. Для $n=0$ получаем неравенство

$$\max_t\|F_1(t, y)\|=\max_t\left\|f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y)ds\right)\right\|$$

$$\leq\max_t\left\|f\left(t, 0, \int_0^t \varphi(t, s, 0)ds\right)\right\|+\max_t\left\|f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y)ds\right)\right.$$

$$\left.-f\left(t, 0, \int_0^t \varphi(t, s, 0)ds\right)\right\|\leq M+L_1\|y\|+L_2\mu\max_t\int_0^t \exp(-\lambda(t-s))ds\,\|y\|$$

$$\leq M+(L_1+L_2\mu/\lambda)\,.\,\|y\|.$$

Так как при $y=0$ получаем оценку $\|F_1(t, 0)\|\leq M$, то можно уточнить предыдущее неравенство, а именно,

$$\|F_1(t, y)\|\leq\|F_1(t, y)-F_1(t, 0)\|+\|F_1(t, 0)\|\leq M+L\|y\|.$$

Следовательно, для $n=0$ имеем оценку $\max\limits_t\|F_1(t, y)\|\leq M+L\|y\|$. Предположим теперь справедливость неравенства

$$\max_t\|F_n(t, y)\|\leq M(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})+L\|y\|.$$

Для $\|F_{n+1}(t, y)\|$ получим оценку

$$\|F_{n+1}(t, y)\|=\left\|f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y_n(s))ds\right)\right\|\leq\left\|f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y)ds\right)\right\|$$

$$+\left\| f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y)ds\right) - f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y_n(s))ds\right)\right\| \tag{9}$$

$$\leq M + L\|y\| + L_2\mu\int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) . \|y_n(s) - y\|\, ds.$$

Введем обозначение

$$S_n(s) = y_n(s) - y. \tag{10}$$

Величина $S_n(s)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$S_n(s) = \int_t^s F_n(u, S_n(u) + y)du, \quad S_n(t) = 0.$$

Переходя к нормам и решая полученное неравенство, находим

$$\|S_n(s)\| \leq \{M(1 + q + \cdots + q^{n-1}) + L\|y\|\} . \{\exp(L(t-s)) - 1\}/L. \tag{11}$$

Из (9), (10), (11) находим

$$\|F_{n+1}(t, y)\| \leq M + L\|y\| + L^{-1}L_2\mu\{M(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$

$$+ L\|y\|\} . \int_0^t \exp(-(\lambda - L)(t-s))ds \leq M + L\|y\| + L_2\mu\{M(1 + q \cdots + q^{n-1}) \tag{12}$$

$$+ L\|y\|\}/L(\lambda - L) = M(1 + q + \cdots + q^n) + L(1 + q)\|y\|.$$

Неравенство (12) выполняется для всех $t \geq 0$ и всех y. При $y = 0$ имеем $\max_t \|F_{n+1}(t, 0)\| \leq M(1 + q + \cdots + q^n)$. По доказанному в пункте 2 вектор-функция $F_{n+1}(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, т. е. можем записать

$$\|F_{n+1}(t, y)\| \leq \|F_{n+1}(t, 0)\| + \|F_{n+1}(t, 0) - F_{n+1}(t, y)\|$$
$$\leq M(1 + q + \cdots + q^n) + L\|y\|.$$

Следовательно, $\max_t \|F_{n+1}(t, y)\| \leq M(1 + q + \cdots + q^n) + L\|y\|$.

Найдем при $\mu = \mu_0$ максимальное значение q.

$$q_{\max} = (\lambda - L_1)/(\lambda + L_1) < 1.$$

Поэтому

$$1 + q + \cdots + q^n < 1/(1 - q) = (\lambda + L_1)/2L_1. \tag{13}$$

Окончательно, для $\mu \leq \mu_0$, $L = L_{\max}$ получаем оценку

$$\max_t \|F_n(t, y)\| \leq M(\lambda + L_1)/2L_1 + L\|y\|, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. Найдем теперь условия сходимости последовательности $F_n(t, y)$. Оценим сначала разность

$$\| F_1(t, y) - F_0(t, y) \| = \left\| f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y) ds\right) \right\| \leq M + L \| y \|. \tag{14}$$

Предположим теперь, что при всех $t \geq 0$, y выполняется неравенство $\| F_n(t, y) - F_{n-1}(t, y) \| \leq \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \| y \|$. Оценим аналогичную разность

$$\| F_{n+1}(t, y) - F_n(t, y) \| = \left\| f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y_n(s)) ds\right) \right. \tag{15}$$

$$\left. - f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y_{n-1}(s)) ds\right) \right\| \leq L_2 \mu \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \| y_n(s) - y_{n-1}(s) \| ds.$$

Введем обозначение $v_n(u) = y_n(u) - y_{n-1}(u)$, $v_n(t) = 0$. Из системы (4.3) получаем

$$v_n(u) = \int_t^u [F_n(s, v_n(s) + y_{n-1}(s)) - F_{n-1}(s, y_{n-1}(s))] ds.$$

Оценим по норме $v_n(u)$:

$$\begin{aligned} \| v_n(u) \| &\leq \int_u^t \| F_n(s, v_n(s) + y_{n-1}(s)) - F_n(s, y_{n-1}(s)) \| ds \\ &+ \int_u^t \| F_n(s, y_{n-1}(s)) - F_{n-1}(s, y_{n-1}(s)) \| ds \\ &\leq \int_u^t (L \| v_n(s) \| + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \| y_{n-1}(s) \|) ds \\ &\leq \int_u^t (L \| v_n(s) \| + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \| y \| + \beta_{n-1} \| y_{n-1}(s) - y \|) ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Из (11) и (13) имеем

$$\| y_{n-1}(s) - y \| \leq (M(\lambda + L_1)/2LL_1 + \| y \|) . (\exp(L(t-s)) - 1). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), получим

$$\begin{aligned} \| v_n(u) \| \leq \int_u^t [L \| v_n(s) \| + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \| y \| + \beta_{n-1}(M(\lambda + L_1)/2LL_1 + \| y \|) \\ \times (\exp(L(t-s)) - 1)] ds. \end{aligned} \tag{18}$$

Решая интегральное неравенство (18) по способу, указанному в [2], получим

$$\| v_n(u) \| \leq \{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \| y \| - \beta_{n-1} [M(\lambda + L_1)/2LL_1 + \| y \|]\}$$

$$\begin{aligned}(19)\quad &\times\{\exp(L(t-u))-1\}L^{-1}+\beta_{n-1}(M(\lambda+L_1)/2LL_1+\|y\|).(t-u)\\ &\times\exp(L(t-u))=L^{-1}\{\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}M(\lambda+L_1)/2LL_1\}.\{\exp(L(t-u))-1\}\\ &+\beta_{n-1}\{M(\lambda+L_1)/2LL_1+\|y\|\}.(t-u).\exp(L(t-u)).\end{aligned}$$

Из (15), принимая по внимание оценку (19), получаем

$$\begin{aligned}&\|F_{n+1}(t,y)-F_n(t,y)\|\leqq L_2\mu\int_0^t\exp(-\lambda(t-s))[L^{-1}(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}M(\lambda+L_1)/2LL_1)\\ (20)\quad &\times(\exp(L(t-s))-1)+\beta_{n-1}(M(\lambda+L_1)/2LL_1+\|y\|)\exp(L(t-s)).(t-s)]ds\\ &\leq L_2\mu[L^{-1}(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}M(\lambda+L_1)/2LL_1)/(\lambda-L)\\ &+\beta_{n-1}(M(\lambda+L_1)/2LL_1+\|y\|)/(\lambda-L)^2].\end{aligned}$$

Итак, из (20) видно, что $\|F_{n+1}(t,y)-F_n(t,y)\|\leqq\alpha_n+\beta_n\|y\|$, где

$$\alpha_n=L_2\mu(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}M(\lambda+L_1)/2LL_1)/L(\lambda-L)+\beta_{n-1}M(\lambda+L_1)L_2\mu/2LL_1(\lambda-L)^2;$$
$$\beta_n=\beta_{n-1}L_2\mu/(\lambda-L)^2;\quad L_2\mu/(\lambda-L)^2<1,\ (\mu<\mu_0).$$

Из неравенства (14) видно, что в качестве α_0 можно взять M, а в качестве β_0 — число L. Для $\mu<\mu_0$ величины α_n и β_n стремятся к нулю при $n\to\infty$ как члены убывающей геометрической прогрессии. Итак, последовательность $F_n(t,y)$ сходится равномерно по t, y в любой области $\|y\|\leq a=\text{const}$.

Резюмируя все результаты, можно сформулировать теорему.

Теорема. *Если при* $\lambda>L_1$ и $\mu<\mu_0$, $\mu_0=L_2^{-1}(\lambda-L_1)^2/4$, *то существует система обыкновенных дифференциальных уравнений* (2), *все решения которой удовлетворяют уравнению* (1). *При этом вектор-функция* $F(t,y)$ *удовлетворяет условиям:*

$$\|F(t,0)\|\leq M(\lambda+L_1)/2L_1;\quad\|F(t,y)-F(t,z)\|\leq L\|y-z\|;\quad L\leqq(\lambda+L_2)/2.$$

Так как решения систем (1), (2) однозначно определяются начальными значениями при $t=0$ и справедлива теорема единственности, то при $\lambda>L_1$, $\mu<\mu_0$ систему интегро-дифференциальных уравнений (1) можно заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2), т. е. можно осуществить принцип сведения для интегро-дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Г. Валеев, А. А. Кулеско. О конечнопараметрическом семействе решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. *Укр. мат. журнал*, 20, 1968, № 6, 739—749.
2. К. Г. Валеев, О. А. Жаутыков. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1974, с. 248—249.

КИИГА, Киев *проспект Комарова 1 УССР*

Поступила 5. 2. 1975 г.

ул. Петко Д. Петков № 13, Пловдив