Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ А. Н. КОЛМОГОРОВА О СУПЕРПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ

В. М. ТИХОМИРОВ

Пример функции $F_0(t_1, \ldots t_n)$, непрерывной на единичном кубе $([-1, 1])^n$ и не представимой в виде $\sum_{i=1}^{n} \chi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t_j) \right)$, где χ_i и φ_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$ непрерывны.

Пусть $\mathbb{R}^n = \{t = (t_1, \ldots, t_n)\}$ обозначает n-мерное пространство, $\mathbb{R}^n_+ = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geqq 0\}$ — неотрицательный ортант, $I_0 \subset \mathbb{R}$ отрезок $[-1, 1]$, $I_0^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t_i| \leqq 1\}$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Функция $F_0 : I_0^n \to \mathbb{R}$, задаваемая соотношениями*

$$F_0(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \min(t_1, \ldots, t_n), & t \in \mathbb{R}^n_+ \cap I_0^n, \\ \max(t_1, \ldots, t_n), & -t \in \mathbb{R}^n_+ \cap I_0^n, \\ 0, & t \in I_0^n \setminus (\mathbb{R}^n_+ \cup (-\mathbb{R}^n_+)), \end{cases} \tag{1}$$

не представима в виде $\sum_{i=1}^{n} \chi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t_j) \right)$, *если* χ_i *и* φ_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$ *непрерывны.*

Как известно, Колмогоров [1] доказал, что всякая непрерывная функция F на I_0 допускает такое представление:

$$F(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t_j) \right), \quad N = 2n+1. \tag{2}$$

Минимальное число N функций χ_i, необходимых для представления любой функции есть интересный инвариант числа измерений. Арнольд [2] доказал, что при $n=2$ это число не может равняться единице. В 1962 году М. И. Гервер построил пример функции на квадрате, не представимой в виде (2), если число N равно двум. Подробное изложение примера Гервера заняло несколько десятков страниц. Работа Гервера осталась неопубликованной. Продумывая работу Гервера, тогда же, в 1962 году, я свел задачу о непредставимости функции F_0 вида (1) к одному интересному утверждению о размерности алгебраической суммы простых дуг. Недавно это утверждение было доказано Е. В. Щепиным [3] и таким образом стала возможной публикация нашей теоремы.

Доказательство теоремы. Разберем подробно случай $n=2$, ибо общий случай аналогичен. Отрезки, соединяющие точку $(0, 0)$ с точ-

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 168—170

ками $\pm e_i$, $i=1, 2$, $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$ обозначим $\gamma_{\pm i}$. Допустим, что нашлись непрерывные функции χ_i, φ_{ij}, $i, j=1, 2$ такие, что

$$F_0(t_1, t_2)=\chi_1(\varphi_{11}(t_1)+\varphi_{12}(t_{12}))+\chi_2(\varphi_{21}(t_1)+\varphi_{22}(t_2)).$$

Не ограничив себя в общности, можно считать, что $\varphi_{ij}(0)=0$, $i, j=1, 2$. Равенства

$$x_i=f_i(t)=\varphi_{i1}(t_1)+\varphi_{i2}(t_2), \quad i=1, 2$$

задают отображение $f: I_0^2\to\mathbb{R}^2$, $f=(f_1, f_2)$. Обозначим через $\Gamma_{\pm i}$, $i=1, 2$ образы отрезков $\gamma_{\pm i}$ при отображении f.

Лемма 1. *Множества $\Gamma_{\pm i}$, $i=1, 2$ являются простыми дугами.*

Доказательство леммы проведем для Γ_1. Пусть $f((t_1, 0))=f((t'_1, 0))$. Это по определению означает, что

$$f(t_1, 0)=(f_1(t_1, 0), f_2(t_1, 0))=(\varphi_{11}(t_1)+\varphi_{12}(0), \varphi_{21}(t_1)+\varphi_{22}(0))$$
$$=f(t'_1, 0)=(f_1(t'_1, 0), f_2(t'_1, 0))=(\varphi_{11}(t'_1)+\varphi_{12}(0), \varphi_{21}(t'_1)+\varphi_{22}(0)),$$

откуда вследствие равенств $\varphi_{ij}(0)=0$ получаем, что $\varphi_{11}(t_1)=\varphi_{11}(t'_1)$, $\varphi_{21}(t_1)=\varphi_{22}(t'_1)$. Значит

$$f(t_1, 1)=(f_1(t_1, 1), f_2(f_1, 1))=(\varphi_{11}(t_1)+\varphi_{12}(1), \varphi_{21}(t_1)+\varphi_{22}(1)$$
$$=(\varphi_{11}(t'_1)+\varphi_{12}(1), \varphi_{21}(t'_1)+\varphi_{22}(1))=(f_1(t'_1, 1), f_2(t'_1, 1))=f(t'_1, 1)$$

и, следовательно,

$$F_0(t_1, 1)=\chi_1(\varphi_{11}(t_1)+\varphi_{12}(1))+\chi_2(\varphi_{21}(t_1)+\varphi_{22}(1))$$
$$=\chi_1(\varphi_{11}(t'_1+\varphi_{12}(1))+\chi_2(\varphi_{21}(t'_1)+\varphi_{22}(1))=F_0(t'_1, 1).$$

Но по определению $t_1=F_0(t_1, 1)$, $t'_1=F_0(t'_1, 1)$, значит $t_1=t'_1$, т. е. $f(t_1, 0)=f(t'_1, 0)$, лишь если $t_1=t'_1$. Но это и означает, что Γ_1 — простая дуга. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $T_1, \ldots, T_n$ — простые дуги в $\mathbb{R}^n$, соединяющие точку $0\in\mathbb{R}^n$ с точками $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\xi_i\in\mathbb{R}^n$, причем векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — линейно независимы. Тогда размерность алгебраической суммы $T_1, \ldots, T_n$ равна n.*

Напомним, что алгебраической суммой множеств A_i, $i=1, \ldots, m$, лежащих в линейном пространстве X, называется множество A, состоящее из точек x, представимых в виде $x=x_1+\ldots+x_m$, $x_i\in A_i$.

О лемме 2 упоминалось выше. На плоскости доказательство ее получается сравнительно просто. Оно было получено автором, Колмогоровым, Ситниковым и другими, но доказательства остались неопубликованными. В полном объеме эта лемма была доказана Щепиным.

Лемма 3. *Если Γ_1 и Γ_{-2} (Γ_2 и Γ_{-1}) не являются колинеарными отрезками, то $\Gamma_1(\Gamma_2)$ содержит горизонтальный или вертикальный отрезок.*

Доказательство. Если Γ_1 является горизонтальным или вертикальным отрезком, то доказывать нечего. Пусть это не так. Тогда в силу леммы 2 размерность $\Gamma_1+\Gamma_{-2}$ равна двум, и по известному свойству полной размерности это множество содержит внутренние точки. Рассмотрим точку $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in\operatorname{int}(\Gamma_1+\Gamma_{-2})$ такую, что прямая $x_1=\xi_1$ пересекается с Γ_1 в точке $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)=f(\bar{\tau}, 0)$. Отметим, что точки $x=(x_1, x_2) \in \Gamma_1+\Gamma_{-2}$ представимы в виде:

$$(\varphi_{11}(t_1)+\varphi_{12}(t_2),\ \varphi_{21}(t_1)+\varphi_{22}(t_2)),\ 0\leqq t_1\leqq 1,\ -1\leqq t_2\leqq 0$$

и значит

$$\chi_1(x_1)+\chi_2(x_2)=F_0(t_1, t_2)=0.$$

Отсюда, в частности, следует, что на некотором отрезке $[\xi_1-\delta, \xi_1, +\delta]$ функция $\chi_1(x)$ является константой. Таким образом, если горизонтальный отрезок $(\xi_1-\delta\leqq x_1\leqq\xi_1+\delta, x_2)$ принадлежит образу I_0 при отображении f, то функция F на прообразе этого отрезка должна быть константой. Если допустить, что Γ_1 в окрестности точки $\bar{x}=(x_1, x_2)$ не является горизонтальным отрезком, то сразу получается противоречие, ибо тогда либо $F_0(t_1, t_2)$ есть тождественный нуль в окрестности точки $(\bar{\tau}, 0)$, либо на одной горизонтали с точкой $\bar{x}$ найдутся точки из $\Gamma_1+\Gamma_2$ (в прообразе которых $F\neq 0$) и точки из $\Gamma_1+\Gamma_{-2}$ (в прообразе которых $F=0$). Лемма доказана.

Из леммы 3 сразу следует, что если Γ_1 и Γ_{-2} не колинеарны, то (при условии, что Γ_1 содержит горизонтальный отрезок) Γ_{-2} содержит *вертикальный отрезок, исходящий сразу из нуля*. Действительно, надо рассмотреть максимальный отрезок Δ, на котором χ_1 постоянна. Тогда, если допустить, что кривая Γ_1 не вертикальна в малой окрестности нуля, а максимальный отрезок Δ является внутренним по отношению к проекции Γ_1 на осb x_1, то сразу получается противоречие с максималностью Δ, ибо, как говорилось, на горизонтальном отрезке, лежащем в $\Gamma_1+\Gamma_{-2}$, функция χ_1 должна быть константой, т. е. векторы $\xi\in\Gamma_2$ не могут смещаться ни вправо, ни влево. Рассуждая теперь аналогичным образом для кривой Γ_{-2} по отношению к Γ_1, получим, что и отрезок Γ_1, исходящий из нуля, является горизонтальным. Итак, доказано, что все свелось к случаю, когда $\Gamma_{\pm i}$, $i=1, 2$ являются отрезками, а здесь утверждение теоремы очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения. *Докл. АН СССР*, **114**, 1957, № 5, 953—956.
2. И. В. Арнольд. О представимости функций двух переменных в виде $\chi(\varphi(x)+\psi(y))$. *Успехи мат. наук*, **12**, 1957, № 2, 119—121.
3. Е. В. Щепин. О размерности суммы кривых. *Успехи мат. наук*, **30**, 1975, № 4, 267—268.

Московский государственный университет
Механо-математический факультет
Москва В-234

Поступила 21. 2 1975 г.