Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМИ СУММАМИ БЕРНШТЕЙНА-РОГОЗИНСКОГО

ГЕОРГИ ХР. КИРОВ

Вводятся обобщенные суммы Бернштейна-Рогозинского для функций двух переменных. Доказаны теоремы об аппроксимации этими суммами для функции $f(x, y) \in C^{(r)}_{2\pi,2\pi}$.

В этой работе некоторые из результатов аппроксимации непрерывных 2π-периодических функций одной переменной [1] распространены на случай многих переменных в равномерной метрике. Для простоты будем рассматривать функции двух переменных.

1. Обозначим через $C_{2\pi,2\pi}$ множество всех непрерывных функций $f(x, y)$, $(x, y) \in (-\infty, +\infty)\times(-\infty, +\infty)$, периодических с периодом 2π по обеим переменным. Норму в $C_{2\pi,2\pi}$ определим, как обычно, равенством

$$\|f\|_{C_{2\pi,2\pi}} = \max_{(x,\, y)} |f(x, y)|, \ f \in C_{2\pi,2\pi}.$$

Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0,\ n=0}^{n\quad \infty}, \ \lambda_0^{(n)} \equiv 1, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

— треугольная матрица действительных чисел. Введем тригонометрический полином

$$U_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kx \tag{1}$$

порядка $\leq n$, называемый ядром.

Для любой функции $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$ и любых двух целых неотрицательных чисел n и m, следуя Э. Н. Морозову [2], положим

$$\begin{aligned} U_{n,m} f \equiv U_{n,m}(f; x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, z) U_n(x-t) U_m(y-z)\, dt dz \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+z) U_n(t)\, U_m(z)\, dt dz. \end{aligned} \tag{2}$$

Оператор $U_{n,m}$, определенный формулой (2), отображает $C_{2\pi,2\pi}$ на множество $H^T_{n,m}$ всех тригонометрических полиномов порядка n, m по переменным x, y.

Так как ядро $U_n(x)$ является четным, то

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(x)\, U_m(y)\, dx dy = \frac{4}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} U_n(x) U_m(y)\, dx dy = 1,$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 197—204.

$$U_{n,m}f=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi[f(x+t,\,y+z)+f(x-t,\,y+z)+f(x+t,\,y-z)$$

$$+f(x-t,\,y-z)]\,U_n(t)U_m(z)\,dtdz,$$

$$U_{n,m}(f;x,y)-f(x+y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi[f(x+t,\,y+z)+f(x-t,\,y+z)$$

$$+f(x+t,\,y-z)+f(x-t,\,y-z)-4f(x,\,y)]\,U_n(t)\,U_m(z)\,dtdz. \tag{3}$$

Далее, обозначим через $\omega_2(f;\delta;0)$ и $\omega_2(f;0;\eta)$ частные модули гладкости [3, стр. 125, 126] функции $f(x,y)$, соответственно x и y.

Сначала дадим некоторое усиление результата Э. Н. Морозова [2].

Теорема 1. *Для любой функции* $f(x,y)\in C_{2\pi,2\pi}$ *и любого оператора* $U_{n,m}$ *вида* (2) *имеет место неравенство*

$$\|U_{n,m}f-f\|_{C_{2\pi,2\pi}}\leqq\omega_2\left(f;\frac{1}{p};0\right)\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi(pt+1)^2\,|U_n(t)U_m(z)|\,dtdz \tag{4}$$

$$+\omega_2\left(f;0;\frac{1}{q}\right)\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi(qz+1)^2\,|U_n(t)U_m(z)|\,dtdz,$$

где p *и* q — *любые положительные числа.*

Доказательство. При помощи тождества (3) и известных [3] свойств частных модулей гладкости, находим

$$|U_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\leqq\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi[\omega_2(f;t;0)+\omega_2(f;0;z)]$$

$$\times|U_n(t)\,U_m(z)|\,dtdz\leqq\omega_2\left(f;\frac{1}{p};0\right)\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi(pt+1)^2\,|U_n(t)U_m(z)|\,dtdz$$

$$+\omega_2\left(f;0;\frac{1}{q}\right)\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi(qz+1)^2\,|U_n(t)U_m(z)|\,dtdz.$$

Следствие 1. *Если условия теоремы* 1 *выполнены и, кроме того, ядро* $U_n(x)$ *положительно* [4], *то справедливо неравенство*

$$\|U_{n,m}f-f\|_{C_{2\pi,2\pi}}$$

$$\leqq\omega_2\left(f;\frac{1}{p};0\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{p\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\lambda_2^{(n)}}\right)^2+\omega_2\left(f;0;\frac{1}{q}\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{q\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\lambda_1^{(m)}}\right)^2,$$

где p *и* q — *любые положительные числа.*

Наше утверждение следует из неравенства (4), условия положительности ядра $U_n(x)$ и неравенства [4]:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^iU_n(t)\,dt\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\lambda_1^{(n)}}\right)^i,\quad i=1,\,2.$$

Известно, что ядро $K_n(x)$ Фейера-Коровкина [5], определенное по формуле (1) при

$$\lambda_k^{(n)}=\frac{n-k+1}{n+2}\cos\frac{k\pi}{n+2}+\frac{\sin\frac{k+1}{n+2}\pi}{(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2}},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n, \tag{5}$$

является [4] четным и положительным.

Следствие 2. *Для любой функции* $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$ *справедливо неравенство*

$$\| K_{n,m} f - f \|_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{2}\right)^2 \left[\omega_2\left(f; \frac{1}{n+2}; 0\right) + \omega_2\left(f; 0; \frac{1}{m+2}\right)\right],$$

где оператор $K_{n,m}$ *Фейера-Коровкина построен по формуле* (2), *а значения* $\lambda_k^{(n)}$ *даются равенством* (5).

Определение. *Будем говорить, что оператор* $U_{n,m}$ *вида* (2) *удовлетворяет условию (A) в* $C_{2\pi,2\pi}$, *если существуют такие постоянные* $\mathcal{C}_1 \geqq 0$, $\alpha_n \geqq 0$, $\beta_m \geqq 0$ *и такое натуральное число* k, *что для любой функции* $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$ *выполняется неравенство*

$$\| U_{n,m} f - f \|_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \mathcal{C}_1 [\omega_k(f; \alpha_n; 0) + \omega_k(f; 0; \beta_m)]. \tag{6}$$

Следствие 3. *Оператор* $K_{n,m}$ *Фейера-Коровкина удовлетворяет условию (A) в* $C_{2\pi,2\pi}$ *со следующими значениями параметров*

$$0 \leqq \mathcal{C}_1 \leqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{2}\right)^2 < 18, \quad k=2, \quad \alpha_n = \frac{1}{n+2}, \quad \beta_m = \frac{1}{m+2}. \tag{7}$$

Если для каждой функции $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$ и каждого полинома $T_{n,m} \in H_{n,m}^T$ положим

$$\delta(T_{n,m}; f)_{C_{2\pi,2\pi}} = \| T_{n,m}(x, y) - f(x, y) \|_{C_{2\pi,2\pi}},$$
$$E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}} = \inf_{T_{n,m} \in H_{n,m}^T} \delta(T_{n,m}; f)_{C_{2\pi,2\pi}}$$

и учтем, что $E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \delta(K_{n,m}; f)_{C_{2\pi,2\pi}}$, то получим возможность высказать следствие 3 следующим образом.

Следствие 4. *Для любой функции* $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$

$$E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq 18 \left[\omega_2\left(f; \frac{1}{n+2}; 0\right) + \omega_2\left(f; 0; \frac{1}{m+2}\right)\right].$$

2. Пусть

$$B_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1} \cos kx \tag{8}$$

является ядром Бернштейна-Рогозинского.

Известно [6, стр. 270], что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | B_n(x) | \, dx < 2\pi. \tag{9}$$

Полиномы

$$B_{n,m} f \equiv B_{n,m}(f; x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, z) B_n(x-t) B_m(y-z)\, dt dz, \tag{10}$$

где $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$ называют суммами Бернштейна-Рогозинского для функций двух переменных. Очевидно, $B_{n,m} f \in H_{n,m}^T$.

Покажем, что оператор $B_{n,m}$ Бернштейна-Рогозинского для функций двух переменных удовлетворяет условию (A) в $C_{2\pi,2\pi}$.

Введем [3] коэффициенты Фурье

$$a_{ij}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x, y)\cos ix\cos jy\,dxdy,$$

$$b_{ij}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x, y)\cos ix\sin jy\,dxdy,$$

$$c_{ij}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x, y)\sin ix\cos jy\,dxdy,$$

$$d_{ij}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x, y)\sin ix\sin jy\,dxdy,\quad f\in C_{2\pi,2\pi},$$

и обозначения

$$A_{00}=\frac{a_{00}}{4},\quad A_{i0}=\frac{a_{i0}}{2},\quad A_{0j}=\frac{a_{0j}}{2},\quad A_{ij}=a_{ij},$$

$$B_{0j}=\frac{b_{0j}}{2},\quad B_{ij}=b_{ij},\quad B_{00}=B_{i0}=0,$$

$$\mathcal{C}_{i0}=\frac{c_{i0}}{2},\quad \mathcal{C}_{ij}=c_{ij},\quad \mathcal{C}_{00}=\mathcal{C}_{0j}=0,$$

$$D_{ij}=d_{ij},\quad D_{0j}=D_{i0}=D_{00}=0,\quad i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m,$$

$$S_{n,m}f=S_{n,m}(f; x, y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{i,j}(f; x, y),$$

где

$$A_{i,j}(f; x, y)=A_{ij}\cos ix\cos jy+B_{ij}\cos ix\sin jy+\mathcal{C}_{ij}\sin ix\cos jy+D_{ij}\sin ix\sin jy. \tag{11}$$

Не трудно сообразить, что имеет место тождество

$$\frac{1}{4}\Big[S_{n,m}\Big(f; x+\frac{\pi}{2n+1},\ y+\frac{\pi}{2m+1}\Big)+S_{n,m}\Big(f; x-\frac{\pi}{2n+1},\ y+\frac{\pi}{2m+1}\Big)+S_{n,m}\Big(f; x+\frac{\pi}{2n+1},\ y-\frac{\pi}{2m+1}\Big)+S_{n,m}\Big(f; x-\frac{\pi}{2n+1},\ y-\frac{\pi}{2m+1}\Big)\Big]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\cos\frac{i\pi}{2n+1}\cos\frac{j\pi}{2m+1}A_{i,j}(f; x, y). \tag{12}$$

Из равенств (10), (12) получаем

$$B_{n,m}(f; x, y)=\frac{1}{4}\Big[S_{n,m}\Big(f; x+\frac{\pi}{2n+1}, y+\frac{\pi}{2m+1}\Big)+S_{n,m}\Big(f; x-\frac{\pi}{2n+1},\ y+\frac{\pi}{2m+1}\Big)+S_{n,m}\Big(f; x+\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1}\Big)+S_{n,m}\Big(f; x-\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1}\Big)\Big]. \tag{13}$$

Обозначая через $T^*_{n,m}(x, y)$ полином наилучшего равномерного приближения порядка $\leq n$ по x и порядка $\leq m$ по y для функции $f(x, y)\in C_{2\pi,2\pi}$, можно записать $S_{n,m}(T^*_{n,m}; x, y)=T^*_{n,m}(x, y)$.

Пользуясь тождеством (13) для отклонения $\delta(B_{n,m};f)_{C_{2\pi,2\pi}}$, получаем

$$\delta(B_{n,m};f)_{C_{2\pi,2\pi}}=\Big\| \frac{1}{4}f(x+\frac{\pi}{2n+1}, y+\frac{\pi}{2m+1})-\frac{1}{2}f(x, y+\frac{\pi}{2m+1})$$

$$+\frac{1}{4}f(x-\frac{\pi}{2n+1}, y+\frac{\pi}{2m+1})+\frac{1}{4}f(x+\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1})$$

$$-\frac{1}{2}f(x, y-\frac{\pi}{2m+1})+\frac{1}{4}f(x-\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1})+\frac{1}{2}f(x, y+\frac{\pi}{2m+1})$$

$$-f(x, y)+\frac{1}{2}f(x, y-\frac{\pi}{2m+1})+\frac{1}{4}[T^*_{n,m}(x+\frac{\pi}{2m+1}, y+\frac{\pi}{2m+1})$$

$$-f(x+\frac{\pi}{2n+1}, y+\frac{\pi}{2m+1})]+\frac{1}{4}[T^*_{n,m}(x-\frac{\pi}{2n+1}, y+\frac{\pi}{2m+1})$$

$$-f(x-\frac{\pi}{2n+1}, y+\frac{\pi}{2m+1})]+\frac{1}{4}[T^*_{n,m}(x+\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1})$$

$$-f(x+\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1})]+\frac{1}{4}[T^*_{n,m}(x-\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1})$$

$$-f(x-\frac{\pi}{2n+1}, y-\frac{\pi}{2m+1})]+B_{n,m}(f-T^*_{n,m}; x, y)\Big\|_{C_{2\pi,2\pi}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\,\omega_2(f;\frac{\pi}{2n+2};0)+\frac{1}{2}\,\omega_2(f;0;\frac{\pi}{2m+1})$$

$$+E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}}+\|B_{n,m}(f-T^*_{n,m}; x, y)\|_{C_{2\pi,2\pi}}.$$

При помощи равенства (2) и неравенства (9) получаем оценку

$$\|B_{n,m}(f-T^*_{n,m}; x, y)\|_{C_{2\pi,2\pi}}<4\pi^2E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}},$$

которая позволяет высказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой функции $f(x, y)\in C_{2\pi,2\pi}$ имеет место неравенство*

$$\delta(B_{n,m};f)_{C_{2\pi,2\pi}}\leq(4\pi^2+1)E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}} \tag{14}$$

$$+\frac{1}{2}[\omega_2(f;\frac{\pi}{2n+1};0)+\omega_2(f;0;\frac{\pi}{2m+1})].$$

Из неравенства (14), следствия 4 и свойств [3] частных модулей гладкости получаем

Следствие 5. *Для любой функции $f(x, y)\in C_{2\pi,2\pi}$ справедливо неравенство*

$$\delta(B_{n,m};f)_{C_{2\pi,2\pi}}\leq[18(4\pi^2+1)+\frac{1}{2}][\omega_2(f;\frac{\pi}{2n+1};0)+\omega_2(f;0;\frac{\pi}{2m+1})],$$

т. е. оператор $B_{n,m}$ Бернштейна-Рогозинского, определенный формулой (10), удовлетворяет условию (А) в $C_{2\pi,2\pi}$ со следующими значениями параметров

$$0<C_1\leq 18\,(4\pi^2+1)+\frac{1}{2},\quad \alpha_n=\frac{\pi}{2n+1},\quad \beta_m=\frac{\pi}{2m+1},\quad k=2.$$

3. Пусть оператор $U_{n,m}$ определяется по формуле (2) и p — любое неотрицательное число. Теперь определим оператор $U_{n,m,p}$ для любой функции $f(x, y)\in C_{2\pi,2\pi}$ с помощью какого-либо из равенств

$$(15)\qquad U_{n,m,p}(f;x,y)\equiv U_{n,m,p}f=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\binom{p+1}{i}U_{n,m}^{i}f$$

$$=f+(-1)^{p}(U_{n,m}-F)^{p+1}f=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}[1-(1-\lambda_i^{(n)}\lambda_j^{(m)})^{p+1}]A_{i,j}(f;x,y),$$

где F-единичный оператор на $C_{2\pi,2\pi}$, а функция $A_{i,j}(f;x,y)$ определяется по формуле (11).

Теорема 3. *Пусть r—целое неотрицательное число, функция $f(x,y)\in C_{2\pi,2\pi}$ и, кроме того, все ее частные производные порядка $\leqq r$ непрерывны, а оператор $U_{n,m}$, определеный равенством (2), удовлетворяет условию (A) на $C_{2\pi,2\pi}$.*

Тогда имеет место неравенство

$$(16)\qquad \delta(U_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}}\leqq \mathcal{C}_1^{p+1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\alpha_n^{k(p-i)}\beta_m^{ki}$$

$$\times[\alpha_n^l\omega_{k-l}(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-ki+l}\partial y^{ki-l}};\alpha_n;0)+\beta_m^l\omega_{k-l}(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-ki-l}\partial y^{ki+l}};0;\beta_m)],$$

где целые числа p и l определяются из соотношений

$$(17)\qquad r=kp+l,\ 0\leqq l\leqq k-1,$$

а оператор $U_{n,m,p}$ — из (15).

Доказательство. Из (15) следуют соотношения

$$(18)\qquad \delta(U_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}}=\|(U_{n,m}-F)^{p+1}f\|_{C_{2\pi,2\pi}}$$

и

$$(19)\qquad \delta(U_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}}=\delta(U_{n,m};(U_{n,m}-F)^{p}f)_{C_{2\pi,2\pi}}.$$

На основании равенства (19), определения $\delta(\bullet;\bullet)_{C_{2\pi,2\pi}}$ и неравенства (6) находим

$$\delta(U_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}}\leqq\mathcal{C}_1[\omega_k((U_{n,m}-F)^{p}f;\alpha_n;0)+\omega_k((U_{n,m}-F)^{p}f;0;\beta_m)].$$

Используя свойства [3] частных модулей непрерывности и соотношение (18), последнему неравенству можно придать следующий вид:

$$(20)\qquad \delta(U_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}}\leqq\mathcal{C}_1[\alpha_n^k\delta(U_{n,m,p-1};\frac{\partial^k f}{\partial x^k})_{C_{2\pi,2\pi}}+\beta_m^k\delta(U_{n,m,p-1};\frac{\partial^k f}{\partial y^k})_{C_{2\pi,2\pi}}].$$

Далее, применяя неравенство (20) p раз, получаем

$$\delta(U_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}}\leqq\mathcal{C}_1^p\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\alpha_n^{k(p-i)}\beta_m^{ki}\delta(U_{n,m};\frac{\partial^{kp}f}{\partial x^{k(p-i)}\partial y^{ki}})_{C_{2\pi,2\pi}},$$

где целые числа p и l подчинены соотношениям (17).

Применяя еще раз неравенство (6) и свойства частных модулей непрерывности, из последнего неравенства получаем (16), и теорема доказана.

Эта теорема распространяет результат, содержащийся в теореме 1 работы [1], на случай функций двух переменных.

4. Так как операторы $K_{n,m}$ Фейера-Коровкина и $B_{n,m}$ Бернштейна-Рогозинского удовлетворяют условию (A) в $C_{2\pi,2\pi}$, то из теоремы 3 сразу получаются следующие результаты:

Теорема 4. *Пусть r—целое неотрицательное число, функция $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$ и, кроме того, все ее частные производные порядка $\leq r$ непрерывны, а $K_{n,m}$ — оператор Фейера-Коровкина.*

Тогда справедливо неравенство

$$\delta(K_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \mathcal{C}_1^{p+1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (n+2)^{-2(p-i)} (m+2)^{-2i}$$

$$\times [(n+2)^{-l}\, \omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-2i+l} \partial y^{2i-l}}; \frac{1}{n+2}; 0\Big)$$

$$+(m+2)^{-l}\, \omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-2i-l} \partial y^{2i+l}}; 0; \frac{1}{m+2}\Big)],$$

где целые числа p и l удовлетворяют соотношениям $r=2p+l, 0\leqq l\leqq 1$, число $\mathcal{C}_1$ оценено в (7), оператор $K_{n,m,p}$ определяется по формуле (15), в которой величины $\lambda_k^{(n)}$ следует считать заданными формулой (5).

Сразу видно, что для обобщенных сумм Фейера-Коровкина $K_{n,m,p}f$, $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$, имеет место включение $K_{n,m,p}f \in H_{n,m}^T$. Вот почему для любой функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условиям теоремы 4, справедливо неравенство

$$E_{n,m}(f)_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \delta(K_{n,m,p};f)_{C_{2\pi,2\pi}} \tag{21}$$

и, таким образом, теорема 4 является аналогом теоремы Джексона.

Пусть $\omega_k(f;\delta;\eta)$ обозначает [3] полный модуль непрерывности k-ого порядка функции $f(x, y) \in C_{2\pi,2\pi}$, а

$$\omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^\nu \partial y^\tau}; \frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\Big) = \max_i \omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-2i\pm l} \partial y^{2i\mp l}}; \frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\Big), \tag{22}$$

где $\nu+\tau=r$.

На основании теоремы 4, неравенства (21) и равенства (22) при $m=n$ приходим к утверждению

Следствие 6. *Если r обозначает целое неотрицательное число, а функция $f(x, y)$ $(\in C_{2\pi,2\pi})$ и все ее частные производные порядка $\leq r$ непрерывны, то справедливо неравенство*

$$E_{n,n}(f)_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \frac{(2\mathcal{C}_1)^{p+1}}{(n+2)^r}\, \omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^\nu \partial y^\tau}; \frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\Big), \tag{23}$$

где $\nu+\tau=r$, $r=2p+l$, $0\leqq l\leqq 1$, а постоянная $\mathcal{C}_1$ оценивается в (7).

Полиномы (из $H_{n,m}^T$)

$$B_{n,m,p}(f;x,y) \equiv B_{n,m,p}f \tag{24}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} [1-(1 \cos\frac{i\pi}{2n+1} \cos\frac{j\pi}{2m+1})^{p+1}] A_{i,j}(f;x,y),$$

где $n, m, p=0, 1, 2, 3, \ldots$, а $A_{i,j}(f; x, y)$ определяется формулой (11), будем называть обобщенными суммами Бернштейна-Рогозинского для функций двух переменных. Очевидно, что $B_{n,m,0}f=B_{n,m}f$. Кроме того, $B_{n,m,p}f$ является частным случаем $U_{n,m,p}f$. Следовательно, в силу следствия 5, можно высказать следующее утверждение:

Теорема 5. *Если r — целое неотрицательное число, а функция $f(x, y)(\in C_{2\pi,2\pi})$ и все ее частные производные порядка $\leqq r$ непрерывны, то*

$$\delta(B_{n,m,p}; f)_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq \pi^r \,\bar{C}_1^{p+1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (2n+1)^{-2(p-i)} (2m+1)^{-2i}$$

$$\times\Big[(2n+1)^{-l}\omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{\nu}\partial y^{\tau}}; \frac{\pi}{2n+1}; 0\Big)+(2m+1)^{-l}\omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\tau_1}}; 0; \frac{\pi}{2m+1}\Big)\Big],$$

где $r=2p+l$, $0\leqq l\leqq 1$, $\nu=r-2i+l$, $\tau=2i-l$, $\nu_1=r-2i-l$, $\tau_1=2i+l$, а постоянная $\bar{C}_1$ оценивается в следствии 5.

В частном случае $m=n$, обозначая через

$$\omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{\nu}\partial y^{\tau}}; \frac{\pi}{2n+1}; \frac{\pi}{2n+1}\Big)$$

наибольший из полных модулей непрерывности порядка $(2-l)$ для частных производных r-ого порядка функции $f(x, y)$, на основании теоремы 5, для обобщенных сумм Бернштейна-Рогозинского (24) следует оценка

$$\| B_{n,m,p}f-f \|_{C_{2\pi,2\pi}} \leqq (2\bar{C}_1)^{p+1}\Big(\frac{\pi}{2n+1}\Big)^r \omega_{2-l}\Big(\frac{\partial^r f}{\partial x^{\nu}\partial y^{\tau}}; \frac{\pi}{2n+1}; \frac{\pi}{2n+1}\Big).$$

Здесь $r=2p+l$, $0\leqq l\leqq 1$, $\nu+\tau=r$, а функция $f(x, y)$ и число r удовлетворяют условиям теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Хр. Киров. Квадратурни формули за сингулярни интеграли, построени с помощта на обобщените суми на Берні цайн-Рогозински. *Годишник ВТУЗ, Математика*, **9**, 1972, кн. 2, 93—102.
2. Э. Н. Морозов. О сходимости последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных 2π-периодических функций двух переменных. *Уч. зап. Калининского гос. пединститута*, **26**, 1958, 129—142.
3. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
4. P. L. Butzer, R. I. Nessel. Fourier Annalysis and Approximation. Basel-Stuttgart, 1971.
5. Г. Хр., Киров, Г. Ст. Трендафилов. Квадратурни формули за сингулярни интеграли. Сб. „Математика и математическо образование" Доклади на Втора пролетна конференция на БМД — Видин, 1973. София, 1974.
6. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва — Ленинград, 1949.

Высший институт машиностроения, механизации и электрификации сельского хозяйства Русе

Поступила 3. 3. 1975