Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЗАВИСИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ И КОГОМОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА КАТЕГОРИИ ПОЛИЭДРОВ И ИХ СОБСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

СТАНИСЛАВА В. ПЕТКОВА

Е. Г. Скляренко (1970) и Ст. В. Петкова (1971) дали системы условий, определяющие, вместе с обычными аксиомами Стинрода и Эйленберга, канонические гомологии (когомологии) однозначно (с точностью до естественного преобразования) в категории локально конечных счетных полиэдров и их собственных отображений. Отсюда получается эквивалентность этих систем условий.

В предлагаемой работе дается непосредственное доказательство эквивалентности вышеупомянутых условий, показываются другие эквивалентные им формы, исследуется зависимость некоторых их обобщений.

Пусть $\mathcal{A}$ — категория локально конечных счетных полиэдров и их собственных отображений, а H_* — произвольная теория гомологий в $\mathcal{A}$.

В работе [2] Е. Г. Скляренко доказано, что обычные аксиомы Стинрода и Эйленберга вместе с следующими тремя требованиями определяют однозначно (с точностью до естественного преобразования) H_* в категории $\mathcal{A}$:

1) Для каждой пары $(P, Q) \in \mathcal{A}$, $H_*(P, Q) = H_*(P \setminus Q)$.

2) Если P_i, $i = 1, 2, 3 \ldots$ — последовательность вложенных друг в друга подполиэдров полиэдра $P \in \mathcal{A}$ с пустым пересечением и с компактными замыканиями дополнений $P \setminus P_i$ в P, то для всех $n \geqq 0$, $\varprojlim_i H_n(P_i) = 0$. В работе [2] это утверждение обозначено как аксиома 9.

3) Нульмерные гомологии счетного дискретного множества точек $\mathfrak{D}$ естественно изоморфны прямому произведению нульмерных гомологий точки. Группа $H_n(\mathfrak{D}) = 0$ при $n \neq 0$.

В работе [3] показано, что теория гомологий H_* в $\mathcal{A}$ определяется однозначно и прибавлением к списку аксиом Стинрода и Эйленберга лишь условия Π-аддитивности. Напомним его:

Пусть X — объединение своих непересекающихся подпространств X_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, а $j_k : X \to (X, \cup_{s \neq k} X_s)$ и $i_k : X_k \to (X, \cup_{s \neq k} X_s)$ — вложения (очевидно i_{k*} — изоморфизм). Тогда, по условию Π-аддитивности, гомоморфизм $g = (g_k)_{k=1}^{\infty}$, где $g_k = i_{k*}^{-1} j_{k*} : H_n(X) \to H_n(X_k)$ определяет проективное представление модуля $H_n(X)$ в виде прямого произведения модулей $H_n(X_k)$ для каждого целого $n \geqq 0$.

В условии 3) требуется Π-аддитивность только для пространств, являющихся дискретным объединением счетного числа точек. Будем обозначать его через π.

Заметим, что единственная теория гомологий, удовлетворяющая перечисленным выше дополнительным требованиям — это теория канонических гомологий (гомологии II рода) в $\mathcal{A}$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 210—218.

Таким образом условия 1), 2), 3), с одной стороны, и Π-аддитивности, с другой — эквивалентны.

Цель настоящей работы непосредственно исследовать связь этих утверждений (или некоторых их обобщений) и показать другие эквивалентные им формы.

Покажем сначала, что если H_* — Π-аддитивная теория гомологий, то $H_*(P, Q) = H_*(P \setminus Q)$ для каждой пары $(P, Q) \in \mathcal{A}$.

Начнем со следующей леммы. Пусть R^n_+ замкнутое n-мерное полупространство эвклидового пространства R^n.

Лемма 1. *Если H_* — Π-аддитивная теория гомологий в $\mathcal{A}$, то для каждого k, $k = 0, 1, 2, \ldots, H_k(R^n_+) = 0$. (В размерности нуль имеются в виду приведенные гомологии.)*

Доказательство. Будем считать, что в R^n кординатная система выбрана так, что R^n_+ совпадает с полупространством $x_1 \geqq 0$. Разделяем R^n_+ на замкнутые полосы при помощи счетного числа $n-1$-мерных гиперплоскостей R^{n-1}_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, проходящих соответственно через точки $(i, 0, 0, \ldots, 0)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и параллельных гиперплоскости $x_1 = 0$. Полосу между R^{n-1}_{i-1} и R^{n-1}_i обозначим через Q^n_i. Очевидно, проекция $q_i : Q^n_i \to R^{n-1}_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, параллельная оси $\{x_2 = 0, x_3 = 0, \ldots, x_n = 0\}$ — собственное отображение. Ее ограничение $p_i = q_i / R^{n-1}_i : R^{n-1}_i \to R^{n-1}_{i-1}$ — гомеоморфизм. Обозначим через K_1 объединение $\cup_{i=1}^{\infty} Q^n_{2i}$, а через K_2 — $\cup_{i=0}^{\infty} Q^n_{2i+1}$. Рассмотрим собственную триаду (R^n_+, K_1, K_2) (в категории $\mathcal{A}$ для каждой теории гомологий все триады собственные). В силу Π-аддитивности и стягивания каждого Q^n_i в R^{n-1}_{i-1} аддиционная последовательность триады (R^n_+, K_1, K_2) имеет вид

$$\cdots \to \prod_{i=1}^{\infty} H_k(R^{n-1}_i) \xrightarrow{\varphi_k} \prod_{i=0}^{\infty} H_k(R^{n-1}_i) \to H_k(R^n_+) \to \prod_{i=1}^{\infty} H_{k-1}(R^{n-1}_i) \to \cdots,$$

где $\varphi_k(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (p_{1*}h_1, h_1 - p_{2*}h_2, h_2 - p_{3*}h_3, \ldots)$. Но гомеоморфизмы p_i индуцируют изоморфизм p_{i*} соответствующих групп гомологий. Легко проверить, что тогда и φ_k — изоморфизм. Из точной последовательности получаем, что $H_k(R^n_+) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Из доказанной леммы сразу вытекает

Следствие 1. *Если H_* — Π-аддитивная теория гомологий, σ^n — n-мерный симплекс, а $\dot\sigma^n$ — его граница, то $H_k(\sigma^n, \dot\sigma^n) = H_k(\sigma^n \setminus \dot\sigma^n)$.*

Действительно, если заменим $\sigma^n \setminus \dot\sigma^n$ на R^n, а пару $(\sigma^n, \dot\sigma^n)$ — на (E^n, S^{n-1}), где E^n — n-мерный замкнутый шар, а S^{n-1} — его граница, нужно показать, что $H_k(R^n) = H_k(E^n, S^{n-1})$. Разбиваем R^n на его подпространства $R^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, x_1 \geqq 0\}$ и $R^n_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, x_1 \leqq 0\}$. Из аддиционной последовательности триады (R^n, R^n_+, R^n_-) и леммы 1 получаем, что $H_k(R^n) = H_{k-1}(R^{n-1})$. Следовательно, $H_k(R^n) = H_{k-1}(R^{n-1}) = \cdots = H_{k-n}(R^0)$. Аналогичным образом можно показать, что $H_k(E^n, S^{n-1}) = H_{k-1}(E^{n-1}, S^{n-2}) = \cdots = H_{k-n}(E^0)$, что позволяет построить естественный изоморфизм групп $H_k(\sigma^n, \dot\sigma^n)$ и $H_k(\sigma^n \setminus \dot\sigma^n)$.

В связи с доказанной леммой сделаем еще одно замечание. Пусть σ^n — n-мерный симплекс, а σ^s — его подсимплекс, $0 \leqq s \leqq n-1$. Стягивая σ^s в некоторую его вершину a, пространство $\sigma^n \setminus \sigma^s$ можно заменить на гомотопически эквивалентное ему пространство $\sigma^n \setminus a$. Но $\sigma^n \setminus a$ гомотопически эквивалентно пространству R^1_+, а по лемме 1, $H_k(R^1_+)=0$, $k \geqq 0$. (Рассматриваемые гомотопии состоят из собственных отображений.) Отметив еще, что в случае $n=1$ лемму 1 можно доказать для π-аддитивных теорий гомологий получаем

Следствие 2. *Если H_* — π-аддитивная теория гомологий, σ^n — n-мерный симплекс, а σ^s — его подсимплекс, $0 \leqq s \leqq n-1$, то $H_k(\sigma^n \setminus \sigma^s)=0$ для каждого $k=0, 1, 2, \ldots$ (при $k=0$ — приведенные гомологии).*

Предложение 1. *Для π-аддитивных теорий гомологий H_*, $H_k(\sigma^n, \dot{\sigma}^n)=H_k(\sigma^n \setminus \sigma^s, \dot{\sigma}^n \setminus \sigma^s)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n=1, 2, 3, \ldots, s \leqq n$.*

Доказательство. Из-за эквивалентности пары $(\sigma^n \setminus \sigma^s, \dot{\sigma}^n \setminus \sigma^s)$ паре $(\sigma^n \setminus a, \dot{\sigma}^n \setminus a)$, можем считать, что $s=0$ (a — вершира σ^s). Обозначим через σ^{n-1} для $n \geqq 2$ такую грань симплекса σ^n, которая содержит вершину a. Если $n=1$, σ^0 — вершина симплекса σ^1, не совпадающая с a. Построим изоморфизм групп $H_k(\sigma^n \setminus a, \dot{\sigma}^n \setminus a)$ и $H_{k-1}(\sigma^{n-1} \setminus a, \dot{\sigma}^{n-1} \setminus a)$ аналогично построению изоморфизма инцидентности групп $H_k(\sigma^n, \dot{\sigma}^n)$ и $H_{k-1}(\sigma^{n-1}, \dot{\sigma}^{n-1})$. Для этой цели обозначим через c^{n-1} объединение всех $n-1$-мерных замкнутых граней σ^n без σ^{n-1}. Рассмотрим последовательность триады $(\sigma^n \setminus a, \sigma^{n-1} \setminus a, c^{n-1} \setminus a)$

$$\cdots \to H_k(\sigma^n \setminus a, c^{n-1} \setminus a) \to H_k(\sigma^n \setminus a, \dot{\sigma}^n \setminus a)$$

$$\xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\sigma^{n-1} \setminus a, \dot{\sigma}^{n-1} \setminus a) \to \cdots$$

При $n \geqq 2$ пространство $\sigma^n \setminus a$ стягивается в $c^{n-1} \setminus a$, следовательно, $H_k(\sigma^n \setminus a, c^{n-1} \setminus a)=0$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Если $n=1$, пара $(\sigma^1 \setminus a, c^0 \setminus a)$ совпадает с $(R^1_+, \varnothing)$ и опять $H_k(\sigma^n \setminus a, c^{n-1} \setminus a)=0$ (как было отмечено выше, для π-аддитивных теорий гомологий $H_k(R^1_+)=0$). Тогда ∂ — изоморфизм. Продолжая таким образом получим, что каждую из групп $H_k(\sigma^n \setminus a, \dot{\sigma}^n \setminus a)$ и $H_k(\sigma^n, \dot{\sigma}^n)$ одним и тем же способом можно заменить на группу гомологий вершины σ^0, что дает возможность построить естественный изморфизм этих групп.

Докажем теперь

Предложение 2. *Если H_* — Π-аддитивная теория гомологий, то для каждой пары $(P, Q) \in \mathcal{A}$ и для каждого целого $k=0, 1, 2, \ldots$, $H_k(P^n \setminus Q^n, P^{n-1} \setminus Q^{n-1})=H_k(P^n, P^{n-1} \cup Q^n)$ (P^n — n-мерный остов полиэдра P).*

Доказательство. Для простоты будем считать, что симплексы из P пересекаются с Q не больше, чем по одному симплексу. (Вообще при доказательстве равенства $H_*(P, Q)=H_*(P \setminus Q)$ мы можем перейти к барицентрическому разбиению полиэдра P и тогда упомянутое условие будет выполнено.) В общем случае рассуждения аналогичные. Пусть $\cup_{i=1}^{\infty} \sigma_i^n$ — объединение тех n-мерных замкнутых симплексов из P, которые не принадлежат Q. Для каждого σ_i^n, $i=1, 2, 3, \ldots$ обозначим через τ_i^n симплекс, лежащий во внутренности σ_i^n, грани которого параллельны граням σ_i^n, а через $\sigma_i^{s_i}$ — пересечение $\sigma_i^n \cap Q$. Если $\sigma_i^{s_i} \neq \varnothing$, деформируем τ_i^n так, чтобы его подсимплекс $\tau_i^{s_i}$, соответствующий подсимплексу $\sigma_i^{s_i}$ в σ_i^n, совпал с $\sigma_i^{s_i}$, а все остальные точки τ_i^n остались во внутренности σ_i^n. Деформированний симплекс обозначим через $\bar{\tau}_i^n$ (если $\sigma_i^{s_i}=\varnothing$, то $\bar{\tau}_i^n=\tau_i^n$). По обычному вырезанию

$$H_k(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})=H_k(\cup_{i=1}^{\infty}(\sigma_i^n\setminus\sigma_i^{s_i}),\quad \cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\sigma}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i})).$$

Рассмотрим теперь пространство $\cup_{i=1}^{\infty}(\sigma_i^n\setminus\sigma_i^{s_i})$. Замыкание $\cup_{i=1}^{\infty}(\sigma_i^n\setminus\bar{\tau}_i^n)$ в нем определяет замкнутую окрестность F его подпространства $\cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\sigma}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i})$. Очевидно, F стягивается в $\cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\sigma}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i})$ посредством собственной деформации. Вырезая из F открытую (в рассматриваемом пространстве) окрестность $\cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\sigma}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i})$, лежащую в F вместе со своим замыканием, получаем, что группа $H_k(\cup_{i=1}^{\infty}(\sigma_i^n\setminus\sigma_i^{s_i}),\ \cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\sigma}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i}))$ равна группе $H_k(\cup_{i=1}^{\infty}(\bar{\tau}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i}),\ \cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\bar{\tau}}_i^n\setminus\sigma_i^{s_i}))$ или все равно группе $H_k(\cup_{i=1}^{\infty}(\tau_i^n\setminus\tau_i^{s_i}),\ \cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\tau}_i^n\setminus\tau_i^{s_i}))$, где τ_i^n расположены дискретно. Но тогда группа $H_k(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})$ равна группе $\Pi_{i=1}^{\infty}H_k(\tau_i^n\setminus\tau_i^{s_i},\ \dot{\tau}_i^n\setminus\tau_i^{s_i})$, а на основании предложения 1 — группе $\Pi_{i=1}^{\infty}H_k(\tau_i^n,\ \dot{\tau}_i^n)$. Аналогичным образом показывается, что и $H_k(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)=\Pi_{i=1}^{\infty}H_k(\tau_i^n,\ \dot{\tau}_i^n)$, т. е. $H_k(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)=H_k(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})$. Установленный изоморфизм согласуется с дифференциалами $\delta_n: H_n(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)\to H_{n-1}(P^{n-1},\ P^{n-2}\cup Q^{n-1})$ и с $\Delta_n: H_n(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})\to H_{n-1}(P^{n-1}\setminus Q^{n-1},\ P^{n-2}\setminus Q^{n-2})$ точных последовательностей триад $(P^n\cup Q,\ P^{n-1}\cup Q,\ P^{n-2}\cup Q)$ и $(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1},\ P^{n-2}\setminus Q^{n-2})$ (при замене группы $H_n(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)$ на группу $\Pi_{i=1}^{\infty}H_n(\tau_i^n,\ \dot{\tau}_i^n)$ дифференциал δ_n заменяется на $\delta_n=(\delta_k^n)_{k=1}^{\infty}$, где $\delta_k^n: H_n(\tau_k^n,\ \dot{\tau}_k^n)\to H_{n-1}(\cup_j\tau_{k_j}^{n-1}\cup_j\dot{\tau}_{k_j}^{n-1})$, а $\tau_{k_j}^{n-1}$ — симплексы, соответствующие граням симплекса σ_k^n, во внутренности которого лежит τ_k^n). Аналогичное замечание относится и к дифференциалу Δ_n. Этим предложение 2 доказано.

Замечание 1. Если каждый симплекс из P пересекается с Q не больше, чем по одному симплексу, то равенство $H_k(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})=H_k(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)$ выполнено и для π-аддитивных теорий гомологий. Действительно, тогда группы $H_k(\cup_{i=1}^{\infty}(\tau_i^n\setminus\tau_i^{s_i}),\ \cup_{i=1}^{\infty}(\dot{\tau}_i^n\setminus\tau_i^{s_i}))$ и $H_k(\cup_{i=1}^{\infty}\tau_i^n,\ \cup_{i=1}^{\infty}\dot{\tau}_i^n)$ изоморфны (стандартным образом) группе $H_{k-n}(\cup_{i=1}^{\infty}\tau_i^0)$, где τ_1^0 — вершина τ_i^n (пользуемся тем фактом, что τ_i^n расположены дискретно, и, что группы гомологий дискретного объединения лучей для π-аддитивных теорий гомологий — нулевые).

Замечение 2. Для Π-аддитивных теорий гомологий $H_k(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)=H_k(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})=0$ при $k\neq n$, $H_n(P^n,\ P^{n-1}\cup Q^n)=H_n(P^n\setminus Q^n,\ P^{n-1}\setminus Q^{n-1})=\Pi_{i=1}^{\infty}G$, где G — группа коэффициентов теории.

Предложение 3. *Если H_* — Π-аддитивная теория гомологий, а $(P,\ Q)\in\mathcal{A}$, то гомоморфизм $i_{*n}: H_n(P^k,\ Q^k)\to H_n(P,\ Q)$ индуцированный вложением $i:(P^k,\ Q^k)\to(P,\ Q)$ — изоморфизм при $k\geq n+1$ и эпиморфизм при $k=n$.*

Доказательство предложения 3 дано в работе [3].

Предложение 4. *Если H_* — π-аддитивная теория гомологий, $(P,\ Q)\in\mathcal{A}$ и $\dim P<k$, то $H_k(P,\ Q)=0$.*

Действительно, пусть $\dim P = s < k$. Тогда пару (P, Q) можем заменить парой (P^s, Q^s). Из-за π-аддитивности, $H_k(P^s, P^{s-1} \cup Q^s) = 0$ при $k \neq s$ Поэтому, из точной последовательности триады (P^s, P^{s-1}, Q^s) получаем что $H_k(P^s, Q^s) = H_k(P^{s-1}, Q^{s-1})$. Итак, $H_k(P^s, Q^s) = H_k(P^{s-1}, Q^{s-1}) = \cdots = H_k(P^0, Q^0)$, где P^0 — дискретное объединение точек. Но тогда $H_k(P^0, Q^0) = 0$ при $k \neq 0$, следовательно, и $H_k(P, Q) = 0$.

Предположим опять, что каждый симплекс из P пересекается с Q не больше, чем по одному симплексу. Фиксируем следующее разбиение полиэдра $P \setminus Q$ на симплексы. Все замкнутые симплексы из P, которые не пересекаются с Q, будем считать симплексами $P \setminus Q$. Если $\sigma^n \in P$ пересекается с Q по подсимплексу σ^s, $0 \leq s \leq n-1$, σ^n разбиваем на счетное число n-мерных топологических симплексов полиэдра $P \setminus Q$ так. Берем трубчатую окрестность σ^s в σ^n. Гиперплоскость, ограничивающая эту окрестность делит σ^n на две части — одна из них, не содержащая σ^s, является топологическим n-мерным симплексом, другая разделяется на счетное число таких симплексов при помощи гиперплоскостей, параллельных вышеупомянутой гиперплоскости. Эти разбиение можно согласовать со всеми симплексами P.

П р е д л о ж е н и е 5. *Если H_* — П-аддитивная теория гомологий, а $(P, Q) \in \mathcal{A}$, то $H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1}) = H_n(P \setminus Q)^{n+1}$ (имеется в виду фиксированное разбиение $P \setminus Q$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1}) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_n(P \setminus Q)^{n+1} \\ \downarrow i_{1*} & & \downarrow i_{2*} \\ H_n(P^{n+2} \setminus Q^{n+2}) & \xrightarrow{j_{2*}} & H_n(P \setminus Q)^{n+2}, \end{array}$$

где $i_{1*}, i_{2*}, j_{1*}, j_{2*}$ — гомоморфизмы, индуцированные вложениями. По предложению 3, i_{2*} — изоморфизм. Гомоморфизм i_{1*} тоже изоморфизм. Действительно, в точной последовательности пары $(P^{n+2} \setminus Q^{n+2}, P^{n+1} \setminus Q^{n+1})$ группы $H_{n+1}(P^{n+2} \setminus Q^{n+2}, P^{n+1} \setminus Q^{n+1})$ и $H_n(P^{n+2} \setminus Q^{n+2}, P^{n+1} \setminus Q^{n+1})$ нулевые. Покажем, что и j_{2*} — изоморфизм. Заметим, что $(P \setminus Q)^n = P^n \setminus Q^n \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i^n$, где симплексы σ_i^n, $i = 1, 2, 3, \ldots$ получены при разбиении тех $n+1$-мерных симплексов полиэдра P, которые пересекаются с Q. Но тогда $H_k((P \setminus Q)^n, P^n \setminus Q^n) = H_k(\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i^n, \bigcup_{i=1}^{\infty} \dot{\sigma}_i^n)$. Следовательно, при $k \neq n$ $H_k((P \setminus Q)^n, P^n \setminus Q^n) = 0$. Таким образом, в последовательности пары $((P \setminus Q)^{n+2}, P^{n+2} \setminus Q^{n+2})$ группа $H_{n+1}((P \setminus Q)^{n+2}, P^{n+2} \setminus Q^{n+2})$ и $H_n((P \setminus Q)^{n+2}, P^{n+2} \setminus Q^{n+2})$ — нулевые. Поэтому j_{2*} — изоморфизм. Тогда, из написанной диаграммы следует, что и j_{1*} — изоморфизм. Предложение 5 доказано.

П р е д л о ж е н и е 6. *Если H_* — П-аддитивная теория гомологий, а $(P, Q) \in \mathcal{A}$, то $H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1}) = H_n(P^{n+1}, Q^{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По известной схеме $H_n(P^{n+1}, Q^{n+1}) = \operatorname{Ker} \delta_n / \operatorname{Im} \delta_{n+1}$, где $\delta_n : H_n(P^n, P^{n-1} \cup Q^n) \to H_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2} \cup Q^{n-1})$. Аналогично $H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1}) = \operatorname{Ker} \Delta_n / \operatorname{Im} \Delta_{n+1}$, где $\Delta_n : H_n(P^n \setminus Q^n, P^{n-1} \setminus Q^{n-1}) \to H_{n-1}(P^{n-1} \setminus Q^{n-1}, P^{n-2} \setminus Q^{n-2})$ (замечание 2, предложение 4). Но мы доказали, что группы $H_n(P^n, P^{n-1} \cup Q^n)$ и $H_n(P^n \setminus Q^n, P^{n-1} \setminus Q^{n-1})$ естественно изоморфны между собой (предложение 2) и изоморфизм этот согласуется с дифференциалами δ_n и Δ_n. Отсюда $H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1}) = H_n(P^{n+1}, Q^{n+1})$. Наконец заметим, что предложение 6 выполнено и для π-аддитивных теорий гомологий в случае, когда симплексы из P пересекаются с Q не больше, чем по одному симплексу.

На основании доказаных предложений получаем

Утверждение 1. *Для Π-аддитивных теорий гомологий,* $H_n(P, Q) = H_n(P \setminus Q)$, $(P, Q) \in \mathcal{A}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. По предложению 3, $H_n(P, Q) = H_n(P^{n+1}, Q^{n+1})$ и $H_n(P \setminus Q) = H_n(P \setminus Q)^{n+1}$. Но $H_n(P \setminus Q)^{n+1} = H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1})$ (предложение 5), а $H_n(P^{n+1} \setminus Q^{n+1}) = H_n(P^{n+1}, Q^{n+1})$ (предложение 6). Следовательно, $H_n(P, Q) = H_n(P \setminus Q)$.

Итак, мы показали, что из условия Π-аддитивности следует вырезание $H_n(P, Q) = H_n(P \setminus Q)$. Очевидно, что каждая Π-аддитивная теория гомологий удовлетворяет и условию π-аддитивности. Остается показать, что Π-аддитивные теории гомологий удовлетворяют и аксиому 9 из [2]. Мы покажем, что из Π-аддитивности следует одно обобщение аксиомы 9. Сформумируем его.

Условие C. *Пусть* $\{(P_i, Q_i), f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — *обратный спектр в* $\mathcal{A}$ *с* $\varprojlim_i P_i = \varnothing$. *Тогда* $\varprojlim_i H_n(P_i, Q_i) = 0$ *для* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Утверждение 2. *Если* H_* — *Π-аддитивная теория гомологий, то она удовлетворяет условию C.*

Доказательство. Дополняем обратный спектр $\{(P_i, Q_i), f_i\}_{i=1}^{\infty}$ парой (P_0, Q_0), где $P_0 = Q_0 = [0, +\infty)$, и собственным отображением $f_0 : (P_1, Q_1) \to (P_0, Q_0)$. (Если P_1 — компактно, для P_0 и Q_0 берем одноточечные пространства). Обозначим через (K, L) пару фундаментальных комплексов [4], [5], построенных при помощи обратного спектра $\{(P_i, Q_i), f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Из-за $\varprojlim_i P_i = \varnothing$, (K, L) стягивается в (P_0, Q_0) посредством собственного отображения. Следовательно, $H_n(K, L) = 0$ (если $Q_i = \varnothing$, $i = 1, 2, 3 \ldots$, то опять $H_n(K) = 0$, так как K стягивается в луч или точку, а группы гомологий этих пространств нулевые). Пусть M_i цилиндр отображения f_i, а M_i' — отображения f_i / Q_i. Очевидно, пара (M_i, M_i') стягивается в (P_i, Q_i). Пусть $K_1 = \cup_{i=1}^{\infty} M_{2i+1}$, $K_2 = \cup_{i=0}^{\infty} M_i$. Тогда, из-за Π-аддитивности, аддиционная последовательность $(K, L;\ K_1, K_2)$ имеет вид

$$\cdots \to \Pi_{i=1}^{\infty} H_n(P_i, Q_i) \xrightarrow{\varphi_n} \Pi_{i=1}^{\infty} H_n(P_i, Q_i) \to H_n(K, L) \to \Pi_{i=1}^{\infty} H_{n-1}(P_i\ Q_i) \to \cdots,$$

где $\varphi_n(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (h_1 - f_{1*}h_2,\ h_2 - f_{2*}h_3,\ h_3 - f_{3*}h_4, \ldots)$. Но $H_n(K, L) = 0$ следовательно, φ_n — изоморфизм. Остается отметить, что $\varprojlim_i H_n(P_i, Q_i) = \operatorname{Ker} \varphi_n$. Поэтому $\varprojlim_i H_n(P_i, Q_i) = 0$.

Следствие 2. *Из Π-аддитивности следует аксиома 9 из* [2].

Мы изложили непосредственное доказательство того факта, что из условия Π-аддитивности следуют перечисленные в начале работы условия 1), 2), 3).

Теперь рассмотрим обратный вопрос. Заметим сначала, что только из условий 1) и 2) не следует Π-аддитивности, как видно на примере гомологий Бореля-Мура [6], когда группа коэффициентов этих гомологий имеет бесконечное число образующих.

Докажем

Предложение 7. *Если* H_* *удовлетворяет условию C, то* $H_p(P, P^q) = 0$ *при* $p \leq q$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 из [2]. Для полиэдра P строится последовательность подполиэдров $P=P_1\supset P_2\supset P_3\supset\ldots$, таких, что $\cap_{i=1}^{\infty}P_i=\varnothing$ и замыкание $P\setminus P_k$ в P компактно в P, $k=2, 3, 4,\ldots$ Из точной последовательности триады (P_k, P_{k+1}, P_k^q) получается, что вложение $i_k:(P_{k+1}, P_{k+1}^q)\to(P_k, P_k^q)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий при $p<q$ и эпиморфизм при $p\leq q$. Это, вместе с условием C, дает, что $H_p(P, P^q)=0$ при $p\leq q$.

Пусть теперь $P\in\mathcal{A}$ и $P=\cup_{i=1}^{\infty}P_i$, где P_i — его подполиэдры, расположены дискретно.

Предложение 8. *Если H_* — π-аддитивная теория гомологий, то* $H_k(P^n, P^{n-1})=\Pi_{i=1}^{\infty}H_k(P_i^n, P_i^{n-1})$, $k=0, 1, 2,\ldots,$ $n=0, 1, 2,\ldots$

Доказательство стандартно.

При том же условии для P верно

Предложение 9. *Если H_* — π-аддитивна, то* $H_n(\cup_{i=1}^{\infty}P_i^n)=\Pi_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^n)$, $n=0, 1, 2,\ldots$

Доказательство проведем по индукции относительно n. Если $n=0$, то из π-аддитивности следует, что $H_0(\cup_{i=1}^{\infty}P_i^0)=\Pi_{i=1}^{\infty}H_0(P_i^0)$. Предположим, что $H_n(\cup_{i=1}^{\infty}P_i^n)=\Pi_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^n)$. Рассмотрим гомоморфизм g (из определения Π-аддитивности) точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccc}
0\to H_{n+1}(P^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(P^{n+1}, P^n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(P^n) \\
\downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_{n+1}^n & & \downarrow g_n \\
0\to \Pi_{i=1}^{\infty}H_{n+1}(P_i^{n+1}) & \xrightarrow{\{j_{i*}\}} & \Pi_{i=1}^{\infty}H_{n+1}(P_i^{n+1}, P_i^n) & \xrightarrow{\{\partial_i\}} & \Pi_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^n).
\end{array}$$

В написанной диаграмме g_{n+1}^n — изоморфизм по предложению 8, а g_n — по предположению (j_* и j_{i*}—мономорфизмы по предложению 4). Тогда и g_{n+1} изоморфизм. Следовательно, $H_n(\cup_{i=1}^{\infty}P_i^n)=\Pi_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^n)$ для $n=0, 1, 2\ldots$

Предложение 10. *Если H_* — π-аддитивная теория гомологий, то* $H_n(\cup_{i=1}^{\infty}P_i^{n+1})=\Pi_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^{n+1})$, $n=0, 1, 2,\ldots$

Действительно, рассмотрим диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to H_{n+1}(P^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(P^{n+1}, P^n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(P^n) & \xrightarrow{P_*} & H_n(P^{n+1})\to 0 \\
\downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_{n+1}^n & & \downarrow g_n & & \downarrow g \\
0\to \coprod_{i=1}^{\infty}H_{n+1}(P_i^{n+1}) & \xrightarrow{\{j_{i*}\}} & \coprod_{i=1}^{\infty}H_{n+1}(P_i^{n+1}, P_i^n) & \xrightarrow{\{\partial_i\}} & \coprod_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^n) & \xrightarrow{\{P_{i*}\}} & \coprod_{i=1}^{\infty}H_n(P_i^{n+1})\to 0.
\end{array}$$

В ней все вертикальные гомоморфизмы, кроме g — изоморфизмы (предложения 8, 9). Тогда и g — изоморфизм. Предложение 10 доказано.

Утверждение 3. *Если H_* удовлетворяет условиям π и C, то H_* — Π-аддитивна.*

Доказательство. Из-за предложения 7 группу $H_n(\cup_{i=1}^{\infty}P_i)$ можно заменить на $H_n(\cup_{i=1}^{\infty}P_i^{n+1})$, а группу $H_n(P_i)$ — на $H_n(P_i^n)$. Утверждение 3 тогда, следует из предложения 10.

Имея в виду леммы 4 из [2] таким же образом, как утверждение 3, можно доказать.

Утверждение 4. *Из условий* 1), 2), 3) *следует условие Π-аддитивности.*

Замечание 3. Пусть H_* удовлетворяет только аксиому 9 из [2] (без условия π-аддитивности). Тогда для нее можно доказать следующее предложение: если P — объединение дискретно расположенных компактных полиэдров P_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, то $g: H_n(P) \to \Pi_{i=1}^{\infty} H_n(P_i)$ — мономорфизм. (Доказательство аналогично доказательству замечания 4 из [2]).

Обозначим через D условие: Вложение $i_k: (P^k, Q^k) \to (P, Q)$ индуцирует изоморфизм групп гоммологий $i_{k*}: H_n(P^k, Q_k) \to H_n(P, Q)$ при $n < k$.

В ходе сделанных выше доказательств видно, что верно

Утверждение 5. *Условие Π-аддитивность эквивалентно системе $\{\pi, D\}$.*

Действительно, Π-аддитивность $\Longrightarrow \{\pi, D\}$ (предложение 3). Покажем, что и $\{\pi, D\} \Longrightarrow$ Π-аддитивность. По предложению 10, если $P = \cup_{i=1}^{\infty} P_i$, где P_i — расположены дискретно, то $H_n(\cup_{i=1}^{\infty} P_i^{n+1}) = \Pi_{i+1}^{\infty} H_n(P_i^{n+1})$. Но по условию D, $H_n(\cup_{i=1}^{\infty} P_i) = H_n(\cup_{i=1}^{\infty} P_i^{n+1})$, $H_n(P_i) = H_n(P_i^{n+1})$. Следовательно, $H_n(\cup_{i=1}^{\infty} P_i) = \Pi_{i=1}^{\infty} H_n(P_i)$. Утверждение 5 доказано.

Наконец сформулируем еще одно условие.

Условие M: Если $\{(P_i, Q_i), f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — обратный спектр из $\mathcal{A}$ и $(P, Q) = \varprojlim_i (P_i, Q_i) \in \mathcal{A}$, то естественное отображение $H_n(P, Q) \to \varprojlim_i H_n(P_i, Q_i)$ — эпиморфизм.

Утверждение 6. *Система $\{\pi, M\}$ эквивалентна условию Π-аддитивности.*

Доказательство. Покажем сначала, что из Π-аддитивности вытекает $\{\pi, M\}$. В доказательстве нуждается импликация Π-аддитивность $\Longrightarrow M$. Итак, пусть $\{P_i, Q_i), f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — обратный спектр из A. Дополняем его парой (P_0, Q_0) (как в утверждении 2) и собственным отображением f_0: $(P_1, Q_1) \to (P_0, Q_0)$. Обозначаем через (K, L) пару фундаментальных комплексов (P, Q), построенных при помощи обратного спектра $\{(P_i, Q_i), f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Потом (K, L) дополняем, известным образом [4], соответственно пространствами P и Q. Дополненные пространства обозначим через $K \cup P$ и $L \cup Q$. Пара $(K \cup P, L \cup Q)$ стягивается в пару (P_0, Q_0) посредством собственного отображения. Поэтому $H_n(K \cup P, L \cup Q) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ((P_0, Q_0) выбрана так, что $H_n(P_0, Q_0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$). Но тогда из точной последовательности триады $(K \cup P, P, L \cup Q)$ получаем, что $H_n(P, Q) = H_{n+1}(K \cup P, L \cup P)$. Отметим еще, что из-за Π-аддитивности $H_{n+1}(K, L) = H_{n+1}(K \cup P, L \cup P)$ (утверждение 1). Следовательно, $H_n(P, Q) = H_{n+1}(K, L)$. Пусть теперь $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 — объединение цилиндров отображений f_i с нечетными индексами i, а K_2 — со счетными индексами. Из аддиционной последовательности $(K, L; K_1, K_2)$ получаем точную короткую последовательность

$$0 \to \Pi_{i=1}^{\infty} H_{n+1}(P_i, Q_i)/\operatorname{Im} d_{n+1} \to H_n(P, Q) \to \varprojlim_i H_n(P_i, Q_i) \to 0,$$

где $d_n: \Pi_{i=1}^{\infty} H_n(P_i, Q_i) \to \Pi_{i=1}^{\infty} H_n(P_i, Q_i)$ задается формулой $d_n(h_1, h_2, h_3, \ldots) = (h_1 - f_{1*} h_2, h_2 - f_{2*} h_3, h_3 - f_{3*} h_4, \ldots)$. В частности, Π-аддитивность $\Longrightarrow M$. Отметим еще, что импликация $M \Longrightarrow C$ очевидна, а системы $\{\pi, C\}$ и Π-аддитивность — эквивалентны. Предложение 6 доказано.

На основании доказанных утверждений верна

Теорема. *В категории $\mathcal{A}$ системы условий II-аддитивность $\{\pi, C\}$, $\{1), 2), 3)\}$, $\{\pi, D\}$, $\{\pi, M\}$ — эквивалентны. Каждая из них определяет,* с *точностью до естественного преобразования, канонические гомологии (гомологии II рода) в $\mathcal{A}$.*

Наконец сделаем следующее замечание. Утверждения, аналогичные сделанным выше, можно провести и в категории $\mathcal{B}_0$ компактных метризуемых пространств и их непрерывных отображений и в категории $\mathcal{B}$ локально компактных метризуемых пространств и их собственных отображений. Но тогда к рассматриваемым системам условий следует прибавить еще требование о более сильном вырезании ([2] и [3]), поскольку в этих категориях не все триады собственны.

Заметим еще, что утверждения, аналогичные доказанным выше утверждениям, можно доказать и для когомологий в $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. Москва, 1958.
2. Е. Г. Скляренко. Теоремы единственности в теории гомологий. *Мат. сб.*, **85** (**127**), 1971, № 2 (6), 201—223.
3. Ст. Г. Петкова. Об аксиомах теории гомологий. *Мат. сб.*, **90** (**132**), 1973, №4, 607—624.
4. N. E. Steenrod. Regular cycles of compact metric spaces. *Ann. of Math.*, **41**, 1940, 833—851.
5. Е. Г. Скляренко. Теория гомологий и аксиома точности. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, вып. 5 (149), 87—140.
6. A. Borel, J. C. Moore. Homology theory for locally compact spaces. *Mich. Math. J.* **7**, 1960, 137—160.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 6. 5. 1975