Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СИЛОВСКИЕ p-ПОДГРУППЫ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР СЧЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть L — поле ненулевой характеристики p, G — абелева группа, LG — ее групповая алгебра над полем L и $S(LG)$ — силовская p-подгруппа группы единиц алгебры LG. В настоящей работе дается описание группы $S(LG)$, когда L — счетное поле характеристики p, а G — счетная (смешанная) абелева группа, и находятся необходимые и достаточные условия для изоморфизма групп $S(LG)$ и $S(L\overline{G})$, где $\overline{G}$ — счетная абелева группа.

Силовская p-подгрупа $S(LG)$ группы единиц алгебры LG абелевой p-группы G над полем L характеристик p изучалась в работах Бермана (1967) и Моллова (1971—74). Основные результаты статьи опубликованы в [8] без доказательства.

1. Обозначения, понятия и вводные результаты. Групповые операции абелевых групп записываются мультипликативно. Понятия, которые здесь не определены, можно найти в [2], [3] и [11]. Используются следующие обозначения:

$|M|$ — мощность множества M;
$\aleph_0$ — наименьшее бесконечное кардинальное число;
ω — наименьшее бесконечное порядковое число;
$\diagdown$ — разность двух множеств;
H_p — силовская p-подгруппа абелевой группы H;
$\langle \cdots \rangle$ — подгруппа, порожденная...;
$H[p]$ — нижний слой абелевой p-группы H, т. е. $H[p]=\{h/h^p=1, h\in H\}$
Π, $\times$ — знаки для прямых произведений групп;
$\cong$ — знак для изоморфизма групп;
$|G:H|$ — индекс подгруппы H в группе G;
если α — порядковое число, то G^{p^α} определяем индуктивно:

$G^{p^0}=G$; $G^p=\{g^p|g\in G\}$; если $\alpha=\beta+1$, то $G^{p^\alpha}=(G^{p^\beta})^p$, а если α — предельное порядковое число, то $G^{p^\alpha}=\cap_{\beta<\alpha}G^{p^\beta}$;

$G^{p^{-1}}=G$;

$G^{(\alpha)}=G^{p^{\omega\alpha}}$; аналогичным образом можно определить L^{p^α} и $L^{(\alpha)}$, причем полагаем $L^{(0)}=L$, $G^{(0)}=G$;

G^* — максимальная p-делимая подгруппа группы G [11, с. 117 и 120]

$$n(x)=\sum_{g\in G}a_g,\quad \text{где}\quad x=\sum_{g\in G}a_g\, g.$$

Пусть i и n — натуральные числа и $n\geqq i$, а γ — произвольное кардинальное число. Через $C_\gamma^{i,n}$ (соответственно через C_γ^i) обозначим прямое произведение циклических групп порядков $p^i, p^{i+1}, \ldots, p^n$ ($p^i, p^{i+1}, \ldots, p^{i+s}, \ldots$), причем каждая из циклических групп порядка p^k, $i \leq k \leq n$ ($k \geq i$), встречается γ раз.

Если $\gamma = \aleph_0$, то $C_\gamma^{i,n}$ и C_γ^i обозначим соответственно через $C^{i,n}$ и C^i. Обозначим также $C_\gamma^{n,i} = 1$ при $n > i$.

Если абелева p-группа G единична, то будем говорить, что G имеет ульмовский тип 0.

Очевидно, что G^{p^α} — подгруппа группы G, а L^{p^α} — подполе поля L. Если τ — первое порядковое число, для которого $G^{p^\tau} = G^{p^{\tau+1}}$ [11, с. 181], то очевидно G^{p^τ} — максимальная p-делимая подгруппа группы G. Иными словами, если β — наименьшее порядковое число, для которого $G^{(\beta)} = G^{(\beta+1)}$, то $G^{(\beta)}$ — максимальная p-делимая подгруппа группы G. Конечно, если G — абелева p-группа, то понятия p-делимая и делимая группа совпадают.

В следующей лемме используется очевидная формула для подгрупп A_i группы G

(1) $$(\bigcap_{i \in I} A_i)_p = \bigcap_{i \in I} (A_i)_p.$$

Лемма 1.1. *Если G — абелева группа, а α и γ произвольные порядковые числа, то*

(2) $$(G^{p^\alpha})_p = (G_p)^{p^\alpha}$$

и $(G^{(\gamma)})_p = (G_p)^{(\gamma)}$, т. е., если G имеет силовскую p-подгруппу F, то $G^{(\gamma)}$ имеет силовскую p-подгруппу $F^{(\gamma)}$.

Доказательство. При $\alpha = 1$ формула (2) верна. Действительно если $x \in (G^p)_p$, то $x = y^p$, $y \in G$, следовательно, существует натуральное n так что $y^{p^n} = 1$, т. е. $y \in G_p$, откуда $x \in (G_p)^p$ или $(G^p)_p \subseteq (G_p)^p$. Обратное включение очевидно.

Пусть $\alpha > 1$ и (2) верна для всех $\beta < \alpha$. Если $\alpha = \beta + 1$, то

$$(G^{p^\alpha})_p = [(G^{p^\beta})^p]_p = [(G^{p^\beta})_p]^p = [(G_p)^{p^\beta}]^p = (G_p)^{p^\alpha}.$$

Если α — предельное порядковое число, то

$$(G^{p^\alpha})_p = (\bigcap_{\beta < \alpha} G^{p^\beta})_p = \bigcap_{\beta < \alpha} (G^{p^\beta})_p = \bigcap_{\beta < \alpha} (G_p)^{p^\beta} = (G_p)^{p^\alpha},$$

где первое равенство следует из определения G^{p^α}, второе — из формулы (1), третье — из индуктивного предположения и четвертое — из определения $(G_p)^{p^\alpha}$. Вторую часть леммы можно получить при $\alpha = \omega\gamma$.

В дальнейшем под $G_p^{(\alpha)}$ будем понимать $(G_p)^{(\alpha)}$ и его равное $(G^{(\alpha)})_p$, а под $G_p^{p^\beta}$ — $(G_p)^{p^\beta}$ или $(G^{p^\beta})_p$.

Лемма 1.2. *Если силовская p-подгруппа F абелевой группы G делима, то $G^{(1)}$ — максимальная p-делимая подгруппа группы G.*

Доказательство. Сначала докажем, что если абелева группа Q имеет единичную силовскую p-подгруппу, то $Q^{(1)}$ является максимальной p-делимой подгруппой Q^* группы Q. Действительно, если $a \in Q^{(1)}$, то для каждого натурального n существуют элементы b и c_n группы Q, так что

$a=b^p=c_n^{p^{n+1}}$, следовательно, $b=c_n^{p^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, т. е. $b\in Q^{(1)}$, откуда $a\in(Q^{(1)})^p$. Получаем, что $Q^{(1)}$ — p-делимая подгруппа группы Q, следовательно, $Q^{(1)}=Q^*$. Фактор-группа G/F имеет единичную силовскую p-подгруппу, следовательно, ввиду вышеуказанного, $(G/F)^{(1)}$ — p-делимая подгруппа и так как F — делимая группа, то $(G/F)^{(1)}=G^{(1)}/F$, откуда следует, что группа $G^{(1)}$ также p-делима.

Лемма 1.3. *Пусть R — редуцированная часть силовской p-подгруппы F абелевой группы G. Если для некоторого порядкового числа α группа $G^{(\alpha)}$ p-делима, то ульмовский тип группы R не превосходит α, т. е. $R^{(\alpha)}=1$. Наоборот, если группа R имеет ульмовский тип α, то $G^{(\alpha+1)}$ — максимальная p-делимая подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $G^{(\alpha)}$ — p-делимая группа. Тогда $G^{(\alpha)}=G^{(\alpha+1)}$, откуда по лемме 1.1 получаем $(G_p)^{(\alpha)}=(G_p)^{(\alpha+1)}$, т. е. $F^{(\alpha)}$ — p-делимая группа. Если P — максимальная делимая подгруппа группы F, то трансфинитной индукцией получим $F^{(\alpha)}=P\times R^{(\alpha)}$, т. е. $R^{(\alpha)}=1$.

Пусть, обратно, $R^{(\alpha)}=1$. Так как $F^{(\alpha)}$ — p-делимая группа и по лемме 1.1 $(G^{(\alpha)})_p=F^{(\alpha)}$, то по лемме 1.2 $G^{(\alpha+1)}$ — максимальная p-делимая подгруппа группы G.

Лемма 1.4. *Если для поля L ненулевой характеристики p существует натуральное число k, так что $L^{p^k}=L^{p^{k+1}}$, то L — совершенное поле. Если для группы Q с единичной силовской p-подгруппой существует натуральное k, так что $Q^{p^k}=Q^{p^{k+1}}$, то Q — p-делимая группа.*

Доказательство. Допустим, что $L^{p^k}=L^{p^{k+1}}$, и, что поле L не является совершенным. Пусть $a\in L$. Тогда существует элемент $b\in L$, так что $a^{p^k}=b^{p^{k+1}}$ и, следовательно, $(a-b^p)^{p^k}=0$. Так как поле L не содержит нильпотентных элементов, то $a=b^p$, т. е. $L=L^p$, что является противоречием. Вторая часть леммы доказывается аналогично, причем $Q_p=1$ играет такую же роль, что и отсутствие нильпотентных элементов для поля L.

Лемма 1.5. *Если L — поле ненулевой характеристики p, то $L^{(1)}$ — максимальное совершенное подполе поля L, т. е. для любого ординального $\alpha\geq 1$ имеет место $L^{(\alpha)}=L^{(1)}$* [6, *лемма* 1].

2. О структуре силовских p-подгрупп групповых алгебр абелевых групп. Предложение 2.1. Пусть G — абелева группа с силовской p-подгруппой G_p, а L — поле характеристики p. Произвольный элемент x групповой алгебры LG принадлежит силовской p-подгруппе $S(LG)$ группы единиц алгебры LG тогда и только тогда, когда исполнено следующее условие:

(*) для любого представления элемента x в виде

$$x=\sum_{i=1}^{m} b_i c_i, \quad b_i\in LG_p, \tag{3}$$

где $c_1=1, c_2, \ldots, c_m$ — представители различных смежных классов группы G по подгруппе G_p, имеем $n(b_1)=1$, $n(b_2)=\cdots=n(b_m)=0$. Группа $S(LG)$ является единичной тогда и только тогда, когда G_p — единичная группа.

Доказательство. Если для $x\in LG$ выполнено условие (*), то $x\in S(LG)$. Действительно, пусть p^s — максимум порядков элементов группы G_p, входящих в записи элементов $b_1, \ldots, b_m$. Тогда $x^{p^s}=1$.

Пусть, обратно, $x \in S(LG)$. Тогда x можно представить в виде (3), где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — представители различных смежных классов группы G по подгруппе G_p и для некоторого натурального s получим $x^{p^s} = \Sigma_{i=1}^{m} b_i^{p^s} c_i^{p^s}$. При $i \neq j$ классы $c_i^{p^s} G_p$ и $c_j^{p^s} G_p$ различны, следовательно, в записи элемента x должен встретиться представитель $c_1 = 1$, откуда $b_1^{p^s} = 1$, $b_i^{p^s} = 0$ $(i \neq j)$ и $n^{p^s}(b_1) = 1$; $n^{p^s}(b_i) = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$. Так как поле L не содержит нильпотентных элементов, то получается условие (*).

Доказательство остальной части предложения следует без затруднения, используя его первую часть.

В следующей лемме применяем очевидную формулу

$$\bigcap_{i \in I} S(L_i G_i) = S[(\bigcap_{i \in I} L_i)(\bigcap_{i \in I} G_i)], \tag{4}$$

где L_i — произвольные подполя поля L, а G_i — подгруппы группы G.

Предложение 2.2. Если L — поле ненулевой характеристики p, G — абелева группа и α — порядковое число, то

$$S^{p^\alpha}(LG) = S(L^{p^\alpha} G^{p^\alpha}), \tag{5}$$

следовательно, $S^{(\alpha)}(LG) = S(L^{(\alpha)} G^{(\alpha)})$.

Доказательство. Установим формулу (5) для $\alpha = 1$. Пусть $x \in S^p(LG)$, т. е. $x = y^p$, где для $y = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \cdots + b_m c_m$ выполнено условие (*). Тогда $x = \Sigma b_i^p c_i^p \in L^p G^p$ и так как $b_i \in L^p G_p^p$,

$$n(b_i^p) = n^p(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{для } i = 1 \\ 0 & \text{для } i \neq 1, \end{cases}$$

а c_i^p — представители различных смежных классов группы G^p по подгруппе) G_p^p, причем $c_1^p = 1$, то для элемента x алгебры $L^p G^p$ выполнено условие (*), т. е. $x \in S(L^p G^p)$.

Пусть, обратно, $x \in S(L^p G^p)$ и $x = b'_1 c'_1 + \cdots + b'_r b'_r$, где $b'_i \in L^p G_p^p$, а c'_i — представители различных смежных классов группы G^p по подгруппе G_p^p и $c'_1 = 1$. Следовательно, $b'_i = b_i^p$ и $c'_i = c_i^p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Так как для элемента x выполнено условие (*), то $n(b'_i) = \varepsilon$, следователнo, $n(b_i) = \varepsilon$, где $\varepsilon = 1$ при $i = 1$ и $\varepsilon = 0$ при $i \neq 1$. Кроме того c_i являются представителями различных смежных классов группы G по подгруппе G_p, следовательно, для элемента $\Sigma b_i c_i$ выполнено условие (*), т. е. $x \in S^p(LG)$.

Пусть $\alpha > 1$ и α — произвольное порядковое число. Допустим, что (5) верна для всех $\beta < \alpha$. Тогда, если $\alpha = \beta + 1$, то

$$S^{p^\alpha}(LG) = [S^{p^\beta}(LG)]^p = S^p(L^{p^\beta} G^{p^\beta}) = S(L^{p^\alpha} G^{p^\alpha}),$$

а если α — предельное порядковое число, то

$$S^{p^\alpha}(LG) = \bigcap_{\beta < \alpha} S^{p^\beta}(LG) = \bigcap_{\beta < \alpha} S(L^{p^\beta} G^{p^\beta}) = S[(\bigcap_{\beta < \alpha} L^{p^\beta})(\bigcap_{\beta < \alpha} G^{p^\beta})],$$

откуда получаем (5).

Следствие 2.3. *Если G — абелева группа и L — поле характеристики $p > 0$, то группа $S(LG)$ имеет конечный показатель p^n тогда* *и только тогда, когда силовская p-подгруппа G_p группы G имеет тот же самый показатель.*

Следствие непосредственно вытекает из предложения 2.2 и из предложения 2.1.

Лемма 2.4. *Пусть G — абелева группа и K — максимальное совершенное подполе поля L характеристики p. Тогда максимальная p-делимая подгруппа S^* группы $S(LG)$ совпадает с $S(KG^*)$. Группа S^* единична тогда и только тогда, когда максимальная делимая подгруппа P силовской p-подгруппы группы G является единичной.*

Доказательство. Существует порядкое число α, так что $S^*=S^{(\alpha)}(LG)$, следовательно, $S^{(\alpha)}(LG)=S^{(\alpha+1)}(LG)$. По предложению 2.2. имеем $S(L^{(\alpha)}G^{(\alpha)})=S(L^{(\alpha+1)}G^{(\alpha+1)})$. Тогда из предложения 2.1. вытекает, что $L^{(\alpha)}=L^{(\alpha+1)}$ и $G^{(\alpha)}=G^{(\alpha+1)}$, т. е. $L^{(\alpha)}=K$ и $G^{(\alpha)}=G^*$, откуда $S^*(LG)=S(KG^*)$. Из полученной формулы и из предложения 2.1. следует вторая часть леммы.

3. Силовские p-подгруппы групповых алгебр конечных абелевых групп. В этом параграфе работы дается описание силовской p-подгруппы $S(LG)$, когда L — конечное поле характеристики p, а G — конечная абелева группа.

Теорема 3.1. *Пусть L — конечное поле характеристики p, G и $\bar G$ — конечные абелевы группы соответственно с силовскими p-подгруппами F и $\bar F$, $|G:F|=k$, $|\bar G:\bar F|=\bar k$, p^t и $p^{\bar t}$ — порядки нижних слоев N и $\bar N$ групп F и $\bar F$. Силовские p-подгруппы $S(LG)$ и $S(L\bar G)$ групп единиц групповых алгебр LG и $L\bar G$ изоморфны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

$$(i)\qquad F=N,\quad \bar F=\bar N \quad и \quad (p^t-1)\,k=(p^{\bar t}-1)\,\bar k;$$

$$(ii)\qquad F\neq N,\quad F\cong\bar F \quad и \quad k=\bar k.$$

Доказательство. Вводим следующие обозначения:

$$|L|=\Lambda=p^l,\quad |F|=\mu,\quad |F/N|=\mu',\quad S(LG)=S,\quad S(L\bar G)=\bar S,$$
$$(6)\qquad |S|=\nu=p^v,\quad \tilde N=S[p],\quad |\tilde N|=r=p^w.$$

Для доказательства используем следующую лемму.

Лемма 3.2. *Если G — конечная абелева группа и L — конечное поле характеристики p, то*

$$(7)\qquad \mu=1+\frac{v}{kl}\,.$$

Действительно, пусть $G=F\times Q$, где F — p-примарная компонента группы G. Любой элемент $x\in S(LG)$ можно записать в виде

$$(8)\qquad x=y_1c_1+y_2c_2+\cdots+y_kc_k,\quad y_i\in LF,\quad c_i\in Q,\quad c_1=1,$$

где $n(y_i)=\varepsilon$, $\varepsilon=0$ или $\varepsilon=1$. Тогда для каждого y_i получаем $\Lambda^{\mu-1}$ возможности и, ввиду (8), получим $\nu=\Lambda^{(\mu-1)k}$, откуда следует (7).

Для доказательства теоремы используем (6). Пусть $G=F\times Q$. Группы $S(LG)$ и F имеют один и тот же показатель p^a. Определим число различных элементов x, принадлежащих группе N. Элемент x можно представить в виде (8), где $n(y_1)=1$, $n(y_i)=0$ $(i=2, 3, \ldots, k)$. Из $x^p=1$ следует $y_1^p=1$, $y_2^p=0, \ldots, y_k^p=0$, так как $c_i^pF\neq c_j^pF$. Любой элемент y_i можно представить в виде

$$y_i=\sum_{j=1}^{\mu'} b_j \sum_{a\in N} \alpha_{ja}a,$$

где $b_1=1$, $b_2, \ldots, b'_\mu$ — представители различных смежных классов группы F по подгруппе N. Из $y_i^p=\delta$, где $\delta=0$ или $\delta=1$, следует

$$(\sum_{a\in N}\alpha_{1a})^p=1, \quad (\sum_{a\in N}\alpha_{ja})^p=0 \quad (j=2, 3, \ldots, \mu'),$$

или

$$\sum_{a\in N}\alpha_{1a}=1, \quad \sum_{a\in N}\alpha_{ja}=0 \quad (j=2, 3, \ldots, \mu'). \tag{9}$$

Относительно неизвестных α_{ia}, любое из этих уравнений имеет Λ^{p^t-1} решений, следовательно, число решений системы (9) равняется $\Lambda^{(p^t-1)\mu'}$. Таким образом, для каждого y_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ в записи (8) получаются $\Lambda^{(p^t-1)\mu'}$ возможностей, т. е.

$$\Lambda^{(p^t-1)\mu'k}=r=p^w, \tag{10}$$

откуда

$$(p^t-1)\mu'k=w/l\cdot \tag{11}$$

Рассуждая аналогично для группы $\bar{G}$, получим обозначения и формулы типа (6), (7), (10) и (11), в которых, за исключением чисел p, Λ и l, над всеми буквами поставлена черта; их мы могли бы обозначить $(\bar{6})$ $(\bar{7})$, $(\overline{10})$ и $(\overline{11})$; аналогично для групп G^{p^i} и $\bar{G}^{p^i}$ $(i=1, 2, \ldots, \alpha-1)$ получим формулы типа (6), (7), (10) и (11), а также типа $(\bar{6})$, $(\bar{7})$, $(\overline{10})$ и $(\overline{11})$, в которых все числа, за исключением чисел p, Λ, l, k и $\bar{k}$, занумерованы буквой i, т. е. $|F^{p^i}|=\mu_i, \ldots$.

Пусть $S(LG)\cong S(L\bar{G})$. Этот случай имеет два подслучая: $F=N$ и $F\neq N$.

Пусть $F=N$, т. е. $\mu'=1$. Тогда следует, что $S(LG)\cong\tilde{N}$. Так как $S\cong S(L\bar{G})$, то $\bar{S}=\bar{S}[p]$. Следовательно, $\bar{F}=\bar{F}[p]$, т. е. $\bar{\mu}'=1$. В таком случае $\mu=p^t$, $\bar{\mu}=p^t$ и из (11) и $(\overline{11})$ получается вторая часть условия (i).

Пусть $F\neq N$, т. е. $\mu'\neq 1$. Следовательно, $S\neq\tilde{N}$, т. е. $v\neq w$. Так как $S\cong\bar{S}$, то $\bar{S}\neq S(L\bar{G})[p]$, т. е. $\bar{v}\neq\bar{w}$. Следовательно, $\bar{F}\neq\bar{F}[p]$, т. е. $\bar{\mu}'\neq 1$. Покажем, что группа $S(LG)$ и поле L определяют однозначно порядки нижних слоев группы F и индекс $|G:F|=k$. Действительно, из (11) следует, что w/l — целое число. Так как w и l даны, наибольший общий делитель $(p^t-1, p)=1$ и $(k, p)=1$, то из (11) следует, что μ' определяется однозначно как максимальная степень числа p, выделяющаяся в качестве множителя числа w/l. Найдем p^t и k (μ' уже получено указанным образом). Так как $\mu=\mu'p^t$, то из (7) имеем $l\mu'p^tk-lk=v$. Из (11) получаем $l\mu'p^tk-l\mu'k=w$. Так как $\mu'\neq 1$ и $v-w\neq 0$, то решая последние два равенства относительно k и p^t, получим

$$k=(v-w)/(\mu'-1)\,l \tag{12}$$

и

$$p^t=(v\mu'-w)/\mu'(v-w). \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) показывают, что поле L и группа $S(LG)$ определяют однозначно порядок нижнего слоя N группы F и индекс $|G:F|=k$. Так как $S^{p^i}(LG)=S[L(F^{p^i}\times Q)]$, то поле L и группа $S^{p^i}(LG)$, т. е. $S(LG)$, определяют однозначно порядки p^{t_i} нижних слоев N_i группы F^{p^i} за эвентуальным исключением последнего нижнего слоя N_s, для которого $F^{p^s}=N_s$. Но тогда $\mu'_s=1$ и имеет место $(p^{t_s}-1)\,\mu'_s\,k=w/l$. Следует, что $S(LG^{p^s})=S(LG^{p^s})\,[p]$. Так как $S(LG^{p^s})\cong S(L\bar{G}^{p^s})$, то $S(L\bar{G}^{p^s})=S(L\bar{G}^{p^s})\,[p]$, т. е. $\bar{F}^{p^s}$ совпадает со своим нижним слоем или $\bar{\mu}'_s=1$. Тогда $\mu_s=p^{t_s}, \bar{\mu}=p^{\bar{t}_s}$ и из равенства, аналогично равенству $(\overline{11})$, следует $(p^{t_s}-1)\mu' k=w_s/l=(p^{\bar{t}_s}-1)\,\bar{\mu}'_s k$. Отсюда получим $t_s=\bar{t}_s$. Этим группа F определена с точностью до изоморфизма, т. е. $t_i=\bar{t}_i$ и $k=\bar{k}$. Мы показали условие (ii).

Пусть выполнено условие (i). Следует, что $\mu'=\bar{\mu}'=1$. Тогда $\Lambda^{(p^t-1)\mu' k}=\Lambda^{(p^{\bar{t}}-1)\bar{\mu}' k}$, т. е. $w/l=\bar{w}/l$ или $w=\bar{w}$. Так как $S=S[p]$, $\bar{S}=S[p]$, то $S\cong\bar{S}$.

Пусть выполнено условие (ii). Тогда из формул (11) и $(\overline{11})$ видно, что $w=\bar{w}$. Так как формула (11) получена из $S[L(F\times Q)]$, то из $S^{p^i}(LG)=S[L(F^{p^i}\times Q)]$ следует аналогично, что $(p^{t_i}-1)\mu'_i k=w_i/l$, $(p^{\bar{t}_i}-1)\,\bar{\mu}_i\,\bar{k}=\bar{w}_i/l$, где индекс i показывает, что инварианты взяты для p^i-x степеней соответствующих групп. Так как $F\cong\bar{F}$, то левые части полученных двух равенств равны, откуда получается $w_i=\bar{w}_i$, т. е. $S(LG)\cong S(L\bar{G})$.

Следствие 3.3. *Пусть G — конечная абелева группа, F — ее p-примарная компонента, L — конечное поле характеристики p и $|L|=p^l$. Тогда группы $S(LG)$ и F имеют один и тот же показатель p^α. Имеют место следующие утверждения.*

1. Поле L, группа F и индекс $|G:F|=k$ определяют группу $S(LG)$

$$S(LG)\cong\prod_{i=1}^{\alpha}C_{\delta_i}^{i,i}, \tag{14}$$

где $\delta_{i+1}=l\,[(p^{t_i}-1)\,\mu'_i-(p^{t_{i+1}}-1)\,\mu'_{i+1}]\,k \quad (i=0, 1, \ldots, \alpha-1),$

$$N_i=(F^{p^i},[p], \quad |N_i|=p^{t_i}, \quad |F^{p^i}:N_i|=\mu'_i \quad (i=0, 1, \ldots, \alpha).$$

2. Поле L и группа $S(LG)$, если она не совпадает со своим нижним слоем, определяют p-примарную компоненту F и индекс $|G:F|=k$:

$$F\cong\prod_{i=1}^{\alpha}C_{\varepsilon_i}^{i,i}, \quad k=w/l(p^t-1)\mu', \tag{15}$$

где $\varepsilon_i=t_{i-1}-t_i$ $(i=1, \ldots, \alpha)$, $t_i=\log_p(v_i\,\mu'_i-w_i)-\log_p\mu'_i-\log_p(v_i-w_i)$ $(i=0$ $1, \ldots, \alpha)$ μ'_i — максимальная степень числа p, выделяющаяся как множитель числа w_i/l, $p^{w_i}=|S^{p^i}(LG)\,[p]|$,

$$p^{v_i} = |S^{p^i}(LG)| \; (i=0, 1, \ldots, \alpha), \quad w_0 = w, \quad t_0 = t \quad \text{и} \quad \mu_0' = \mu'.$$

Доказательство. Как в теореме 3.1 для групп $S^{p^i}(LG) = S(LG^{p^i})$ $(i=0, 1, \ldots, \alpha-1)$ получаются следующие формулы (11′) и (13′), аналогичны формулам (11) и (13).

$$(11') \qquad (p^{t_i}-1)\mu_i' k = w_i/l \quad (i=0, 1, \ldots, \alpha),$$

$$(13') \qquad p^{t_i} = (v_i \mu_i' - w_i)/\mu_i'(v_i - w_i) \quad (i=0, 1, \ldots, \alpha)$$

(индекс i в них показывает, что рассматриваются p^i-е степени соответственных групп). Поле L, группа F и индекс $|G:F| = k$ определяют из (11′) число w_i прямых множителей нижнего слоя $S^{p^i}(LG)[p]$, следовательно, $\delta_{i+1} = w_i - w_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, \alpha-1)$ равно числу прямых множителей порядка p^{i+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы, т. е. имеет место (14).

2. Поле L и группа $S(LG)$ определяют через формулу (11′) число μ_i' как максимальную степень числа p, выделяющуюся в качестве множителя числа w_i/l, а через формулу (13′) — число t_i, которое равно числу прямых множителей порядка p группы $(F^{p^i})[p]$, следовательно, $\varepsilon_{i+1} = t_i - t_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, \alpha-1)$ равно числу прямых множителей порядка p^{i+1} в прямом разложении группы F на циклические группы. Этим установлена первая формула (15). При так определенных $\mu_0' = \mu'$ и $t_0 = t$ из (11′) получается вторая формула (15). Следствие доказано.

4. О групповых алгебрах абелевых групп, силовские p-подгруппы которых являются прямыми произведениями циклических групп. Предложение 4.1. Пусть L счетное или конечное поле ненулевой характеристики p и G — счетная или конечная абелева группа. Силовская p-подгруппа $S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда силовская p-подгруппа G_p группы G разлагается в прямое произведение циклических групп.

Доказательство. Пусть группа G_p — прямое произведение циклических групп. Обозначим $G_p = R$ и $L^{(1)} = K$. Не трудно видеть, что $S(LG)$ — счетная группа.

Группа $S(LG)$ не содержит элементов бесконечной высоты. Действительно, по предложению 2.2. имеет место $S^{(1)}(LG) = S(KG^{(1)})$, по лемме 1.1. — $(G^{(1)})_p = (G_p)^{(1)} = R^{(1)} = 1$ и, следовательно, по предложению 2.1 — $S(KG^{(1)}) = 1$, т. е. $S^{(1)}(LG) = 1$. По второй теореме Прюфера [3, с. 146] $S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Обратная часть предложения очевидна.

Лемма 4.2. *Пусть силовская p-подгруппа G_p смешанной абелевой группы G — прямое произведение циклических групп, $|G| \leq \aleph_0$, L — поле характеристики p и $|L| \leq \aleph_0$. Если $(G_p)^{p^k} \neq 1$ для некоторого k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ и, по крайней мере, одно из кардинальных чисел $|G^{p^k}|$ и $|L^{p^k}|$ бесконечно, то мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\aleph_0$.*

Доказательство. Обозначим

$$G_p = F, \quad G/F = Q, \quad |G_p^{p^k}| = \mu_k, \quad |Q| = q, \quad |L| = \Lambda, \quad G^{p^k} = \bar{G},$$

$$F^{p^k}=\bar{F},\quad L^{p^k}=\bar{L},\quad Q^{p^k}=\bar{Q},\quad S(\bar{L}\bar{G})=\bar{S},\quad S(LG)=S.$$

Различаем следующие случаи.

1. $\bar{G}_p^p=1$. Так как по следствию 2.3 группа $\bar{S}$ имеет показатель p и является счетной, то $\bar{S}$ разлагается в прямое произведение $\aleph_0$ групп порядка p, т. е. мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы S на циклические группы равняется $\aleph_0$.

2. $\bar{C}_p^p\neq 1$. Обозначим $(\bar{S}^{p^i})[p]=\tilde{N}_i'\,(i=0,1,2,\ldots)$ и $\bar{C}_p=\amalg_{s\in I}\langle b_s\rangle$. При помощи подходящей перенумерации можем предполагать, что в последнем равенстве $\langle b_1\rangle$ — прямой множитель порядка p^m, $m>1$, т. е. $b_1^{p^{m-1}}\neq 1$. Случай 2 имеет несколько подслучаев.

2.1. Пусть $\Lambda=\aleph_0$. Очевидно $|\bar{L}|=\aleph_0$. Образуем элементы (см. [4]) $A_\beta=1+\beta b_1-\beta b_1^{1+p^{m-1}}, \beta\in\bar{L}$. Так как $A_\beta\in\bar{S}$, $A_\beta^p=1$, то $A_\beta\in\tilde{N}_0'$. При $\beta\neq\gamma$, $\gamma\in\bar{L}$, элементы A_β и A_γ лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_0'$ по подгруппе $\tilde{N}_1'$. В противном случае

$$A_\beta=A_\gamma\Sigma y_s^p c_s^p,\quad y_s\in\bar{L}\,\bar{G}_p, \tag{16}$$

где c_s — различные представители группы $G^{p^{k+1}}$ по подгруппе $F^{p^{k+1}}$. При $r\neq s$ имеет место $c_r^p\bar{G}\neq c_s^p\bar{G}$. Элементы левой части равенства (16) принадлежат группе $\bar{G}_p$, и после эвентуальной перенумерации получим $c_1^p=1$, т. е. $c_1=1$. Тогда из 16 следует $A_\beta=A_\gamma y_1^p$ и по [4, лемма 5, случай 2.1] получается противоречие. Таким образом мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении S на циклические группы равняется $\aleph_0$.

2.2. Пусть $\mu_k=\aleph_0$. Образуем элементы

$$A_i=1+b_i(1-b_1^{p^{m-1}}),\quad i=2,3,\ldots \tag{17}$$

При $i\neq j$ элементы A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_0'$ по подгруппе $\tilde{N}_1'$. В противном случае $A_i=A_j\Sigma y_s^p c_s^p$, где $y_s\in\bar{L}\bar{G}_p$, а c_s — различные представители группы $\bar{G}^p$ по подгруппе $\bar{G}_p^p$. Аналогично случаю 2.1 следует $A_i=A_j y_1^p$. Тогда по [4, лемма 5, случай 2.2] получается противоречие.

2.3. Пусть $|G/\bar{F}|=\aleph_0$. Имеет место $\bar{F}\neq\bar{F}^p$. Покажем, что можно выбрать счетное множество представителей различных смежных классов группы $\bar{G}$ по подгруппе $\bar{F}^p$, не принадлежащих $\bar{G}^p$. Действительно, пусть $f\in\bar{F}\setminus\bar{F}^p$ и $c_1\bar{F},\ldots,c_n\bar{F},\ldots$ — различные смежные классы группы $\bar{G}$. Тогда $c_1^p f\bar{F}^p, c_2^p f\bar{F}^p,\ldots$ являются различными смежными классами, представители которых не принадлежат группе $\bar{G}^p$. Если $d_1, d_2,\ldots$ суть именно эти представители, то элементы $A_i=1+(1-b_1^{p^{m-1}})d_i$ лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_0'$ по подгруппе $\tilde{N}_1'$. В противном случае

$$1+(1-b_1^{p^{m-1}})d_i=[1+(1-b_1^{p^{m-1}})d_j]A,\ A\in\bar{L}^p\bar{G}^p.$$

В левой части этого равенства классу $\bar{G}^p$ принадлежит только элемент 1, а в его правой части — элементы произведения $1.A$. Следовательно, $A=1$, что при $p \neq 2$, невозможно, а при $p=2$ получается $d_i = d_j b_1^{p^{m-1}}$, откуда $d_i \bar{F}^p = d_j \bar{F}^p$, что является противоречием.

Теорема 4.3. *Пусть G — конечная или счетная смешанная абелева группа, силовская p-подгруппа G_p, которая является прямым произведением циклических групп, L — конечное или счетное поле характеристики p и, по крайней мере, одно из подмножеств L и G бесконечно. В таком случае*

1. *если порядки элементов группы G_p неограничены в совокупности, то $S(LG) \cong C^1$;*

2. *если G_p имеет конечный показатель p^α и*

2.1. *или $G^{p^{\alpha-1}}$ — бесконечная группа, или L — бесконечное поле, то $S(LG) \cong C^{1,\alpha}$;*

2.2. *если L — конечное поле, $G^{p^{s-1}}$ — бесконечная группа, $(1 \leqq s \leqq \alpha-1)$ а G^{p^s} конечна и*

$$S(LG^{p^s}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-s} C_{\delta_i}^{i,i}, \tag{18}$$

то

$$S(LG) \cong C^{1,s} \times \prod_{i=s+1}^{\alpha} C_{\delta_{i-s}}^{i,i}. \tag{19}$$

Доказательство. Случаи 1 и 2.1 следуют из леммы 4.2. Пусть имеют места условия случая 2.2. Тогда также по лемме 4.2 имеем $S(LG) \cong C^{1,s} \times U$, т. е. $S^{p^s}(LG) = S(LG^{p^s}) \simeq U^{p^s}$. Если для $S(LG^{p^s})$ имеет место (18), то для $S(LG)$ имеет место (19), так как в разложении группы U в прямое произведение циклических групп не встречаются циклические группы порядка $p, p^2, \ldots, p^s$.

Следствие 4.4. *Если G и $\bar{G}$ — конечные или счетные абелевы группы, силовские p-подгруппы F и $\bar{F}$ которых являются прямыми произведениями циклических групп и L — конечное или счетное поле характеристики p, то силовские p-подгруппы групповых алгебр LG и $L\bar{G}$ изоморфны тогда и только тогда, когда или*

1. *порядки элементов групп F и $\bar{F}$ неограничены в совокупности, или*

2. *F и $\bar{F}$ имеют один и тот же конечный показатель p^α, причем выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:*

(*i*) L — бесконечное поле;

(*ii*) G^{p^α} и $\bar{G}^{p^{\alpha-1}}$ — бесконечные группы;

(*iii*) L — конечное поле и существует целое число s $(1 \leqq s \leqq \alpha-1)$, так что $G^{p^{s-1}}$ и $\bar{G}^{p^{s-1}}$ — бесконечные группы, а G^{p^s} и $\bar{G}^{p^s}$ конечны, причем, если $|G:F| = k$, $|\bar{G}:\bar{F}| = \bar{k}$, а p^{t_s} и $p^{\bar{t}_s}$ — порядки нижних слоев N_s и $\bar{N}_s$ групп F^{p^s} и $\bar{F}^{p^s}$, то или

а) $N_s = F^{p^s}$, $\bar{N}_s = \bar{F}^{p^s}$ и $(p^{t_s}-1)k = (p^{\bar{t}_s}-1)\bar{k}$, или

б) $N_s \neq F^{p^s}$, $F^{p^s} \simeq \bar{F}^{p^s}$ и $k = \bar{k}$;

3. L — конечное поле, G и $\bar{G}$ — конечные группы, причем, если $|G:F| = k$ и $|\bar{G}:\bar{F}| = \bar{k}$, выполняется одно из следующих условий:

(i) $F=N$, $\overline{F}=\overline{N}$ и $(p^t-1)k=(p^{\overline{t}}-1)\overline{k}$, где p^t и $p^{\overline{t}}$ — порядки нижних слоев N и $\overline{N}$ групп F и $\overline{F}$;

(ii) $F\neq N$, $F\cong\overline{F}$ и $k=\overline{k}$.

Доказательство следует из теоремы 4.3 и теоремы 3.1. Для случая 2. (iii) заметим, что $|G:F|=|G^{p^s}:F^{p^s}|$.

5. Общий случай. Предложение 5.1. Пусть G — счетная абелева группа с силовской p-подгруппой $G_p=P\times R$, где P является делимой, а R — редуцированной подгруппой, $G_p^{(1)}\neq 1$, L — счетное (конечное) поле характеристики p и K — его максимальное совершенное подполе. Тогда фактор-группа $B=S(LG)/S(KG^{(1)})$ характеризуется следующим образом.

1. Если G — p-делимая группа и L — совершенное поле, то $B=1$.

2. Если группа R имеет конечный показатель p^α, G^{p^α} — p-делимая группа и L — совершенное поле, то $B\cong C^{1,\alpha}$.

В остальных случаях $B\cong C^1$.

Доказательство. По предложению 2.2. группа B не содержит элементов бесконечной высоты, следовательно, она разлагается в прямое произведение циклических групп. Обозначим $(B^{p^k})[p]=\widetilde{N}_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ и рассмотрим следующие случаи.

1. $R\neq 1$ и

1.1 порядки элементов группы R неограничены в совокупности. Докажем, что $B\cong C^1$. Различаем следующие подслучаи.

а) $R^{(1)}\neq 1$. Пусть $\mathfrak{D}=R/R^{(1)}$ и

$$\mathfrak{D}^{p^k}\cong\coprod_{i=1}^{\infty}\langle a_iR^{(1)}\rangle. \tag{20}$$

Образуем элементы $A_i=[1+a_i(g'-1)]\,S(KG^{(1)})$ $(i=1, 2, \ldots)$, $g'\neq 1$, $g'\in(R^{(1)})[p]$. При $i\neq j$ элементы A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\widetilde{N}_k$ по подгруппе $\widetilde{N}_{k+1}$. В противном случае, обозначая $1+a_i(g'-1)=\overline{A}_i$ получим $\overline{A}_i\,S(KG^{(1)})\widetilde{N}_{k+1}=\overline{A}_jS(KG^{(1)})\widetilde{N}_{k+1}$ или

$$1+a_i(g'-1)=[1+a_j(g'-1)]A, \tag{21}$$

где $A\in L^{p^k}G^{p^k}$. Нетрудно заметить, что a_i имеет высоту 0 в R^{p^k}. Однако R^{p^k} — сервантная подгруппа группы $G_p^{p^k}$ (так как она есть ее прямой множитель и по лемме 1.1. $G_p^{p^k}$ сервантна в G^{p^k}), следовательно, a_i имеет высоту 0 в G^{p^k}, т. е. $a_i\notin G^{p^{k+1}}$ и классу $G^{p^{k+1}}$ в левой части равенства (21) принадлежит только единица, а в его правой части — элементы произведения $1.A$. Получается $A=1$ и $a_ig'-a_i=a_jg'-a_j$. При $p\neq 2$ это равенство противоречиво, а при $p=2$ следует $a_ig'=a_j$, т. е. $a_iR^{(1)}=a_jR^{(1)}$, что противоречит разложению (20).

б) $R^{(1)}=1$. Обозначим $R^{p^k}=\coprod_{i=1}^{\infty}\langle a_i\rangle$ и образуем элементы вида (17), где $g'\neq 1$, $g'\in P[p]$. Дальше рассуждаем аналогично случаю а).

1.2 При условии, что группа R имеет показатель p^α, докажем, что

$$B\cong C^{1,\alpha}\times B', \tag{22}$$

где $B'=1$, если $L=K$ и G^{p^α} — p-делимая группа, а в противном случае $B'\cong C^{\alpha+1}$.

Сначала покажем, что мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} ($k=0, 1, \ldots, a-1$) в (22) равняется $\aleph_0$. Очевидно, $R^{(1)}=1$, следовательно, $P\neq 1$. Рассмотрим два подслучая а) и б).

а) группа R^{p^k} имеет показатель $\alpha-k>1$. Пусть $R^{p^k}=\Pi_{i\in I}\langle a_i\rangle$ и $a_s=a$ ($s\in I$) — элемент порядка p^m, $m>1$, Очевидно, $a\in R^{p^k}\setminus R^{p^{k+1}}$. Образуем элементы $A_i=1+g_i a(1-a^{p^{m-1}})S(KG^{(1)})$, $g_i\in P$. При $i\neq j$ A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае

$$1+g_i a(1-a^{p^{m-1}})=[1+g_j a(1-a^{p^{m-1}})]A, \tag{23}$$

где $A\in L^{p^{k+1}}G^{p^{k+1}}$. В левой части этого равенства классу $G^{p^{k+1}}$ принадлежат только элемент 1, а в его правой части — элементы произведения $1.A$, следовательно, $A=1$. При $p\neq 2$ равенство (23) приводит к противоречию, а при $p=2$ — к $g_i a=g_j a^{1+2^{m-1}}$, т. е. $a^{2^{m-1}}\neq 1$ имеет бесконечную высоту в группе $G_p^{p^k}$, следовательно, и в R^{p^k}, что невозможно.

б) группа R имеет показатель p. Пусть $a\in R^{p^k}$ ($a\neq 1$). Образуем элементы $A_i=(g_i+a-g_i a)S(KG^{(1)}), g_i\in P$. При $i\neq j$ элементы A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_k$ по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае

$$g_i+a-g_i a=(g_j+a-g_j a)\Sigma\alpha_s g_s, \quad g_s\in G^{p^{k+1}}. \tag{24}$$

В левой части этого равенства классу $G^{p^{k+1}}$ принадлежит только элемент g_i, а в его правой части — все элементы произведения $g_j\Sigma\alpha_s g_s$ и только они. Следовательно, $\Sigma\alpha_s g_s=g'\in G^{(1)}$ и из (24) получим $g_i=g_j g'$, $a-g_i a=ag'-g_j ag'$. Определяя g' из первого равенства и подставляя его во второе, получим противоречие $g_i=g_j$. Случай закончен.

Теперь охарактеризуем множитель B' в (22). Пусть $k\geqq\alpha$ и k — целое число. По предложению 2.2 имеет место $B^{p^k}=S(L^{p^k}G^{p^k})/S(KG^{(1)})$. Различаем следующие случаи.

1.2.1. G^{p^α} не является p-делимой группой. Покажем, что $B'\cong C^{\alpha+1}$ Сначала установим, что $G^{p^k}\supset G^{p^{k+1}}\supset G^{(1)}$ для $k\geqq\alpha$, причем имеет строгое включение. Действительно, так как R имеет показатель p^α, то $G_p^{p^\alpha}=P\times R^{p^\alpha}=P$, следовательно, G^{p^α}/P имеет единичную силовскую p-подгруппу и не является p-делимой группой, ибо в противном случае, ввиду делимости P, получим противоречие, что G^{p^α} — p-делимая группа. Из леммы 1.4 следует, что $G^{p^k}/P\neq G^{p^{k+1}}/P$ для $k\geqq\alpha$, т. е. $G^{p^k}\supset G^{p^{k+1}}$ и включение строго.

Пусть для фиксированного k $q\in G^{p^k}\setminus G^{p^{k+1}}$ и одна из групп типа p^∞, содержась в P, задается с образующими $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и определяющими соотношениями $a_1^p=1$, $a_{n+1}^p=a_n$ ($n=1, 2, \ldots$).

Рассмотрим элементы $A_i=[1+qa_i(1-a_1)]S(KG^{(1)})$ $i=2, 3, \ldots$ При $i\neq j$ элементы A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\tilde{N}_k$, по подгруппе $\tilde{N}_{k+1}$. В противном случае $1+qa_i(1-a_1)=[1+qa_j(1-a_1)]A$, где $A\in L^{p^{k+1}}G^{p^{k+1}}$. В левой части этого равенства классу $G^{p^{k+1}}$ принадлежит только элемент 1, а в его правой части — элементы произведения $1.A$ и только они, следовательно, $A=1$. Получим $qa_i - qa_i a_1 = qa_j - qa_j a_1$, откуда следует $p=2$ и $a_i^2 = a_j^2$, т. е. $a_{i-1} = a_{j-1}$, что̀ невозможно. Следовательно, мощность множества прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B' на циклические группы равняется $\aleph_0$.

1.2.2. Пусть G^{p^α} — p-делимая группа.

1.2.2.1. Если $L=K$, то $B'=1$, так как $B^{p^\alpha} = S(KG^{p^\alpha})/S(KG^{(1)})=1$.

1.2.2.2. Если $L \neq K$, то $B' = C^{\alpha+1}$. Действительно, $B^{p^\alpha} = S(L^{p^\alpha} G^{p^\alpha})/S(KG^{(1)})$ Так как L не является совершенным полем, то по лемме 1.4 для каждого k имеет место $L^{p^k} \neq L^{p^{k+1}}$. Пусть одна из групп типа p^∞, содержащаяся в группе $P \subseteq G^{(1)}$, задается с образующими $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и определяющими соотношениями $a_1^p = 1$, $a_{n+1}^p = a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть k — фиксированное целое число, $k \geq \alpha$. Рассмотрим элементы $A_i = [1+\beta a_i(1-a_1)]\, S(KG^{(1)})$ $(i=2, 3, \ldots)$, где β — такой элемент, что $\beta \in L^{p^k} \setminus L^{p^{k+1}}$. При $i \neq j$ элементы A_i и A_j лежат в различных смежных классах группы $\widetilde{N}_k$ по подгруппе $\widetilde{N}_{k+1}$. В противном случае получим

$$(25) \qquad 1+\beta a_i(1-a_1) = [1+\beta a_j(1-a_1)]\, \Sigma \beta_s^p g_s^p, \quad \beta_s \in L^{p^k}, \quad g_s \in G^{p^k}.$$

В левой части этого равенства корень p^{k+1}-й степени извлекается только из элемента 1, а в его правой части — из элементов произведения $1.\Sigma \alpha_s^p g_s^p$ и только из них, следовательно, $\Sigma \beta_s^p g_s^p = 1$ и (25) получит вид $\beta a_i - \beta a_i a_1 = \beta a_j - \beta a_j a_1$. Отсюда следует, что $p=2$ и $a_i^2 = a_j^2$, т. е. $a_{i-1} = a_{j-1}$, что̀ невозможно. Следовательно, $(\widetilde{N}_k / \widetilde{N}_{k+1}) \geq \aleph_0$. Этим формула (25) доказана.

2. Пусть $R=1$. Различаем следующие подслучаи.

2.1. Если G не является p-делимой группой, то $B \cong C^1$. Доказательство аналогично случаю 1.2.1, так как $G^{p^k} \supset G^{p^{k+1}} \supset P$ и $P \neq 1$ (так как $G_p^{(1)} \neq 1$).

2.2. Если G — p-делимая группа и

2.2.1. L — совершенное поле, то $B=1$ (случай очевиден);

2.2.2. если $L \neq K$, то $B \cong C^1$. Доказательство этого случая аналогично случаю 1.2.2.2.

Доказательство предложения получается из сопоставления всех рассмотренных случаев.

Теорема 5.2. *Пусть L — конечное или счетное поле ненулевой характеристики p, K — его максимально совершенное подполе, G — конечная или счетная смешанная абелева группа с силовской p-подгруппой $F = P \times R$, где P — делимая, а R — редуцированная подгруппа группы F. Тогда силовская p-подгруппа $S(LG) = S$ группы единиц групповой алгебры LG характеризуется следующим образом. Группа $S=1$ тогда и только тогда, когда $F=1$. Максимальная делимая подгруппа S^* группы S является единичной при $P=1$ и прямым произведением счетного числа групп типа p^∞ при $P \neq 1$.*

Пусть $F \neq 1$. Редуцированная группа $S/S^* = U$ является счетной или конечной. Если F — p-делимая группа и L — совершенное поле, то $U=1$. Если, по крайней мере, одно из этих условий не выполнено, и если τ — ульмовский тип группы R ($\tau=0$, если $R=1$), а τ^* — первое порядковое число, для которого $G^{(\tau^*)}$ — p-делимая группа, то при $P=1$ группа U имеет ульмовский тип $\bar{\tau}=\tau$, а при $P\neq 1$ — ульмовский тип $\bar{\tau}=\max(\tau^*, 1)$. Ульмовские факторы группы U изоморфны C^1, за эвентуальным исключением последнего фактора, если он существует. Пусть $\bar{\tau}=\gamma+1$. Для последнего ульмовского фактора $\bar{U}^\gamma$ группы U имеем следующие случаи.

1. При $P=1$;

1.1. если порядки элементов группы $R^{(\gamma)}$ неограничены в совокупности, то $\bar{U}^\gamma \cong C^1$;

1.2. если $R^{(\gamma)}$ имеет конечный показатель p^α и

1.2.1. или $L^{(\gamma)}$ — бесконечное поле или $(G^{(\gamma)})p^{\alpha-1}$ — бесконечная группа, то $\bar{U}^\gamma \cong C^{1,\alpha}$;

1.2.2. если $L^{(\gamma)}$ — конечное поле и $(G^{(\gamma)})^{p^{s-1}}$ — бесконечная группа $(1\leqq s \leqq \alpha-1)$, а $(G^{(\gamma)})^{p^s}$ — конечная и

$$S[L^{(\gamma)}(G^{(\gamma)})^{p^s}] \cong \prod_{i=1}^{\alpha-s} C^{i,i}_{\delta_i}, \text{ то } \bar{U}^\gamma \cong C^{1,s} \times \prod_{i=s+1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_{i-s}};$$

1.2.3. если $G^{(\gamma)}$ — конечная группа и $L^{(\gamma)}$ — конечное поле, то

$$\bar{U}^\gamma \cong S(L^{(\gamma)}G^{(\gamma)}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_i},$$

где числа δ_i определяются как в следствии 3.3.

2. При $P\neq 1$ имеет место $\bar{U}^\gamma \cong C^1$ за исключением случая, когда $R^{(\gamma)}$ имеет конечный показатель p^α, $(G^{(\gamma)})^{p^\alpha}$ — p-делимая группа и $L^{(\gamma)}=K$: тогда именно $\bar{U}^\gamma \cong C^{1,\alpha}$.

Доказательство. По предложению 2.1 $S=1$ тогда и только тогда, когда $F=1$. Так как $S^*(LG)\supseteq S(KP)$ и $S(KP)$ разлагается в прямое произведение счетного числа групп типа p^∞ по [1], то то же самое следует и для группы $S^*(LG)$.

Пусть $F\neq 1$. Очевидно, редуцированная группа $U=S/S^*=S(LG)/S(KG^*)$ единична, если G — p-делимая группа и L — совершенное поле. В дальнейшем будем предполагать, что, по крайней мере, одно из этих условий не выполнено. Очевидно, $U\neq 1$, т. е. для ульмовского типа $\bar{\tau}$ группы U имеет место $\bar{\tau}\geqq 1$. Так как $S(KG^*)$ — делимая группа, то из предложения 2.2 и из леммы 1.5 следует, что

$$U^{(\alpha)}=S(KG^{(\alpha)})/S(KG^*), \quad \alpha\geqq 1. \tag{26}$$

Если $P=1$, то по лемме 1.1 вытекает $(G^*)_p=(G_p)^*=R^*=1$, следовательно, по предложению 2.1, $S(KG^*)=1$ и по предложению 2.2. следует $U^{(\alpha)}\cong S(L^{(\alpha)}G^{(\alpha)})$, $\alpha\geqq 0$. Ульмовский тип группы U равняется $\alpha=\tau$, если α — первое порядковое число, для которого $U^{(\alpha)}=1$, следовательно, по лемме 1.2 и предложению 2.1, для которого $(G^{(\alpha)})_p=F^{(\alpha)}=R^{(\alpha)}=1$. Получаем, что τ совпадает с ульмовским типом группы R.

Пусть $P\neq 1$. Если G — p-делимая группа, то $L\neq K$ и U имеет ульмовский тип 1, так как $U^{(0)}\neq 1$ и, по формуле (26) $U^{(1)}=1$. Если G не является p-делимой группой, то из формулы (26) видно, что τ^* — ульмовский тип группы U, если τ^* — первое порядковое число, для которого $G^{(\tau^*)}$ — p-делимая группа, следовательно, и в обоих случаях, ульмовский тип $\bar{\tau}$ группы U равняется $\max(\tau^*, 1)$. Для ульмовских факторов $\bar{U}^{\alpha}=U^{(\alpha)}/U^{\alpha+1)}\,(\alpha=0, 1, 2, \ldots)$ группы U, ввиду леммы 1.1, получим

$$\bar{U}^0\cong S(LG)/S(KG^{(1)}),\quad \bar{U}^{\alpha}\cong S(KG^{(\alpha)})/S(KG^{(\alpha+1)}),\ \alpha>0. \tag{27}$$

Пусть $\bar{U}^{\alpha}$, $\alpha\geq 0$, не является последним ульмовским фактором группы U В таком случае $\bar{U}^{\alpha+1}\neq 1$, следовательно, $G^{(\alpha+1)}\neq G^{(\alpha+2)}$ и $(G^{(\alpha)})^{p^k}$ не является p-делимой группой для произвольного натурального k. Тогда по предложению 5.1, применительно к группе $G^{(\alpha)}$ и полю $L=K$, получим $\bar{U}^{\alpha}\cong C^{1,\alpha}$.

Пусть $\bar{\tau}=\gamma+1$. Тогда для последнего ульмовского фактора $\bar{U}^{\gamma}$ используем формулу (27). Если $P=1$, то силовская p-подгруппа $R^{(\gamma)}$ группы $G^{(\gamma)}$ не содержит элементов бесконечной высоты, следовательно, она разлагается в прямое произведение циклических групп, т. е. для фактора $\bar{U}^{\gamma}\cong \mathrm{S}(KG^{(\gamma)})$ имеют место условия теоремы 4.3 или следствия 3.3 откуда получаются случаи 1.1, 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.3 теоремы.

Если $P\neq 1$, то фактор $\bar{U}^{\gamma}$ характеризуется предложением 5.1, применительного к группе $G^{(\gamma)}$ и полю $L^{(\gamma)}$. Тогда случай 1 предложения 5.1 невозможен. Если $R^{(1)}\neq 1$ имеет показатель p^{α}, $(G^{(\gamma)})^{p^{\alpha}}$ — p-делимая группа и $L^{(\gamma)}=K$, то имеет место случай 2 предложения 5.1, т. е. $\bar{U}^{\gamma}\cong C^{1,\alpha}$, следовательно, в остальных случаях $\bar{U}^{\gamma}\cong C^1$. Теорема доказана.

Следующее утверждение обобщает теорему 3.1 и следствие 4.4.

С л е д с т в и е 5.3. *Пусть L — конечное или счетное поле характеристики $p>0$, G и $\bar{G}$ — конечные или счетные смешанные абелевы группы, F и $\bar{F}$ — силовские p-подгруппы соответственно групп G и $\bar{G}$, P и $\bar{P}$ — максимальные делимые подгруппы групп F и $\bar{F}$, а R и $\bar{R}$ — редукцированные подгруппы групп F и $\bar{F}$ соответственно с ульмовскими типами τ и $\bar{\tau}$. В таком случае силовские p-подгруппы $S(LG)$ и $S(L\bar{G})$ изоморфны тогда и только тогда, когда выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий:*

1. $F=1$ и $\bar{F}=1$;

2. $\tau=\bar{\tau}$, τ — предельное порядковое число, а P и $\bar{P}$ — одновременно единичные или неединичные группы;

3. $\tau=\bar{\tau}>0$, $\tau=\gamma+1$, $P=1$, $\bar{P}=1$ и порядки групп $R^{(\gamma)}$ и $\bar{R}^{(\gamma)}$ неограничены в совокупности;

4. $\tau=\bar{\tau}>0$, $\tau=\gamma+1$, $P=1$, $\bar{P}=1$, $R^{(\gamma)}$ и $\bar{R}^{(\gamma)}$ имеют один и тот же конечный показатель p^{α} и $L^{(\gamma)}$ — бесконечное поле;

5. $\tau=\bar{\tau}>0, \tau=\gamma+1, P=1, \bar{P}=1$, $R^{(\gamma)}$ и $\bar{R}^{(\gamma)}$ имеют один и тот же конечный показатель p^{α} а $(G^{(\gamma)})^{p^{\alpha-1}}$ и $(\bar{G}^{(\gamma)})^{p^{\alpha-1}}$ — бесконечные группы;

6. $\tau=\bar{\tau}>0$, $\tau=\gamma+1$, $P=1$, $\bar{P}=1$, $R^{(\gamma)}$ и $\bar{R}^{(\gamma)}$ имеют один и тот же конечный показатель p^{α}, $L^{(\gamma)}$ — конечное поле и существует натуральное s $(1\leq s\leq \alpha-1)$, так что $(G^{(\gamma)})^{p^{s-1}}$ и $(\bar{G}^{(\gamma)})^{p^{s-1}}$ — бесконечные группы, а $(G^{(\gamma)})^{p^s}$ и $(\bar{G}^{(\gamma)})^{p^s}$ конечны, причем, если $|G^{(\gamma)}:F^{(\gamma)}|=k$, $|\bar{G}^{(\gamma)}:\bar{F}^{(\gamma)}|=\bar{k}$, а

p^{t_s} и $p^{\bar{t}_s}$ — порядки нижних слоев N_s и $\bar{N}_s$ групп $(F^{(\gamma)})^{p^s}$ и $(\bar{F}^{(\gamma)})^{p^s}$, то или

(i) $$N_s=(F^{(\gamma)})^{p^s},\ \bar{N}_s=(\bar{F}^{(\gamma)})^{p^s} \text{ и } (p^{t_s}-1)k=(p^{\bar{t}_s}-1)\bar{k}, \text{ или}$$

(ii) $$N_s\neq(F^{(\gamma)})^{p^s},\ (F^{(\gamma)})^{p^s}\cong(\bar{F}^{(\gamma)})^{p^s} \text{ и } k=\bar{k};$$

7. $\tau=\bar{\tau}>0$, $\tau=\gamma+1$, $P=1$, $\bar{P}=1$, $L^{(\gamma)}$ — конечное поле, $G^{(\gamma)}$ и $\bar{G}^{(\gamma)}$ — конечные группы, причем, если $|G^{(\gamma)}:F^{(\gamma)}|=k$, $|\bar{G}^{(\gamma)}:\bar{F}^{(\gamma)}|=\bar{k}$, а p^t и $p^{\bar{t}}$ — порядки нижних слоев N_γ и $\bar{N}_\gamma$ групп $F^{(\gamma)}$ и $\bar{F}^{(\gamma)}$, то или

(i) $$F^{(\gamma)}=N_\gamma,\ \bar{F}^{(\gamma)}=\bar{N}_\gamma \text{ и } (p^t-1)k=(p^{\bar{t}}-1)\bar{k}, \text{ или}$$

(ii) $$F^{(\gamma)}\neq N_\gamma,\ F^{(\gamma)}\cong\bar{F}^{(\gamma)} \text{ и } k=\bar{k}.$$

8. $\tau=\bar{\tau}>1$, $\tau=\gamma+1$, $R\neq1$, $\bar{P}\neq1$, $R^{(\gamma)}$ и $\bar{R}^{(\gamma)}$ имеют один и тот же конечный показатель p^α, а $(G^{(\gamma)})^{p^\alpha}$ и $(\bar{G}^{(\gamma)})^{p^\alpha}$ — p-делимые группы;

9. $\tau=\bar{\tau}>1$, $\tau=\gamma+1$, $P\neq1$, $\bar{P}\neq1$ и если $R^{(\gamma)}$ или $\bar{R}^{(\gamma)}$ имеют соответственно конечные показатели p^α и p^β, где $\alpha>0$ и $\beta>0$, то соответственно $(G^{(\gamma)})^{p^\alpha}$ и $(\bar{G}^{(\gamma)})^{p^\alpha}$ не являются p-делимыми группами.

10. $\tau\leqq1$, $\bar{\tau}\leqq1$, $P\neq1$, $\bar{P}\neq1$, L — совершенное поле, а G и $\bar{G}$ — p-делимые группы;

11. $\tau\leqq1$, $\bar{\tau}\leqq1$, $P\neq1$, $\bar{P}\neq1$, L — совершенное поле, R и $\bar{R}$ имеют один и тот же конечный показатель p^α, $\alpha>0$, а G^{p^α} и $\bar{C}^{p^\alpha}$ — p-делимые группы;

12. $\tau\leqq1$, $\bar{\tau}\leqq1$, $P\neq1$, $\bar{P}\neq1$, L — совершенное поле и если R или $\bar{R}$ имеют соответственно конечные показатели p^α и p^β, где $\alpha\geqq0$ и $\beta\geqq0$, то соответственно G^{p^α} и $\bar{G}^{p^\beta}$ не являются p-делимыми группами.

13. $\tau\leqq1$, $\bar{\tau}\leqq1$, $P\neq1$, $\bar{P}\neq1$ и поле L не является совершенным.

Доказательство. Используется предложение 2.1. Если τ — предельное порядковое число, то ввиду теоремы 5.2, все ульмовские факторы изоморфны C^1. Пусть $\tau=\gamma+1$. При $P=1$ последний ульмовский фактор группы $S(LG)$ изоморфен группе $S(L^{(\gamma)}G^{(\gamma)})$ и характеризуется следствием 4.4, так как силовская p-подгруппа $G_p^{(\gamma)}$ разлагается в прямое произведение циклических групп. При $P\neq1$ для фактора $\bar{U}^{(\gamma)}$ имеет место (27) и его описание дано в предложении 5.1. Из сопоставления различных случаев разложения групп $S(LG)$ и $S(L\bar{G})$ получается следствие.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. (Debrecen)*, **14**, 1967, 365—405.
2. Н. Бурбаки. Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы. Москва, 1965.
3. А. Г. Курош. Теория групп. Москва, 1967.
4. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности I. *Publ. Math. (Debrecen)*, **18**, 1971, 9—21.

5. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности II. *Publ. Math. (Debrecen)*, № **19**, 1972, 87—96.
6. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групп единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп. *Сердика*, **1**, 1975, № 3—4, 249—260.
7. Т. Ж. Моллов. Сервантные подгруппы и выделение прямых множителей в группах единиц модулярных групповых алгебер абелевых p-групп. *Научни трудове на Пловд. унив. „П. Хилендарски"*, **11**, кн. 1, 1973, 9—15.
8. Т. Ж. Моллов. О силовских p-подгруппах групповых алгебр счетных абелевых групп. *Доклады БАН*, **27**, 1974, № 6, 733—735.
9. Т. Ж. Моллов. Върху улмовските инварианти на групата от нормираните единици на модулярните групови пръстени на примарните абелеви групи. *Известия Мат. инст. БАН*, **15**, 1974, 343—348.
10. Т. Ж. Моллов. Изотипни подгрупи и директни произведения на изброими групи в групите на единиците на модулярните групови алгебри на примарните абелеви групи. *Научни трудове на Пловд. унив. „П. Хилендарски"*, **12**, кн. **1**, 1974, 91—98.
11. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Москва, 1974.

Пловдивский университет
Математический факультет
4000 Пловдив

Поступила 20. 5. 1975
Поступила в переработанной форме 31. 5. 1976