Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МЕТРИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ НА ПЛОСКОСТИ

ТОДОР П. БОЯНОВ, БЛАГОВЕСТ Х. СЕНДОВ

В пространстве ограниченных замкнутых множеств на плоскости, метризованном расстоянием Хаусдорфа, рассматривается класс связных множеств с заданной метрической размерностью. Для наилучшего приближения полиномиальными кривыми в этом классе получены асимптотические оценки, которые нельзя существенно улучшить по порядку.

При рассмотрении вопросов приближения точечных множеств на плоскости самым естественным является расстояние Хаусдорфа, которое можно определить следующим образом. Обозначим через G совокупность замкнутых и ограниченных множеств на плоскости. Для любой пары $F_1 \in G$ и $F_2 \in G$ определим расстояние между ними по формуле

$$r(F_1, F_2) = \max\{\max_{a\in F_1}\min_{b\in F_2}\varrho(a, b), \max_{b\in F_2}\min_{a\in F_1}\varrho(a, b)\},$$

где $\varrho(.\,,.)$ — расстояние между точками на плоскости. В этой метрике G есть полное метрическое пространство.

В качестве аппарата приближения в G будем использовать полиномиальные кривые. Обозначим через H_n и H_n^T соответственно множество алгебраических многочленов не выше n-ой степени и множество тригонометрических многочленов не выше n-ого порядка. Точечное множество γ на плоскости будем называть алгебраической (соответственно тригонометрической) полиномиальной кривой n-ого порядка, если существуют такие $P(t)$ и $Q(t)$ из H_n (соответственно из H_n^T), что множество точек $\{(x, y): x = P(t),\ y = Q(t),\ -1 \le t \le 1\ (-\pi \le t \le \pi)\}$ совпадает с γ. Обозначим через Γ_n множество алгебраических, а через Γ_n^T — множество тригонометрических полиномиальных кривых n-ого порядка. Все элементы Γ_n и Γ_n^T являются ограниченными, замкнутыми и связными точечными множествами.

Пусть $E_{n,\Gamma}(F)$ (соответственно $E_{n,\Gamma}^T(F)$ — наилучшее приближение множества $F \in G$ элементами Γ_n (соответственно Γ_n^T):

$$E_{n,\Gamma}(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma_n} r(F, \gamma); \quad E_{n,\Gamma}^T(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma_n^T} r(F, \gamma).$$

Необходимым условием для того, чтобы $\lim_{n\to\infty} E_{n,\Gamma}(F) = \lim_{n\to\infty} E_{n,\Gamma}^T(F) = 0$ является связность F.

Оказывается, что скорость стремления к нулю $E_{n,\Gamma}(F)$ и $E_{n,\Gamma}^T(F)$ при $n\to\infty$ можно оценить при помощи метрической размерности множества F.

Приведем соответствующие определения из [1]. Пусть A — непустое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве R. Система состоящая из множеств $U_\nu \subset R$, называется ε-покрытием множества A, если диаметр каждого U_ν не больше 2ε и $A \subseteq \bigcap_\nu U_\nu$. Подмножество множества A называется ε-различимым, если любые две различные его точки находятся на расстоянии, большем ε.

Через $N_\varepsilon(A)$ обозначим минимальное число множеств в ε-покрытии, а через $M_\varepsilon(A)$ — максимальное число точек в ε-различимом подмножестве множества A. Тогда $H_\varepsilon(A) = \log_2 N_\varepsilon(A)$ называется ε-энтропией, а $C_\varepsilon(A) = \log_2 M_\varepsilon(A)$ — ε-емкостью A.

Верхняя и нижняя метрическая размерность множества определяется соответственно формулами: $\overline{\mathrm{dm}}\,(A) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \{H_\varepsilon(A)/\log_2 1/\varepsilon\}$, $\underline{\mathrm{dm}}\,(A) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \{H_\varepsilon(A)/\log_2 1/\varepsilon\}$. Можно дать и эквивалентное определение этих величин $\overline{\mathrm{dm}}\,(A) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \{C_\varepsilon(A)/\log_2 1/\varepsilon\}$, $\underline{\mathrm{dm}}\,(A) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \{C_\varepsilon(A)/\log_2 1/\varepsilon\}$. Если $\overline{\mathrm{dm}}\,(A) = \underline{\mathrm{dm}}\,(A) = \mathrm{dm}\,(A)$, то $\mathrm{dm}\,(A)$ называется метрической размерностью множества A.

При нахождении оценок сверху для $E_{n,\Gamma}(F)$ и $E^T_{n,\Gamma}(F)$ будем использовать понятие лабиринта [2]. Обозначим через Q квадрат $Q = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ и пусть q — фиксированное натуральное число. Разбиваем Q на q^2 квадратиков прямыми $x = x_i = -1 + 2i/q$; $y = y_j = -1 + 2j/q$; $i, j = 0, 1, \dots, q$. Каждый полученный таким образом квадратик рассматриваем как замкнутый и будем обозначать через $\llcorner x_i, y_j \urcorner$, где x_i и y_j соответственно абсцисса и ордината его левой нижней вершины.

Множество L, состоящее из квадратиков $\llcorner x_i, y_j \urcorner$, будем называть лабиринтом, если его внутренность — связное множество. Через L_q обозначим совокупность всех лабиринтов, которые можно получить при фиксированном q. Последовательность квадратиков $V = \{\llcorner x_{i_s}, y_{j_s} \urcorner\}_{s=1}^k$ будем называть замкнутым обходом лабиринта L, если удовлетворены следующие условия:

а) V состоит из тех и только тех квадратиков, из которых состоит L;

б) $|i_s - i_{s+1}| + |j_s - j_{s+1}| \leq 1$, $s = 1, 2, \dots, k-1$, т. е. два последовательных квадратика из V имеют одну общую сторону или совпадают;

в) $\llcorner x_{i_1}, y_{j_1} \urcorner = \llcorner x_{i_k}, y_{j_k} \urcorner$.

Число k называется длиной обхода.

Будем говорить, что множество F принадлежит данному лабиринту L, если каждая точка F принадлежит некоторому квадратику из L и каждый квадратик из L имеет общую точку с F.

В [3] получены результаты, которые сформулируем следующим образом:

Лемма 1. *Если L — лабиринт из L_q, имеющий замкнутый обход с длиной k и $k \leq (n+1)/\pi$, то существует алгебраическая полиномиальная кривая из Γ_n, которая принадлежит L.*

Лемма 2. *Если L — лабиринт из L_q, имеющий замкнутый обход с длиной k и $k \leq n+1$, то существует тригонометрическая полиномиальная кривая из Γ^T_n, которая принадлежит L.*

На основании этих утверждений и неравенства $k \leq 2q^2 - 1$, выполняющегося для любого лабиринта из L_q, получены оценки

$$E_{n,\Gamma}(F) \leq 4\sqrt{\pi}/(n+1)^{1/2}, \quad E^T_{n,\Gamma}(F) \leq 4/(n+1)^{1/2} \tag{1}$$

для связного замкнутого точечного множества F, содержащегося в квадрате Q.

Константы здесь можно улучшить, используя результат из [5], но в [3] показано, что эти оценки неулучшаемы по порядку, если рассматривать класс всех связных замкнутых F, содержащихся в Q. Имеет место, однако, следующая теорема [4]:

Теорема 1. *Если F — связное и замкнутое точечное множество, $F \subset Q$ и $\mathrm{dm}(F) = \alpha$, то для любого $\delta > 0$ имеем $E_{n,\Gamma}(F) = O(n^{-1/(\alpha+\delta)})$, $E^T_{n,\Gamma}(F) = O(n^{-1/(\alpha+\delta)})$.*

Доказательство. Покажем, что существует константа $C = C(\delta)$ такая, что для каждого натурального q лабиринт L из L_q, которому принадлежит F, состоит из не более чем $Cq^{\alpha+\delta}$ квадратиков. Действительно, из $\mathrm{dm}(F) = \alpha$ следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $H_\varepsilon(F)/\log_2 1/\varepsilon \leqq \alpha + \delta$. Пусть ν является ε-покрытием множества F с минимальным числом элементов $N_\varepsilon(F)$. По определению $H_\varepsilon(F) = \log_2 N_\varepsilon(F)$, так что $N_\varepsilon(F) \leqq (1/\varepsilon)^{\alpha+\delta}$. Если взять $\varepsilon = 1/q$, то каждый элемент ν может иметь общие точки с не более, чем четырьмя квадратиками лабиринта $L \in L_q$, которому F принадлежит. Следовательно, число квадратиков L не больше чем $4q^{\alpha+\delta}$, если q достаточно велико. Но тогда для каждого натурального q число квадратиков лабиринта $L \in L_q$, которому принадлежит F, не будет больше, чем $C(\delta)\, q^{\alpha+\delta}$, где $C(\delta)$ — положительная константа, зависящая только от δ. Поэтому существует замкнутый обход лабиринта L с длиной $2C(\delta)q^{\alpha+\delta} - 1$. По лемме 1, если

$$C(\delta)q^{\alpha+\delta} \leqq (n+1)/2\pi + 1/2, \tag{2}$$

то $E_{n,\Gamma}(F) \leqq 2/q_n$, где q_n — наибольшее из натуральных чисел q, удовлетворяющих неравенству (2). Тогда $C(\delta)(q_n+1)^{\alpha+\delta} > (n+1)/2\pi + 1/2$, откуда следует, что $1/q_n = O(n^{-1/(\alpha+\delta)})$. Следовательно $E_{n,\Gamma}(F) = O(n^{-1/(\alpha+\delta)})$.

Оценка $E^T_{n,\Gamma}(F) = O(n^{-1/(\alpha+\delta)})$ получается таким же методом с использованием леммы 2.

Рассмотрим вопрос о возможности уточнения порядка в оценке теоремы 1. От δ можно освободиться, как видно из (1), при $\alpha = 2$, а также и в случае спрямляемой кривой [3]. Следующая теорема показывает, что при $1 < \alpha < 2$ вообще говоря нельзя избегнуть присутствия δ, заменяя его логарифмом.

Теорема 2. *Для любого α, $1 < \alpha < 2$ и любого $\sigma > 0$ существует замкнутое связное множество $F^*_{\alpha,\sigma} \subset Q$ с метрической размерностью $\mathrm{dm}(F^*_{\alpha,\sigma}) = \alpha$, для которого*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \{E_{n,\Gamma}(F^*_{\alpha,\sigma})/(\ln^\sigma n/n)^{1/\alpha}\} = \infty, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \{E^T_{n,\Gamma}(F^*_{\alpha,\sigma})/(\ln^\sigma n/n)^{1/\alpha}\} = \infty.$$

Доказательство. Пусть заданы α, $1 < \alpha < 2$ и $\sigma > 0$. Построим $F^*_{\alpha,\sigma}$ как сечение множеств $\{F_k\}^\infty_{k=k_0}$, где F_k — зависящее от σ замкнутое и связное множество, содержащее в себя F_{k+1}.

Выберем k_0 так, чтобы $\alpha + \log_2 k_0/k_0 < 2$ и для $k > k_0$ выполнялось $\alpha + \log_2(k+1) - \log_2 k < 2$. Зафиксируем целое $s > \sigma$, для которого $s + 3 \leqq \alpha s$

и $s(\alpha+\log_2(k_0+1)-\log_2 k_0)\leqq 2s-1$. Выбор k_0 и s возможен, так как $1<\alpha<2$. Обозначив $\gamma_k=s(\alpha+\log_2(k+1)-\log_2 k)$, имеем $s+3\leqq\gamma_k\leqq 2s-1$.

Рассмотрим теперь квадратик со стороной ε_k (рис. 1) и разобъем его на 2^{2s} квадратиков со стороной $\varepsilon_k 2^{-s}$. Из них можно взять $[2^{\gamma_k}]$ квадратиков при $k>k_0$ так, чтобы их объединение:

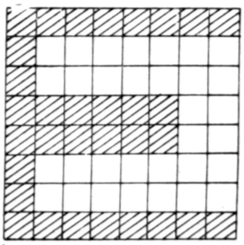

Рис. 1

а) образовало лабиринт;

б) содержалось целиком в заштрихованном множестве E (рис. 1) (из-за $2^{\gamma_k}\leqq 2^{2s}/2$);

в) содержало контур множества E (из-за $8.2^s\leqq 2^{\gamma_k}$).

Обозначим $\varepsilon_k=2^{-sk}$; $\delta_k=\log_2 k/k$; $N_k=2^{sk(\alpha+\delta_k)}$ и определим F_{k_0} как лабиринт из N_{k_0} квадратиков, каждый со стороной ε_{k_0}. Если множество F_k, состоящее из N_k квадратиков со стороной ε_k уже определено, то F_{k+1} получим, выбирая указанным выше способом в каждом квадратике из F_k совокупность из $[2^{\gamma_k}]$ квадратиков со стороной $\varepsilon_k\,.\,2^{-s}$. Таким образом F_{k+1} содержит $N_k\,.\,2^{\gamma_k}=N_{k+1}$ квадратиков со стороной ε_{k+1}.

Обозначим $F^*_{\alpha,\sigma}=\bigcap_{k=k_0}^{\infty}F_k$. Очевидно $F^*_{\alpha,\sigma}$ является связным замкнутым множеством, содержащим вершины всех квадратиков, составляющих F_k для любого $k>k_0$. Таким образом имеется ε_k-различимое подмножество множества $F^*_{\alpha,\sigma}$, состоящее из N_k точек.

Покажем, что $\mathrm{dm}(F^*_{\alpha,\sigma})=\alpha$. Пусть $\varepsilon>0$. Если ε достаточно мало, то существует такое $k>k_0$, что $\varepsilon_{k+1}\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_k$. Поэтому $H_\varepsilon(F^*_{\alpha,\sigma})/\log_2 1/\varepsilon\leqq\log_2 N_{k+1}/\log_2 1/\varepsilon_k=s(k+1)(\alpha+\delta_{k+1})/(s_k)$; $C_\varepsilon(F^*_{\alpha,\sigma})/\log_2 1/\varepsilon\geqq\log_2 N_k/\log_2 1/\varepsilon_{k+1}=sk(\alpha+\delta_k)/(s(k+1))$.

Так как при $\varepsilon\to 0$ имеем $k\to\infty$ и $\delta_k\to 0$, из определения получаем $\overline{\mathrm{dm}}(F^*_{\alpha,\sigma})\leqq\alpha$, $\underline{\mathrm{dm}}(F^*_{\alpha,\sigma})\geqq\alpha$, откуда следует $\mathrm{dm}(F^*_{\alpha,\sigma})=\alpha$.

Нетрудно сообразить, имея в виду рис. 1, что если для полиномиальной кривой γ_m из Γ_m, где $\gamma_m=\{(x,y):x=P(t),\ y=Q(t),\ -1\leqq t\leqq 1\}$ имеет место неравенство $r(F^*_{\alpha,\sigma};\gamma_m)<\varepsilon_k/8$, то $P'(t)$ должен иметь не менее, чем N_k нулей, по одному на каждом квадратике из F_k. Следовательно $m>N_k$.

Пусть теперь $n=N_k$. Из предыдущего следует, что $E_{n,\Gamma}(F^*_{\alpha,\sigma})\geqq\varepsilon_k/8$, и тогда

$$E_{n,\Gamma}(F^*_{\alpha,\sigma})/(\ln^\sigma n/n)^{1/\alpha}\geqq\frac{1}{8}\cdot 2^{-sk}/\{[sk(\alpha+\delta_k)]^\sigma/2^{sk(\alpha+\delta_k)}\}^{1/\alpha}$$

$$=\frac{1}{8}[s(\alpha+\delta_k)]^{-\sigma/\alpha}\,.\,k^{-\sigma/\alpha}\,.\,2^{k\delta_k s/\alpha},$$

что и требовалось доказать, так как $2^{k\delta_k}=k$ и $k^s/k^\sigma\to\infty$. Аналогично получается утверждение, относящееся к $E^T_{n,\Gamma}(F^*_{\alpha,\sigma})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. *Успехи мат. наук*, **14**, 1959, № 2, 3—86.
2. Бл. Сендов, Ст. Димиев, Б. Пенков. ε-энтропии и ε-емкости множества непрерывных кривых. *Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех.*, **3**, 1962, сер. I, 20—23.
3. Бл. Сендов. Апроксимиране на точкови съвкупности с полиномиални криви в равнината. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **60**, 1967, 211—222.
4. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. Докторска дисертация. Москва, 1967.
5. Bl. Sendov, T. Boyanov. A problem of labyrinths. *Доклады БАН*, **25**, 1972, No. 5, 583—585.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 21. 7. 1975