Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

НАИЛУЧШЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

БОРИСЛАВ Д. БОЯНОВ

Пусть Ω — некоторый класс функций и $L_1(f), L_2(f), \ldots, L_n(f)$, — функционалы, определенные на этом классе. Ставится задача о построении на основании только информации $\{L_1(f), \ldots, L_n(f)\}$ метода S^* приближения функции f — такого, чтобы

$$\sup_{f\in\Omega} \| f-S^*(f)\|_C=\inf_S \sup_{f\in\Omega} \|f-S(f)\|_C,$$

где inf берется по всевозможным методам данного типа. Рассматривается случай, когда информация состоит из первых n-коэффициентов ряда Фурье и $\Omega=\widetilde{W}_q^r$ $(1\leq q\leq\infty, \quad r=1$ $2, \ldots)$.

1. Пусть Ω — заданный класс функций в $[a, b]$ и функционалы $L_1(f)$, $\ldots, L_N(f)$ определены в Ω. Обозначим через $T(f)$ множество значений $\{L_1(f), \ldots, L_N(f)\}$ для $f\in\Omega$. Рассмотрим задачу о наилучшем приближении функции f из класса Ω на основании только информации $T(f)$. Дадим сначала некоторые определения.

Пусть точка x фиксирована в $[a, b]$. Каждый произвольный метод S для приближенного вычисления значения $f(x)$, использующий только информацию $T(f)$, можно задать при помощи функции N переменных $S(t_1, \ldots, t_N)$ следующим образом:

$$f(x)\approx S(L_1(f), \ldots, L_N(f)) \quad \text{для каждого } f\in\Omega.$$

Иногда, для удобства, будем обозначать приближенное значение через $S(f)(x)$. Величина $R_S(x)=\sup_{f\in\Omega}|f(x)-S(f)(x)|$ называется погрешностью метода S на классе Ω. Пусть $R(x)=\inf_S R_S(x)$, где inf берется по всевозможным методам, использующим только информацию T. Метод S_0, для которого $R_{S_0}(x)=R(x)$, называется наилучшим методом приближения функционала $L(f)=f(x)$. Обозначим теперь через $S_f^*(x)$ приближенное значение функции f в точке x, вычисленное наилучшим методом для этого фиксированного x. Пусть x пробегает весь интервал $[a, b]$. Функцию S_f^* назовем наилучшим приближением функции f при информации $T(f)$.

Весьма полезна, при исследовании наилучших методов приближения, следующая лемма, доказанная С. А. Смоляком [1] (см. также [6]).

Лемма 1. *Пусть H — линейное метрическое пространство и Ω — выпуклое, центральносимметрическое множество из H с центром симметрии 0 и линейные функционалы $L(f), L_1(f), \ldots, L_N(f)$ определены в H. Тогда существуют числа $D_1, D_2, \ldots, D_N$ такие, что*

$$\sup_{f\in\Omega}\left|L(f)-\sum_{j=1}^{N}D_jL_j(f)\right|=\inf_S\sup_{f\in\Omega}\left|L(f)-S(L_1(f),\ldots,L_N(f))\right|;$$

иначе: среди наилучших методов вычисления функционала $L(f)$ есть линейный метод.

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\inf_S\sup_{f\in\Omega}\left|L(f)-S(L_1(f),\ldots,L_N(f))\right|=\sup\{L(f): f\in\Omega,\ L_k(f)=0,\ k=1,\ldots,N\}.$$

2. Здесь мы будем рассматривать класс $\widetilde{W}_q^r$ $(1\leqq q\leqq\infty,\ r=1,2,\ldots)$ всех периодических с периодом 2π дифференцируемых функций, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна в $[0,2\pi]$, а $f^{(r)}$ удовлетворяет неравенствам

$$\|f^{(r)}\|_q=\{\int_0^{2\pi}|f^{(r)}(t)|^q dt\}^{1/q}\leqq 1 \quad \text{при} \quad 1\leqq q<\infty,$$

$$\|f^{(r)}\|_\infty=\sup_{0\leqq t\leqq 2\pi}\operatorname{vrai}|f^{(r)}(t)|\leqq 1 \quad \text{при} \quad q=\infty.$$

Пусть $\{a_k(f)\}_0^\infty$ и $\{b_k(f)\}_1^\infty$ — коэффициенты Фурье для функции $f\in\widetilde{W}_q^r$. Имеем

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt.$$

Видно, что $a_k(f)$ и $b_k(f)$ являются линейными функционалами от f. Обозначим в этом параграфе через $T(f)$ информацию $\{a_0(f), a_1(f),\ldots,a_n(f), b_1(f),\ldots,b_n(f)\}$. Известно, что каждую функцию $f\in\widetilde{W}_q^r$ можно восстановить приближенно по информации $T(f)$, например, соответствующей парциальной суммой ее ряда Фурье или суммами Валле — Пуссена. Однако эти методы не используют всей информации о функции, которая содержится в ее коэффициентах Фурье. Нашей целью является построение наилучшего метода приближения.

Пусть B_r есть многочлен Бернулли r-той степени для интервала $[0,2\pi]$. Обозначим через

$$Q_{np}(t)=\xi_{0p}+\sum_{k=1}^{n}(\xi_{kp}\cos kt+\eta_{kp}\sin kt)$$

тригонометрический многочлен наилучшего L_p-приближения многочлена $B_r(t)$ в $[0,2\pi]$.

Теорема 1. *Функция $S_f^*(x)$, определенная равенством*

$$S_f^*(x)=a_0(f)/2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kp}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx),$$

где $1/q+1/p=1$,

$$\lambda_{kp}=\begin{cases}(-1)^{r/2}k^r\xi_{kp} & \textit{при} \quad r \textit{ четном},\\ (-1)^{(r-1)/2}k^r\eta_{kp} & \textit{при} \quad r \textit{ нечетном},\end{cases}$$

является наилучшим приближением функции f в классе $\widetilde{W}_q^r$ по информации $T(f)$. При этом погрешность наилучшего метода удовлетворяет равенству

$$\|R(x)\|_C=\frac{1}{\pi}\{\int_0^{2\pi}|B_r(t)-Q_{rp}(t)|^p dt\}^{1/p}.$$

Доказательство. Класс $\widetilde{W}_q^r$ $(1\leqq q\leqq\infty,\ r=1,2,\dots)$ и функционалы $\{a_k(f)\}_0^n$, $\{b_k(f)\}_1^n$ удовлетворяют условиям леммы 1. Следовательно, существует линейный наилучший метод приближения функционала $L(f)=f(x)$. Поэтому мы будем искать наилучший метод среди методов вида

$$f(x)\approx c_0(x)a_0(f)+\sum_{k=1}^n(c_k(x)a_k(f)+d_k(x)b_k(f)). \tag{1}$$

Интегрируя по частям, из определения коэффициентов Фурье получим

$$a_k(f)=\frac{(-1)^{r/2}}{k^r}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\cos kt\,dt,\quad b_k(f)=\frac{(-1)^{r/2}}{k^r}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\sin kt\,dt$$

при r-четном и

$$a_k(f)=\frac{(-1)^{(r+1)/2}}{k^r}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\sin kt\,dt,\quad b_k(f)=\frac{(-1)^{(r-1)/2}}{k^r}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\cos kt\,dt$$

при r-нечетном. Поскольку $f\in\widetilde{W}_q^r$, то ее можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{B}_r(x-t)f^{(r)}(t)dt, \tag{2}$$

где $\widetilde{B}_r(t)$ — 2π-периодическая функция, совпадающая с $B_r(t)$ при $t\in[0,2\pi)$. Пусть r — четное число и $S(f)(x)$ обозначает выражение в правой части (1). Из (2) получаем

$$f(x)-S(f)(x)=(c_0(x)-1/2)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\widetilde{B}_r(x-t)$$

$$-d_0-(-1)^{r/2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^r}(c_k(x)\cos kt+d_k(x)\sin kt)]f^{(r)}(t)dt,$$

где d_0 — произвольная константа. Отсюда следует, что при наилучшем методе $c_0=1/2$. Далее, после замены $\tau=x-t$ и некоторых элементарных вычислений, получим

$$\sup_{f\in\widetilde{W}_q^r}|f(x)-S(f)(x)|=\frac{1}{\pi}\{\int_0^{2\pi}|\widetilde{B}_r(\tau)-d_0 \tag{3}$$

$$-(-1)^{r/2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^r}(\alpha_k(x)\cos k\tau+\beta_k(x)\sin k\tau)|^p d\tau\}^{1/p},$$

где

$$\alpha_k(x)=c_k(x)\cos kx+d_k(x)\sin kx,\quad \beta_k(x)=c_k(x)\sin kx-d_k(x)\cos kx.$$

Очевидно, что

$$\inf_{\{c_k\}_1^n,\ \{d_k\}_1^n} \sup_{f\in \widetilde{W}_q^r} |f(x)-S(f)(x)|$$

достигается для

$$d_0+(-1)^{r/2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r}(\alpha_k\cos k\tau+\beta_k\sin k\tau)=Q_{np}(\tau).$$

Приравнивая коэффициенты, получим

$$c_k(x)=(-1)^{r/2}k^r(\xi_{kp}\cos kx+\eta_{kp}\sin kx),$$
$$d_k(x)=(-1)^{r/2}k^r(\xi_{kp}\sin kx-\eta_{kp}\cos kx)$$

для $k=1,\ 2,\ldots,\ n$. Теперь заметим, что при r-четном многочлен $B_r(\tau+\pi)$ тоже четный. Поскольку многочлен $Q_{np}(\tau+\pi)$ будет тригонометрическим многочленом наилучшего L_p-приближения для $B_r(\tau+\pi)$ в $[-\pi,\pi]$, то и $Q_{np}(\tau+\pi)$ будет четный. Следовательно, $\eta_{kp}=0$, $k=1,\ 2,\ldots,\ n$. Тогда $c_k(x)=(-1)^{r/2}k^r\xi_{kp}\cos kx$ и $d_k(x)=(-1)^{r/2}k^r\xi_{kp}\sin kx$. Вполне аналогично показывается, что при r-нечетном коэффициенты c_k и d_k определяются равенствами $c_k(x)=(-1)^{(r-1)/2}k^r\eta_{kp}\cos kx$ и $d_k(x)=(-1)^{(r-1)/2}k^r\eta_{kp}\sin kx$. Осталось только найти погрешность наилучшего метода. Из (3) получим

$$\|R(x)\|_C=\frac{1}{\pi}\Big\{\int_0^{2\pi}|B_r(\tau)-Q_{np}(\tau)|^p d\tau\Big\}^{1/p}. \tag{4}$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Погрешность $R(x)$ наилучшего метода восстановления функций класса $\widetilde{W}_\infty^r$ по их коэффициентам Фурье равна величине*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|B_r(\tau)-Q_{np}(\tau)|\,d\tau=K_r/(n+1)^r,$$

где K_r $(r=1,\ 2,\ldots)$ — известные константы Фавара-Ахиезера-Крейна,

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Доказательство. Утверждение следует сразу из (4). Интеграл в равенстве (4) вычислен при $q=\infty$, например, в [3, с. 80, Т. А2].

Отметим, что Ж. Фавар нашел в [4] наилучший метод приближения функции f из $\widetilde{W}_\infty^r$ среди методов вида

$$f(x)\approx a_0(f)/2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx). \tag{5}$$

Мы получили в теореме 1, что экстремальный метод рассматриваемой здесь задачи имеет тот же вид. Теорема 1 (при $q=\infty$) показывает, что метод приближения тригонометрическими многочленами, найденный Фаваром, имеет более глубокое экстремальное свойство — этот метод является наилучшим методом приближения не только среди тригонометрических методов вида (5), но и среди всех методов (даже и нелинейных), которые используют только первые $2n+1$ коэффициентов ряда Фурье.

Замечание 1. Оператор $T_n^*: f \to S_f^*$, определенный в теореме 1, является линейным тригонометрическим оператором. Интересно было бы показать, что этот оператор является экстремальным, т. е.

$$\sup_{f \in \widetilde{W}_q^r} \| T_n^* f - f \|_C = \inf_{T_n} \sup_{f \in \widetilde{W}_q^r} \| T_n f - f \|_C,$$

где inf берется по всевозможным линейным тригонометрическим операторам, которые отображают $\widetilde{W}_q^r$ на множестве всех тригонометрических многочленов степени n. Это утверждение верно, например, при $q=2$ и $q=\infty$. В остальных случаях вопрос остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Смоляк. Об оптимальном восстановлении функции и функционалов от них. Диссертация, Москва, 1965.
2. Н. С. Бахвалов. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. *Журнал выч. мат. и мат. физ.*, **11**, 1971, № 4, 1014—1018.
3. В. Н. Малоземов. Совместное приближение функции и ее производных. Ленинград, 1973.
4. J. Favard. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques. *Bull. Sci. Math.*, **61**, 1937, 209—224, 243—256.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 5. 8. 1975