Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДНА СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗМНОЖЕНИЕМ

ИВАН З. ГАБРОВСКИ, В. В. ШУРЕНКОВ

Рассмотрено обобщение ветвящихся процессов с иммиграцией, описывающее класс систем массового обслуживания с размножением ожидающих заявок. Размножение заключается в том, что каждая ожидающая заявка в некоторые моменты времени, промежутки между которыми распределены экспоненциально, независимо от поведения остальных заявок может либо покинуть систему, либо превратиться в случайное число новых заявок.

1. Пусть ξ_t — однородная цепь Маркова, принимающая целые неотрицательные значения, у которой вероятности перехода за маленький промежуток времени Δ задаются следующим образом: для $k>s$ (s — фиксированное натуральное число) имеем

$$(0)\qquad P\left\{(\xi_t=k)\to \begin{matrix}\xi_{t+\Delta}=k+j\\ \xi_{t+\Delta}=k-1\\ \xi_{t+\Delta}=k\end{matrix}\right\}=\begin{cases}[(k-s)a_j+b_j]\Delta+o(\Delta), \ (j\geqq 1);\\ [(k-s)a_0+sb_0]\Delta+o(\Delta);\\ 1-[(k-s)a+b+sb_0]\Delta+o(\Delta),\end{cases}$$

где $a_j\geqq 0$ при $j=0, 1, \dots$; $a=a_0+a_1+\cdots$; $b_j\geqq 0$ при $j=1, 2, \dots$ $b=b_1+b_2+\cdots$, $b_0>0$; если $s>k\geqq 1$, то

$$P\left\{(\xi_t=k)\to \begin{matrix}\xi_{t+\Delta}=j+k\\ \xi_{t+\Delta}=k-1\\ \xi_{t+\Delta}=k\end{matrix}\right\}=\begin{cases}b_j\Delta+o(\Delta), \ (j\geqq 1),\\ kb_0\Delta+o(\Delta);\\ 1-[kb_0+b]\Delta+o(\Delta),\end{cases}$$

и если $k=0$, то

$$P\left\{(\xi_t=0)\to \begin{matrix}\xi_{t+\Delta}=j\\ \xi_{t+\Delta}=0\end{matrix}\right\}=\begin{cases}b_j\Delta+o(\Delta), \quad (j\geqq 1);\\ 1-b\Delta+o(\Delta).\end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о том, насколько корректно такое задание процесса ξ_t. Согласно [1] всегда существует однородный марковский процесс с вышеуказанными переходами и если таких процессов существует более одного, то их существует бесконечно много. Для выяснения вопроса об единственности процесса следует рассмотреть обратную систему линейных дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ процесса ξ_t. Вид этой системы уравнений, однако, здесь неважен. Феллер показал [1], что эта система всегда имеет „минимальное" (в некотором вполне определенном смысле) решение $\pi_{ij}(t)$, такое, что

$$\pi_{ij}(t)\geqq 0,\ \pi_{ij}(t+u)=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{ik}(t)\pi_{kj}(u),\quad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_{ij}(t)\leqq 1$$

и что это решение будет единственным в классе всех решений $p_{ij}(t)$, являющихся распределениями вероятностей по $j=0, 1, \dots$, если

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij}(t) = 1. \tag{1}$$

Кроме того, [1] минимальное решение удовлетворяет прямой системе линейных дифференциальных уравнений Колмогорова. Эта система имеет вид: если $j \geq s$, то

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -[(j-s)a + sb_0 + b]\, p_{ij}(t) + [(j-s+1)a_0 + sb_0]\, p_{i\, j+1}(t)$$

$$+ \sum_{k=s}^{j-1} [(k-s)a_{j-k} + b_{j-k}]\, p_{ik}(t) + \sum_{k=0}^{s-1} b_{j-k}\, p_{ik}(t);$$

если $j < s$, то $\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -[jb_0 + b]\, p_{ij}(t) + (j+1) b_0\, p_{i j+1}(t) + \sum_{k=0}^{j-1} b_{j-k}\, p_{ik}(t)$;

(здесь положено $\Sigma_{k=0}^{-1} = 0$ и $\Sigma_{k=s}^{s-1} = 0$).

Введем производящие функции

$$\pi_i(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij}(t) z^j, \quad \alpha(z) = a_0 - az + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{j+1},$$

$$\beta(z) = sb_0 - (sb_0 + b)z + \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{j+1}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

В терминах этих функций факт, что минимальное решение удовлетворяет прямой системе уравнений, записывается как:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_i(t, z) = \frac{\beta(z) - sb_0}{z} \pi_i(t, z) + \alpha(z) \frac{\partial}{\partial z} \pi_i(t, z) \tag{2}$$

$$+ \frac{sb_0 - s\alpha(z)}{z} [\pi_i(t, z) - \varphi_i(t, z)] + [(1-z)b_0 - \alpha(z)] \frac{\partial}{\partial z} \varphi_i(t, z) + sb_0,$$

где $\varphi_i(t, z) = \Sigma_{k=0}^{s-1} \pi_{ik}(t) z^k$. Далее, положим при $\lambda > 0$,

$$\pi_r^*(\lambda, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \pi_r(t, z)\, dt$$

и

$$\varphi_r^*(\lambda, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \varphi_r(t, z)\, dt.$$

Умножая обе части уравнения (2) на $e^{-\lambda t}$ и интегрируя по t от 0 до ∞, получим

$$\alpha(z) \frac{\partial}{\partial z} \pi_r^*(\lambda, z) = \left[\lambda - \frac{\beta(z) - sb_0}{z}\right] \pi_r^*(\lambda, z) - [sb_0 - s\alpha(z)] \frac{\pi_r^*(\lambda, z) - \varphi_r^*(\lambda, z)}{z} - sb_0 \varphi_r^*(\lambda, z) \tag{3}$$

$$- [(1-z)b_0 - \alpha(z)] \frac{\partial}{\partial z} \varphi_r^*(\lambda, z) - z^r.$$

Слагаемое z^r появилось за счет начальных условий прямой системы уравнений, $p_{ij}(+0) = \delta_{ij}$ и, следовательно, $\pi_r(+0, z) = z^r$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha(z)$ дифференцируема при $z = 1$. Тогда $\alpha(z) = O(1-z)$ при $z \to 1$ и так как $\partial \pi_r^*(\lambda, z)/\partial z$ монотонна по z, то

$$\lim_{z\to 1} \frac{\alpha(z)}{1-z} (1-z) \frac{\partial}{\partial z} \pi_r^*(\lambda, z)=0.$$

Поэтому $0=(\lambda+sb_0)\pi_r^*(\lambda, 1-0)-sb_0\pi_r^*(\lambda, 1-0)-1$, значит $\pi_r^*(\lambda, 1-0)=\lambda^{-1}$, что эквивалентно (1).

Пусть теперь $\partial\alpha(z)/\partial z\,|_{z=1}=+\infty$. Отсюда и из выпуклости и монотонности $\alpha(z)$ следует, что в интервале $(0, 1)$ существует ровно один корень уравнения $\alpha(z)=0$. Обозначим его через q. В интервале $(q, 1)$ функция $\alpha(z)$ отрицательна. Пусть $z\in(q, 1)$. Разделим обе части уравнения (3) на $\alpha(z)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что при любом $z_0\in(q, 1)$ имеет место равенство

$$\pi_r^*(\lambda, z)=\exp\{\int_{z_0}^{z}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}\pi_r^*(\lambda, z_0)$$
$$-\int_{z_0}^{z}\Phi_r(\lambda, y)\,\alpha^{-1}(y)\exp\{\int_{y}^{z}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}\,dy,$$

где через $\Phi_r(\lambda, y)$ обозначена сумма последних четырех слагаемых в (3). Так как

$$\int_{y}^{z}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx=-\infty$$

и $\pi_r^*(\lambda, q)<\infty$, то переходя к пределу в последнем выражении при $z_0\to q+0$ убеждаемся, что

$$\pi_r^*(\lambda, z)=-\int_{q}^{z}\frac{\Phi_r(\lambda, y)}{\alpha(y)}\exp\{\int_{y}^{z}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}\,dy, \tag{4}$$

причем нет необходимости устанавливать сходимость этого интеграла. Она следует из существования предела левой части равенства при $z_0\to q+0$ (левая часть от z_0 не зависит).

Далее предположим, что $\int_{1-0}^{1}\frac{dx}{\alpha(x)}=-\infty$, и запишем $\pi_r^*(\lambda, z)$ в виде

$$\pi_r^*(\lambda, z)=-\exp\{\int_{q+\varepsilon}^{z}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}\int_{q}^{z}\frac{\Phi_r(\lambda, y)}{\alpha(y)}\exp\{-\int_{q+\varepsilon}^{y}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}dy,$$

где $\varepsilon>0$ малое число, и перейдем к пределу при $z\to 1$. Раскрыв неопределенность по правилу Лопиталя, получаем

$$\pi_r^*(\lambda, 0)=\lim_{z\to 1}\frac{\Phi_r(\lambda, z)}{\lambda-(\beta(z)-sb_0)/z}=\frac{sb_0\pi_r^*(\lambda, 1-0)+1}{\lambda+sb_0},$$

откуда $\pi_r^*(\lambda, 1-0)=\lambda^{-1}$.

Пусть теперь $\int_{1-0}^{1}\frac{dx}{\alpha(x)}>-\infty$. Тогда из (4) следует

$$\pi_r^*(\lambda, 1-0)=-\int_{q}^{1}\frac{\Phi_r(\lambda, y)}{\alpha(y)}\exp\{\int_{y}^{1}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}\,dy$$
$$=\int_{q}^{1}\frac{\Phi_r(\lambda, y)}{\lambda-(\beta(y)-sb_0)/y}\,d\exp\{\int_{y}^{1}\frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}\,dx\}. \tag{4'}$$

Функция $F_\lambda(y)=\exp\{\int_y^1 \frac{\lambda-(\beta(x)-sb_0)/x}{\alpha(x)}dx\}$ представляет собой функцию распределения вероятностей, сосредоточенная на $[q, 1]$. Для доказательства невозможности равенства (1) в этом случае покажем, что $\pi_r^*(\lambda, 1-0)$ зависит от r. Возьмем последовательность $\lambda_n \to \infty$ и построим диагональным методом такую последовательность натуральных чисел $r_m \to \infty$, чтобы для всех z существовал предел $\lim_{m\to\infty}\pi^*_{r_m}(\lambda_n, z)=u_n(z)$.

Очевидно, что $0\leq\lambda_n u_n(z)\leq 1$. Умножим обе части равенства (4′) на λ_n. Переходя потом к пределу в (4′) при $r_m\to\infty$, а затем по $\lambda_n\to\infty$, и замечая, что

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}\lim_{r_m\to\infty}\frac{\lambda_n\Phi_{r_m}(\lambda_n, y)}{\lambda_n-(\beta(y)-sb_0)/y}=0$$

и что последний предельный переход равномерен по $y\in[q, 1]$, получаем

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}\lim_{r_m\to\infty}\lambda_n\pi^*_{r_m}(\lambda_n, 1-0)=0,$$

что и доказывает невозможность равенства (1).

Таким образом доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Для единственности марковского процесса ξ_t с вероятностями перехода* (0) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$\int_{1-0}^{1}\frac{dx}{\alpha(x)}=-\infty, \tag{5}$$

где $\alpha(x)=a_0-ax+a_1x^2+a_2x^3+\cdots$

В дальнейшем будем предполагать, что (5) выполняется.

2. Перейдем к изучению предельного поведения $\pi_{rj}(t)$ при $t\to\infty$. Нас будет интересовать вопрос о том, когда $\lim_{t\to\infty}\pi_{rj}(t)=u_j$ не зависит от r и $u_0+u_1+u_2+\cdots=1$. Относительно существования этих пределов известно, что при выполнении весьма слабых условий регулярности они всегда существуют [1, 2]. Эти условия выполнены, если, например, $b_0>0$ и $b>0$. Кроме того, известно [2], что при выполнении этих условий сумма ряда с общим членом u_n равна либо 0 либо 1. Далее очевидно, что

$$\lim_{t\to\infty}\pi_r(t, z)=\sum_{j=0}^{\infty}u_jz^j=u(z),\quad u(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\pi_r^*(\lambda, z)\ (|z|<1).$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$ в равенстве (3) (предварительно умножив его на λ) получим, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\alpha(z)u'(z)=&-[(\beta(z)-sb_0)/z]u(z)-sb_0\varphi(z)\\ &-[sb_0-\alpha(z)][(u(z)-\varphi(z)]/z-[(1-z)b_0-\alpha(z)]\varphi'(z),\end{aligned}\tag{6}$$

где $\varphi(z)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda\varphi_r^*(\lambda, z)$. Для сокращения записи положим

$$\gamma(z)=-(\beta(z)-sb_0)/z=sb_0+\sum_{j=1}^{\infty}b_j(1-z^j),$$

$$\Phi(z)=sb_0\varphi(z)+[sb_0-\alpha(z)][u(z)-\varphi(z)]/z+[(1-z)b_0-\alpha(z)]\varphi'(z).$$

В этих обозначениях (6) перепишется как

$$\alpha(z)u'(z)=\gamma(z)u(z)-\Phi(z). \tag{7}$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha'(1)>0$ (возможно, что $\alpha'(1)=+\infty$). В этом случае в некоторой окрестности $(1-\varepsilon, 1)$ функция $\alpha(z)$ отрицательна. Решив уравнение (7), для $1-\varepsilon<z<z_0<1$ получаем

$$u(z)=\exp\{-\int_z^{z_0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}dx\}[u(z_0)+\int_z^{z_0}\frac{\Phi(y)}{\alpha(y)}\exp\{-\int_z^y\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}dx\}dy.$$

При $z_0\to 1$ имеем $-\int_z^{z_0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}dx\to+\infty$. Отсюда в силу ограниченности $u(z)$ следует равенство

$$u(1-0)=-\int_z^1\frac{\Phi(y)}{\alpha(y)}\exp\{-\int_z^y\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}dx\}dy.$$

Так как $\Phi(1-0)=sb_0u(1-0)<\infty$, то последнее равенство возможно лишь при $u(1-0)=0$. Значит, при $\alpha'(1)>0$ предельного распределения y процесса ξ_t не существует.

Пусть теперь $\alpha'(1)\leqq 0$. Перепишем (3) в виде

$$\alpha(z)\frac{d}{dz}\pi^*(z)=(\lambda-\frac{\beta(z)-\alpha(z)}{z})\pi^*(z)+[b_0(1-z)-\alpha(z)][\frac{s}{z}\varphi^*(z)-\frac{d}{dz}\varphi^*(z)]-z^r. \tag{8}$$

Для сокращения записи мы опускаем зависимость π^* и φ^* от λ и r. Используя тот же прием, что и при выводе формулы (4), получаем

$$\lambda\pi^*(z)=-\lambda\int_z^1\frac{b_0(1-y)-\alpha(y)}{\alpha(y)}[\frac{s}{y}\varphi^*(y)$$

$$-\frac{d}{dy}\varphi^*(y)]\exp\{\int_z^y\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x\alpha(x)}dx\}\exp\{-\lambda\int_z^y\frac{dx}{\alpha(x)}\}dy$$

$$+\int_z^1 y^r\exp\{\int_z^y\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x\alpha(x)}dx\}d_y[1-\exp\{-\lambda\int_z^y\frac{dx}{\alpha(x)}\}].$$

Замечая, что $1-\exp\{-\lambda\int_z^y dx/\alpha(x)\}$ как функция от y является функцией распределения вероятностей, сосредоточенной на $[z, 1)$, и что при $\lambda\to 0$ это распределение сходится к распределению, имеющему единичный атом в точке $z=1$, получаем при $\lambda\to 0$ в случае сходимости интегралов

$$\int_{1-0}^1\frac{1-y}{a(x)}dy, \tag{9}$$

$$\int_{1-0}^1\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}dx, \tag{10}$$

что

$$u(z)=\exp\{\int_z^1 \frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x\alpha(x)}dx \tag{11}$$
$$-\int_z^1 \frac{b_0(1-y)-\alpha(y)}{\alpha(y)}\psi(y)\exp\{\int_z^y \frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x\alpha(x)}dx\}\,dy\},$$

где $\psi(y)=\lim\limits_{\lambda\to 0}[\frac{s}{y}\lambda\varphi^*(y)-\frac{d}{dy}\lambda\varphi^*(y)]=\sum\limits_{k=0}^{s-1}(s-k)u_k y^{k-1}$.

Переходя в этом выражении к пределу при $z\to 1$, получаем, что $u(1-0)=1$.

Предположим теперь, что $\alpha'(1)<0$. В этом случае интеграл (9) сходится, а интеграл (10) может расходиться только к $-\infty$. Поэтому формула (11) имеет смысл и в случае расходимости интеграла (10). Опять, полагая в (11) $z\to 1$, получаем, что $u(1-0)=1$ или 0 в зависимости от того, сходится или расходится интеграл (10).

Далее, пусть $\alpha'(1)=0$ и интеграл (10) расходится к $-\infty$. В этом случае снова имеет смысл формула (11). Но если $\alpha'(1)=0$, то подынтегральное выражение в (11) неотрицательно. Поэтому $u(z)\leq 0$, следовательно $u(z)=0$. Осталось рассмотреть ситуацию, когда интеграл (10) равен $+\infty$. Перепишем уравнение (6) в виде

$$\alpha(z)\frac{d}{dz}u(z)=-\frac{\beta(z)-\alpha(z)}{z}u(z)+[b_0(1-z)-\alpha(z)]\psi(z).$$

Отсюда

$$u(z)=\exp\{\int_z^{z_0}\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x\alpha(x)}dx\}[u(z_0)$$
$$-\int_z^{z_0}\frac{[b_0(1-y)-\alpha(y)]\psi(y)}{\alpha(y)}\exp\{-\int_y^z\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{x\alpha(x)}dx\}\,dy].$$

Вычисляя предел этого выражения при $z_0\to 1$ видим, что

$$u(1-0)=-\frac{b_0\psi(1)}{\beta'(1)}\cdot \tag{12}$$

Нетрудно усмотреть, что расходимость интеграла (10) к $+\infty$ влечет дифференцируемость $\beta(z)$ при $z=1$. Поэтому из (12) следует, что

$$\beta'(1)<0 \tag{13}$$

является необходимым и достаточным условием существования предельного распределения в рассматриваемом случае и что $\psi(1)=-\beta'(1)/b_0$. Из вышеизложенного немедленно вытекает

Теорема 2. *Предельное распределение цепи Маркова ξ_t существует тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев:*

i) $\alpha'(1)<0$ *интеграл* (10) *сходится;*
ii) $\alpha'(1)=0$ *сходятся интегралы* (9) *и* (10);
iii) $\alpha'(1)=0$, $\beta'(1)<0$ *интеграл* (9) *расходится.*

3. Рассмотрим распределения максимума

$$\mu_k(t) = \sup_{0 \leqq \tau \leqq t} \xi_\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

на заданном интервале времени $[0, t]$, если известно, что $\xi_0 = k$.

Непосредственным следствием из соотношения (0) и формулы полной вероятности является следующее стохастическое соотношение:

$$(14) \quad \mu_r(t) = \begin{cases} \mu_r(t-\Delta) : 1 - [b + \min(r, s) b_0 + a \max(r-s, 0)]\Delta + o(\Delta), \\ \mu_{r+k}(t-\Delta) : [b_k + a_k \max(r-s, 0)]\Delta + o(\Delta), \ (k \geqq 1) \\ \max(r, \mu_{r-1}(t-\Delta)) : [a_0 \max(r-s, 0) + b_0 \min(r, s)]\Delta + o(\Delta), \end{cases}$$

где по определению положено $\mu_{-1}(t) \equiv 0$. Если $\mathrm{E} z^{\mu_k(t)} = m_k(t, z)$, $k = 0, 1, \ldots$ $|z| \leq 1$, то согласно (14) получаем

$$m_r(t, z) = [1 - (b + \min(r, s) b_0 + a \max(r-s, 0))\Delta] m_r(t-\Delta, z)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [b_k + a_k \max(r-s, 0)] m_{r+k}(t-\Delta, z)\Delta$$
$$+ [a_0 \max(r-s, 0) + b_0 \min(r, s)]\Delta \mathrm{E} z^{\max(r, \mu_{r-1}(t-\Delta))} + o(\Delta).$$

Переход к пределу в этом соотношении при $\Delta \downarrow 0$ ввиду того, что

$$\mathrm{E} z^{\max(r, \mu_{r-1}(t))} = \sum_{j=r-1} P\{\mu_{r-1}(t) = j\} z^{\max(r, j)}$$
$$= (z^r - z^{r-1}) P\{\mu_{r-1}(t) = r-1\} + m_{r-1}(t, z)$$

(ибо $\mu_{r-1}(t) \geqq r-1$), приводит к следующей системе дифференциальных уравнений относительно функции $m_r(t, z)$ $(r = 0, 1, \ldots)$:

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} m_r(t, z) = -[b + b_0 \min(r, s) + a \max(r-s, 0)] m_r(t, z)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [b_k + a_k \max(r-s, 0)] m_{r+k}(t, z) + [a_0 \max(r-s, 0)$$
$$+ b_0 \min(r, s)] [m_{r-1}(t, z) + (z^r - z^{r-1}) P\{\mu_{r-1}(t) = r-1\}]$$

с очевидным начальным условием $m_r(0, z) = z^r$, $r = 0, 1, \ldots$

Для обоснования этой системы надо показать, что производящие функции $m_r(t, z)$ непрерывны по t. Пусть $\xi_0 = k$ и t^* — первый момент, для которого $\xi_{t^*+0} \neq k$. Тогда

$$m_k(t, z) = z^k P\{t^* > t\} + \sum_{r \neq k} \int_0^t \mathrm{E} z^{\max(k, \mu_r(t-\tau))} P\{t^* \in d\tau, \xi_{\tau+0} = r\}$$
$$(16) \quad = z^k P\{t^* > t\} + \sum_{\substack{r = k-1 \\ r \neq k}} \int_0^t m_r(t-\tau, z) P\{t^* \in d\tau, \xi_{\tau+0} = r\}$$
$$+ (z^k - z^{k-1}) \int_0^t P\{\mu_{k-1}(t-\tau) = k-1\} P\{t^* \in d\tau, \xi_{\tau+0} = k-1\}.$$

Непрерывность правой части выражения (16) очевидна ввиду того, что $P\{t^*>t\}=\exp\{-\nu_k t\}$, $P\{t^*\in d\tau, \xi_{\tau+0}=r\}=\exp\{-\nu_k\tau\}\nu_{kr}d\tau$, $r\neq k$, $r\geqq k-1$, где

$$\nu_k=b+b_0\min(k, s)+a\max(k-s, 0),$$

$$\nu_{kr}=\begin{cases} b_{r-k}+a_{r-k}\max(k-s, 0), & (r\geqq k+1),\\ b_0\min(k, s)+a_0\max(k-s, 0), & (r=k-1).\end{cases}$$

Решение системы (15) будем искать в виде

$$m_k(t, z)=\sum_m C_m(t, z)\, p_{km}(t), \tag{17}$$

где $p_{km}(t)$ — переходные вероятности цепи Маркова ξ_t, а $C_m(t, z)$ подлежат определению.

Подставляя (13) в (11), получаем для $r=0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned}\sum_m\Big[\frac{\partial C_m(t, z)}{\partial t}p_{rm}(t)+C_m(t, z)\frac{dp_{rm}(t)}{dt}\Big]&=-[b+b_0\min(r, s)\\ +a\max(r-s, a)]\sum_m C_m(t, z)p_{rm}(t)&+\sum_{k=1}^{\infty}[b_k+a_k\max(r-s, 0)]\sum_m C_m(t, z)p_{r+km}(t)\\ &+[a_0\max(r-s, 0)+b_0\min(r, s)]\sum_m C_m(t, z)p_{r-1m}(t)\\ &+[a_0\max(r-s, 0)+b_0\min(r, s)](z^r-z^{r-1})P\{\mu_{r-1}(t)=r-1\}.\end{aligned}\tag{18}$$

Используя соотношения (0), нетрудно показать, что переходные вероятности $p_{ij}(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений $r=0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_{rm}(t)=&-[b+b_0\min(r, s)+a\max(r-s, 0)]p_{rm}(t)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}[b_k+a_k\max(r-s, 0)]\,p_{r+km}(t)\\ &+[b_0\min(r, s)+a_0\max(r-s, 0)]\,p_{r-1m}(t).\end{aligned}\tag{19}$$

С учетом (19) уравнения (18) принимают вид $r=0, 1, \ldots$

$$\sum_m\frac{\partial C_m(t, z)}{\partial t}p_{rm}(t)=[a_0\max(r-s, 0)+b_0\min(r, s)](z^r-z^{r-1})P\{\mu_{r-1}(t)=r-1\}. \tag{20}$$

Введем обозначения

$$B=\|(1-\delta_{kj})\nu_{kj}-\delta_{kj}\nu_k\|,\quad k, j\geqq 0,\ P(t)=\exp\{-Bt\}=\|p_{kj}(t)\|,\quad k, j\geqq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{c}(t, z)=\Big(\frac{\partial}{\partial t}C_0(t, z), \frac{\partial}{\partial t}C_1(t, z), \ldots\Big),$$

$$\boldsymbol{d}(t, z)=(0,\ b_0(z-1)P\{\mu_0(t)=0\},\ 2b_0(z^2-z)P\{\mu_1(t)=1\}, \ldots$$

$$(s-1)b_0(z^{s-1}-z^{s-2})P\{\mu_{s-2}(t)=s-2\},\ sb_0(z^s-z^{s-1})P\{\mu_{s-1}(t)=s-1\},$$

$$(a_0+sb_0)(z^{s+1}-z^s)P\{\mu_s(t)=s\},\ (2a_0+sb_0)(z^{s+2}-z^{s+1})P\{\mu_{s+1}(t)=s+1\},\ \ldots),$$

$$\boldsymbol{m}(t,z)=(m_0(t,z),\ m_1(t,z),\ \ldots),$$

(здесь $\boldsymbol{m}(t,z)$, $\boldsymbol{c}(t,z)$ и $\boldsymbol{d}(t,z)$ — векторы столбцы).

Тогда уравнения (20) примут следующий матричный вид

$$P(t)\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{c}(t,z)=\boldsymbol{d}(t,z). \tag{21}$$

Согласно (17) уравнение (21) будем решать при начальном условии $\boldsymbol{c}(0,z)=\{1,z,z^2,\ldots\}$. Решая (21), находим

$$\boldsymbol{c}(t,z)=\boldsymbol{c}(0,z)+\int_0^t \exp\{-B\tau\}\boldsymbol{d}(\tau,z)d\tau, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{m}(t,z)=P(t)\boldsymbol{c}(0,z)+\int_0^t P(t-\tau)\boldsymbol{d}(\tau,z)d\tau,$$

откуда

$$P\{\mu_0(t)=0\}=p_{00}(t)-b_0\int_0^t P_{01}(t-\tau)P\{\mu_0(\tau)=0\}d\tau,$$

$$P\{\mu_j(t)=j\}=p_{jj}(t)+jb_0\int_0^t p_{jj}(t-\tau)P\{\mu_{j-1}(\tau)=j-1\}d\tau$$

$$-(j+1)b_0\int_0^t p_{jj+1}(t-\tau)P\{\mu_j(\tau)=j\}d\tau,\quad 0\leqq j\leqq s,$$

$$P\{\mu_r(t)=r\}=p_{rr}(t)+[(r-s)a_0+sb_0]\int_0^t p_{rr}(t-\tau)P\{\mu_{r-1}(\tau)=r-1\}d\tau$$

$$-[(r+1-s)a_0+sb_0]\int_0^t p_{rr+1}(t-\tau)P\{\mu_r(\tau)=r\}d\tau\ \ (r\geqq s).$$

Поскольку из определения следует, что

$$P\{\mu_0(t)=0\}=P\{\sup_{0\leqq\tau\leqq t}\xi_\tau/\xi_0=0\}=e^{-bt},$$

то система уравнений (23) позволяет последовательно определить (при известных $p_{ij}(t)$) вероятности $P\{\mu_1(t)=1\}$, $P\{\mu_2(t)=2\},\ldots$, причем для их нахождения на каждом шагу приходится решать интегральное уравнение типа свертки.

После того, как вероятности $P\{\mu_j(t)=j\}$, $j=1,2,\ldots$ определены, нахождение $P\{\mu_j(t)=k\}$ $(k>j)$ не вызывает затруднений. В самом деле, используя (22), получаем

$$P\{\mu_r(t)=k\}=p_{rk}(t)+kb_0\int_0^t p_{rk}(t-\tau)P\{\mu_{k-1}(\tau)=k-1\}d\tau$$

$$-(k+1)b_0\int_0^t p_{rk+1}(t-\tau)P\{\mu_k(\tau)=k\}d\tau,\quad r\leqq k<s,$$

$$P\{\mu_r(t)=k\}=p_{rk}(t)+[(r-1)a_0+b_0]\int_0^t p_{rk}(t-\tau)P\{\mu_{k-1}(\tau)=k-1\}d\tau$$

$$-[(r+1-s)a_0+b_0]\int_0^t p_{rk+1}(t-\tau)P\{\mu_k(\tau)=k\}d\tau, \quad k\geq s.$$

4. Рассмотрим обслуживающую систему с ожиданием, состоящую из s одинаковых приборов. Приборы обслуживают заявки последовательно, и каждая заявка обслуживается только одним прибором. Время обслуживания одного требования подчинено показательному закону с параметром b_0. Заявки поступают в приборы в моменты, образующие поток Пуассона с параметром b. Пусть в каждый момент с вероятностью $b_k/b(k\geq 1, b>0, b_k\geq 0)$ поступают $k\geq 0$ заявок независимо от того, сколько их поступило до этого момента.

Предположим, что в этой системе каждая ожидающая заявка, независимо от других, за малый промежуток времени Δ превращается в $r(r\geq 0)$ одинаковых заявок с вероятностью $a_r\Delta$ $(a_r\geq 0, r\geq 0)$.

Для указанной системы величина ξ_t представляет длину очереди, и ее можно изучить вышеизложенным методом.

Авторы пользуются случаем выразить свою глубокую признательность И. И. Ежову, вниманию которого эта работа обязана своим появлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применение, т. 2. Москва, 1967.
2. К.-Л-Чжун. Однородные цепи Маркова. Москва, 1964.

Ж. к. Младост, бл. 47, ап. 122,
1184 София

Поступила 11. 8. 1975

Математический институт
Украинской академии наук
Киев