Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ ЭФФЕКТИВНОСТИ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ

Рассматривается управляемая система, поведение которой на фиксированном отрезке времени описывается линейным векторным дифференциальным уравнением. Заданы начальное состояние x системы и конечное целевое множество. Оптимальность управления этой системой понимается в смысле минимума интегрального выпуклого критерия эффективности, который, как и уравнения движения, зависит от параметра μ. Для этой задачи оптимального управления с подвижным правым концом изучается зависимость оптимального управления от начального состояния x и параметра μ.

1. Пусть поведение управляемой системы на отрезке $[t_0, T]$ описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t, \mu)x + B(t, \mu)u, \tag{1}$$

где $A(t, \mu)$ и $B(t, \mu)$ — непрерывные $n \times n$ и $n \times r$ матрицы — функции времени $t \in [t_0, T]$ и параметра μ, принадлежащего открытому подмножеству Ω m-мерного пространства R^m; фазовая траектория $x(t)$ находится в n-мерном пространстве R^n, а допустимыми управлениями являются все r-мерные измеримые с интегрируемой q-той степенью на отрезке $[t_0, T]$ функции $u(t) \in L_q[t_0, T]$ $(q > 1)$. Предположим, что для каждого $\mu \in \Omega$ матрица

$$M(\mu) = \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t, \mu)B(t, \mu)B'(t, \mu)(\Phi^{-1}(t, \mu))'dt$$

невырождена, где $\Phi(t, \mu)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\xi} = A(t, \mu)\xi$, нормированная в точке t_0, а $(')$ обозначает транспонирование.

Через $|p|$ будем обозначать норму конечномерного вектора p. Пусть $f(t, x, \mu)$ и $h(t, u, \mu)$ — непрерывные скалярные функции своих аргументов $t \in [t_0, T]$, $x \in R^n$, $\mu \in \Omega$ и функция f выпукла по x, а функция h строго выпукла по (u, μ). Предполагается, что существует непрерывная производная $\partial f(t, x, \mu)/\partial x$ и $f(t, x, \mu) \geqq 0$. Кроме того, существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что $h(t, u, \mu) \geqq \varkappa |u|^q$. Обозначим $Z = \{z = (x, \mu) \mid x \in R^n, \mu \in \Omega\}$. Если $u(t)$ — допустимое управление, $z = (x, \mu) \in Z$ и $x_u(t)$ — соответствующая управлению $u(t)$ в силу закона движения (1) траектория с начальным условием $x_u(t_0) = x$ при значении параметра μ, то в качестве критерия эффективности рассматривается функционал

$$\sigma(u, z) = \int_{t_0}^{T} (f(t, x_u(t), \mu) + h(t, u(t), \mu))dt. \tag{2}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 334—342.

Множеством достижимости $D(z)$ для $z \in Z$ называется множество точек $(\alpha, v) = (\sigma(u, z), x_u(T)) \in R^{n+1}$ соответствующих всевозможным допустимым управлениям $u(t)$. Если выполняются все сделанные предположения, то согласно [1] для каждой точки $z \in Z$ множество $D(z)$ замкнуто выпукло и имеет непустую внутренность.

Если $z = (x, \mu) \in Z$, $u(t)$ — допустимое управление, точка $v \in R^n$ и для соответствующей управлению $u(t)$ в силу закона (1) при значении параметра μ траектории $x(t)$ выполняется $x(t_0) = x$ и $x(T) = v$, то будем говорить, что управление $u(t)$ переводит фазовую точку из состояния x в состояние v при значении параметра μ.

Пусть G — непустое компактное выпуклое подмножество пространства R^n и точка $z = (x, \mu) \in Z$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления системой (1). Требуется среди всех допустимых управлений найти такое, которое переводит фазовую точку из состояния x в некоторое состояние $v \in G$ при значении параметра μ и минимизирует критерий эффективности (2). Согласно [1] для каждой точки $z \in Z$ существует единственное оптимальное управление $u(t, z)$, которое является решением этой задачи. Если соответствующую ему траекторию обозначим через $x(t, z)$, а минимальное значение критерия эффективности через $\sigma(z)$, то точка $y(z) = (\sigma(z), x(T, z))$ является граничной для множества $D(z)$.

Рассмотрим и задачу оптимального управления системой (1) с свободным правым концом, которая формулируется следующим образом. Пусть задана точка $z = (x, \mu) \in Z$. Для управляемой системы, которая в момент времени t_0 находится в состоянии x и поведение которой на отрезке $[t_0, T]$ описывается управлением (1) при значении параметра μ, требуется найти допустимое управление, которое минимизирует критерий (2). Согласно [1] для каждой точки $z \in Z$ существует единственное оптимальное управление $u^*(t, z)$, являющееся решением этой задачи. Если соответствующую ему траекторию обозначим через $x^*(t, z)$, а минимальное значение критерия эффективности (2) через $\sigma^*(z)$, то точка $y^*(z) = (\sigma^*(z), x^*(T, z))$ принадлежит границе множества $D(z)$.

Через $N(z)$ и $N^*(z)$ обозначим множества внешних нормалей с единичной длиной к множеству $D(z)$ соответственно в точках $y(z)$ и $y^*(z)$. Через $N_0(z)$ обозначим: а) множество единичных векторов (θ, γ), где θ — отрицательное число, а γ — внешняя нормаль к множеству G в точке $x(T, z)$, если точка $x^*(T, z)$ не принадлежит множеству G или б) единичную сферу S в R^{n+1}, если точка $x^*(T, z)$ принадлежит множеству G. Пусть $N_1(z) = N(z) \cap N_0(z)$. Множества $N(z)$, $N^*(z)$ и $N_0(z)$ замкнуты, а $N_1(z)$ непустое. Если $p = (\theta, \gamma) \in N_1(z)$ и $\psi(t)$ является решением уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f(t, x(t, z), \mu)}{\partial x} - \psi A(t, \mu) \tag{3}$$

с краевым условием $\psi(T) = \gamma$, а $H(t, p, \mu, u) = \theta h(t, u, \mu) + \psi(t) B(t, \mu) u$, то согласно [1] почти всюду на отрезке $[t_0, T]$ имеет место равенство

$$H(t, p, \mu, u(t, z)) = \max_u H(t, p, \mu, u). \tag{4}$$

Аналогичным образом определяется и управление $u^*(t, z)$ с помощью любого вектора $p^* \in N^*(z)$.

В дальнейшем доказывается, что для каждой точки $z \in Z$ оптимальные управления $u(t, z)$ и $u^*(t, z)$ являются непрерывными функциями времени, а в случае, когда $f(t, u, \mu) \equiv 0$, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для каждой точки $z_0 \in Z$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $z \in Z$ и $|z - z_0| < \delta$, то*

$$\max_{t_0 \leqq t \leqq T} |u(t, z) - u(t, z_0)| + \max_{t_0 \leqq t \leqq T} |x(t, z) - x(t, z_0)| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Для каждой точки $z_0 \in Z$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $z \in Z$ и $|z - z_0| < \delta$, то*

$$\max_{t_0 \leqq t \leqq T} |u^*(t,z) - u^*(t, z_0)| + \max_{t_0 \leqq t \leqq T} |x^*(t, z) - x^*(t, z_0)| < \varepsilon.$$

2. Для доказательства сформулированных теорем понадобятся некоторые результаты, которые имеют место и тогда, когда функция f не равняется тождественно нулю. В дальнейшем будем считать, что точка $z_0 = (x_0, \mu_0) \in Z$ фиксирована.

Лемма 1. *Если $p \in N(z_0)$ и функции $\psi(t)$, $u(t, z_0)$ и $x(t, z_0)$ для всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяют уравнениям* (1), (3) *и всюду на отрезке $[t_0, T]$ выполнено соотношение* (4), *то $u(t, z_0)$ является непрерывной функцией времени.*

Доказательство. В силу сделанных предположений функция $u(t, z_0)$ определяется однозначно всюду на отрезке $[t_0, T]$ из соотношения (4). Пусть $\tau \in [t_0, T]$, $u_0 = u(\tau, z_0)$ и ε — произвольное положительное число. Для $t \in [t_0, T]$ обозначим

$$G_1(t) = \max_u H(t, p, \mu_0, u), \quad G_2(t) = \max_{|u - u_0| \geqq \varepsilon} H(t, p, \mu_0, u).$$

Тогда $\delta(\tau) = G_1(\tau) - G_2(\tau) > 0$. Из непрерывности функции H следует, что существует такая окрестность Δ точки τ, что для всех $t \in \Delta$ и $u \in R^r$, для которых $|u - u_0| \leqq \varepsilon$, выполняется

$$|H(t, p, \mu_0, u) - H(\tau, p, \mu_0, u)| \leqq \delta(\tau)/4. \tag{5}$$

Но тогда для $t \in \Delta$

$$G_1(t) = \max_u H(t, p, \mu_0, u) \geqq H(t, p, \mu_0, u_0) \geqq G_1(\tau) - \delta(\tau)/4. \tag{6}$$

Докажем, что для $t \in \Delta$ имеет место и неравенство

$$G_2(t) < G_1(\tau) - \delta(\tau)/2. \tag{7}$$

Допустим, что существует точка u_1, $|u_1 - u_0| \geqq \varepsilon$ такая, что

$$H(t, p, \mu_0, u_1) = G_2(t) \geqq G_1(\tau) - \delta(\tau)/2. \tag{8}$$

Тогда для точки $u^* = u_0 + \nu^*(u_1 - u_0)$, где $\nu^* = \varepsilon / |u_1 - u_0|$, выполняется $|u^* - u_0| = \varepsilon$ и из (5), (8) и свойств функций f и h следует, что

$$\begin{aligned} G_1(\tau) - \delta(\tau) = G_2(\tau) &\geqq H(\tau, p, \mu_0, u^*) \geqq H(t, p, \mu_0, u^*) - \delta(\tau)/4 \\ &\geqq \nu^* H(t, p, \mu_0, u_1) + (1 - \nu^*) H(t, p, \mu_0, u_0) - \delta(\tau)/4 \\ &\geqq \nu^*(G_1(\tau) - \delta(\tau)/2) + (1 - \nu^*)(G_1(\tau) - \delta(\tau)/4) - \delta(\tau)/4 > G_1(\tau) - 3\delta(\tau)/4. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает (7). Из (6) и (7) для $t \in \Delta$ следует, что $G_1(t) - G_2(t) \geqq G_1(\tau) - \delta(\tau)/4 - G_1(\tau) + \delta(\tau)/2 = \delta(\tau)/4$, т. е. для всех $t \in \Delta$ имеет место $|u(t, z_0) - u(\tau, z_0)| \leqq \varepsilon$. Этим лемма доказана. Из этой леммы следует, что можем считать оптимальное управление $u(t, z_0)$ непрерывной функцией, которая определяется однозначным образом из соотношения (4) всюду на отрезке $[t_0, T]$. Аналогично доказывается и непрерывность функции $u^*(t, z_0)$.

Лемма 2. *Отображение $y^*(z)$ непрерывно в точке z_0.*

Доказательство. Пусть $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность точек $z_k \in Z$, которая сходится к z_0. Обозначим $u_k(t) = u^*(t, z_k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Из неравенства

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sigma^*(z_k) \leqq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma(u_0, z_k) = \sigma^*(z_0) \tag{9}$$

следует, что последовательность $\{u_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ ограничена в $L_q[t_0, T]$, а следовательно ограничена и последовательность $\{x^*(T, z_k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть v — произвольная предельная точка этой последовательности и $\{x^*(T, z_{k_\nu})\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ — сходящаяся к v подпоследовательность. Не ограничивая общности, можем считать, что последовавельность $\{u_{k_\nu}(t)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ слабо сходится к некоторой функции $u^*(t) \in L_q[t_0, T]$. Тогда эта функция переводит фазовую точку из состояния x_0 в точку v при значении параметра μ_0. Кроме того, из слабой сходимости последовательности $\{u_{k_\nu}(t)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ и свойств функции h согласно [1, теор. 8, с. 227] следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \inf \sigma^*(z_{k_\nu}) \geqq \sigma(u^*, z_0). \tag{10}$$

Пусть точка (α^0, v) принадлежит границе множества достижимости $D(z_0)$. Допустим, что $v \neq x^*(T, z_0)$. Из единственности оптимального управления $u^*(t, z_0)$ следует, что

$$\alpha^0 > \sigma^*(z_0). \tag{11}$$

Но тогда из (9) и (10) следует, что для всех достаточно больших ν

$$\alpha^0 - (\alpha^0 - \sigma^*(z_0))/4 \leqq \sigma^*(z_{k_\nu}) \leqq \sigma^*(z_0) + (\alpha^0 - \sigma^*(z_0))/4,$$

т. е. $\alpha^0 \leqq \sigma^*(z_0)$. Но это неравенство противоречит (11). Следовательно $\lim_{k\to\infty} x^*(T, z_k) = x^*(T, z_0)$. Тогда из (9) и (10) получается соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \inf \sigma^*(z_k) \geqq \sigma^*(z_0) \geqq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma^*(z_k),$$

которое означает, что $\lim_{k\to\infty} \sigma^*(z_k) = \sigma^*(z_0)$. Этим лемма доказана. Аналогично доказывается и следующая лемма.

Лемма 3. *Отображение $y(z)$ непрерывно в точке z_0.*

Пусть $a = (\alpha^*, v^*)$ — внутренняя точка множества $D(z_0)$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ через $Q(\varepsilon)$ обозначим множество тех точек $(\alpha, v) \in D(z_0)$, для которых существует такая точка $w \in G$, что если (α^0, v) принадлежит границе множества $D(z_0)$, то $\alpha \geqq \alpha^0 + \varepsilon$ и

$$|v - w| \leqq |v^* - w| + 1. \tag{12}$$

Множество $Q(\varepsilon)$ замкнуто и содержится в $D(z_0)$. Через D_0 обозначим множество граничных точек (α^0, v) множества $D(z_0)$, для которых существует точка $w \in G$ такая, что выполняется неравенство (12).

Лемма 4. *Для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что если $z \in Z$ и $|z-z_0|<\delta$, то $Q(\varepsilon)\subset D(z)$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0>0$ и такая последовательность точек $\{z_k\}$, $z_k \in Z$, $k=1, 2, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$ и последовательность $\{(\alpha_k, v_k)\}$, $k=1, 2, \ldots$ точек множества $Q(\varepsilon_0)$, $(\alpha_k-\varepsilon_0, v_k) \in D_0$, что $\lim_{k\to\infty}(\alpha_k, v_k)=(\alpha_0, v_0)$, но для $k=1, 2, \ldots$ точка $(\alpha_k, v_k) \notin D(z_k)$. Точка $(\alpha_0, v_0) \in Q(\varepsilon_0)$ и $(\alpha_0-\varepsilon_0, v_0) \in D_0$. Пусть точка (α_k^0, v_k) принадлежит границе множества $D(z_k)$. Тогда

$$\alpha_k<\alpha_k^0. \tag{13}$$

Если допустимое управление $u_0(t)$ переводит фазовую точку из состояния x_0 в состояние v_0 при значении параметра μ_0 так, что точка $(\sigma(u_0, z_0), v_0)$ принадлежит границе $D(z_0)$, то можем считать, что $u_0(t)$ является непрерывной функцией (см. доказательство леммы 1). Управление

$$u_k(t)=u_0(t)+B'(t, \mu_k)(\Phi^{-1}(t, \mu_k))' M^{-1}(\mu_k)\Phi^{-1}(T, \mu_k)(\zeta_k+v_k-v_0),$$

где

$$\zeta_k=-[\Phi(T, \mu_k)(x_k+\int_{t_0}^{T}\Phi^{-1}(t, \mu_k)B(t, \mu_k)u_0(t)dt)$$

$$-\Phi(T, \mu_0)(x_0+\int_{t_0}^{T}\Phi^{-1}(t, \mu_0)B(t, \mu_0)u_0(t)dt)],$$

переводит фазовую точку из состояния x_k в состояние v_k при значении параметра μ_k и при этом выполняется

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(u_k, z_k)=\sigma(u_0, z_0). \tag{14}$$

Но тогда из (13), (14) и сходимости последовательности $\{\alpha_k\}$, $k=1, 2, .$ к α_0 получается $\alpha_0-\varepsilon_0/4<\alpha_k<\alpha_k^0\leq\alpha_0-\varepsilon_0+\varepsilon_0/2=\alpha_0-\varepsilon_0/2$.

Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 5. *Для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$ что если $z \in Z$, $|z-z_0|<\delta$ и $p \in N(z)$, то найдется вектор $p_0 \in N(z_0)$ такой, что $|p-p_0|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $a=(\alpha^*, x(T, z_0))$ — внутренняя точка множества $D(z_0)$ и $y_0=y(z_0)$. Обозначим

$$\beta=\min_{p\in N(z_0)}|y_0-a|^{-1}p(y_0-a).$$

Из сделанных предположений следует, что $\beta>0$. Пусть

$$L=\{g \mid g\in R^{n+1}, |g|=1, |y_0-a|^{-1}g(y_0-a)=\beta/2\},$$

$$\varepsilon_1=\min_{g\in L}\min_{p\in N(z_0)}|g-p|.$$

Для $\varepsilon_0=\min[\varepsilon, \varepsilon_1]$ вводим обозначения:

$$V^* = \{g \mid g \in R^{n+1},\ g = \lambda g^0,\ |g^0| = 1,\ 0 < \lambda \leq 1,\ \min_{p \in N(z_0)} |g^0 - p| \leq \varepsilon_0\},$$

$$V = \{g \mid g \in R^{n+1},\ |g| = 1,\ \min_{p \in N(z_0)} |g - p| = \varepsilon_0\}.$$

Для каждого вектора $g \in V$ построим гиперплоскость H_g, проходящую через точку y_0 и ортогональную вектору g. Так как $g \notin N(z_0)$, то гиперплоскость H_g пересекает множество $D(z_0)$. Если Σ_g^+ — множество точек, принадлежащих множеству D_0 и расположенных в положительном по отношению к H_g полупространстве, то обозначим

$$\nu_g = \max_{(\alpha, v) \in \Sigma_g^+;\ (\alpha^*, v) \in H_g} |\alpha - \alpha^*| > 0.$$

Все числа $\nu_g > 0$ и $\nu = \min\{\nu_g \mid g \in V\} > 0$. Строим множество $Q(\nu/2)$ согласно лемме 4. Для каждого вектора $g \in V$ выбираем такую точку $\pi_g = (\alpha_g, v_g) \in Q(\nu/2)$, что если точка $(\alpha_g^*, v_g) \in H_g$, то $\alpha_g^* > \alpha_g + \nu/2$. Для каждого вектора $g \in V$ строим и гиперплоскость H_g^1, ортогональную вектору g, такую, что, если $(\alpha, v) \in H_g$ и $(\alpha^1, v) \in H_g^1$, то $\alpha = \alpha^1 + \nu/2$. Обозначим

$$\beta_0 = \min_{g \in V} \min\{|y - y_0| \mid y \in H_g^1\} > 0.$$

Пусть фиксирован вектор $p_0 \in N(z_0)$ и Γ_0 — ортогональная к p_0 и проходящая через точку y_0 гиперплоскость. Через Γ_1 обозначим гиперплоскость, проходящую через точку $y^1 = (\sigma(z_0) + \nu/2,\ x(T, z_0))$ и ортогональную вектору p_0. Из леммы 3 и леммы 4 следует, что существует такое число $\delta > 0$, что если $|z - z_0| < \delta$, то $Q(\nu/2) \subset D(z)$, $|y(z) - y_0| < \beta_0/2$ и точка $y(z)$ содержится в положительном по отношению к гиперплоскости Γ_1 полупространстве.

Докажем, что для этого числа δ лемма верна. Допустим, что существуют точка $z \in Z$, $|z - z_0| < \delta$ и вектор $s \in N(z)$ такие, что $s \notin V^*$. Пусть Γ — опорная гиперплоскость к множеству $D(z)$ в точке $y(z)$, ортогональная вектору s. Все внутренние точки множества $D(z)$ расположены в отрицательном по отношению к Γ полупространстве. Из включения $Q(\nu/2) \subset D(z)$ следует, что для каждого вектора $g \in V$ точка π_g удовлетворяет неравенству

$$s(y(z) - \pi_g) > 0. \tag{15}$$

Через Γ^* обозначим ортогональную вектору p_0 и проходящую через точку $y(z)$ гиперплоскость. Для всех двух точек $(\alpha, v) \in \Gamma_0$ и $(\alpha^*, v) \in \Gamma^*$ имеет место неравенство $\alpha^* \leq \alpha + \nu/2$, а если $\pi_g = (\alpha_g, v_g)$ и $(\alpha, v_g) \in \Gamma_0$, то $\alpha_g > \alpha + \nu/2$. Следовательно, для каждого вектора $g \in V$ точка π_g лежит в отрицательном по отношеню к Γ^* полупространстве и

$$p_0(\pi_g - y(z)) < 0. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что $p_0 \neq -s$. Так как $p_0 \in V^*$, а $s \notin V^*$, т. е.

$$\min_{p \in N(z_0)} |p - p_0| < \varepsilon_0, \quad \min_{p \in N(z_0)} |s - p| > \varepsilon_0,$$

то найдется число $\beta_1 \in (0, 1)$ такое, что вектор

(17) $$l=(\beta_1 p_0+(1-\beta_1)s)\,|\beta_1 p_0+(1-\beta_1)s|^{-1}\in V.$$

Строим гиперплоскости H_l и H_l^*, ортогональные вектору l и проходящие соответственно чрез точки y_0 и $y(z)$. Поскольку для всех двух точек $(\alpha, v)\in H_l$ и $(\alpha^*, v)\in H_l^*$ имеет место неравенство $\alpha^*\geqq\alpha-\nu/2$, то точка $\pi_l\in Q(\nu/2)$ расположена в положительном по отношению к гиперплоскости H_l^* полупространстве и, следовательно,

(18) $$l(\pi_l-y(z))>0.$$

Но из (15), (16) и (17) следует неравенство

$$|\beta_1 p_0+(1-\beta_1)s|\;l\,(\pi_l-y(z))=\beta_1 p_0(\pi_l-y(z))+(1-\beta_1)s(\pi_l-y(z))<0,$$

которое противоречит неравенству (18). Это противоречие доказывает лемму. Проще доказывается следующая лемма.

Лемма 6. *Для любого числа $\varepsilon<0$ существует такое число $\delta>0$, что если $z\in Z$, $|z-z_0|<\delta$ и $p\in N_0(z)$, то найдется такой вектор $p_0\in N_0(z_0)$, что $|p-p_0|<\varepsilon$.*

Лемма 7. *Для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что если $z\in Z$, $|z-z_0|<\delta$ и $p\in N_1(z)$, то найдется такой вектор $p_0\in N_1(z_0)$, что $|p-p_0|<\varepsilon$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие последовательность $\{z_k\}$, $z_k\in Z$, $k=1, 2, \dots$, $\lim z_k=z_0$ и последовательность $\{p_k\}$, $p_k\in N_1(z_k)$, $k=1, 2, \dots$, $\lim p_k=p^*$, что

(19) $$p^*\notin N_1(z_0).$$

Так как $p_k\in N_1(z_k)=N(z_k)\cap N_0(z_k)$, то в силу лемм 5 и 6 существуют векторы $g_k\in N(z_0)$ и $g_k^0\in N_0(z_0)$ такие, что $\lim|g_k-p_k|=0$ и $\lim|g_k^0-p_k|=0$. Можем считать, что $\lim g_k=g$ и $\lim g_k^0=g^0$, где $g\in N(z_0)$ и $g_0\in N_0(z_0)$. Тогда

$$|g-p^*|\leqq|g-g_k|+|g_k-p_k|+|p_k-p^*|$$

$$|g^0-p^*|\leqq|g^0-g_k^0|+|g_k^0-p_k|+|p_k-p^*|$$

и, следовательно, $p^*=g=g^0\in N_1(z_0)$. Но это соотношение противоречит (19). Этим доказательство леммы закончено.

3. Переходим к доказательству теоремы 1, в которой дополнительно предполагается, что функция f тождественно равняется нулю. Рассмотрим снова функцию $H(t, p, \mu, u)=\theta h(t, u, \mu)+\psi(t)B(t, \mu)u$, где $t\in[t_0, T]$, $\mu\in\Omega$, $p=(\theta, \gamma)$ — единичный вектор в R^{n+1}, $u\in R^r$ и $\psi(t)$ — решение уравнения (3) с конечным условием $\psi(T)=\gamma$. Выбираем произвольное число $\varepsilon>0$ и для точек $\tau\in[t_0, T]$ и $t\in[t_0, T]$ вводим обозначение

$$G_1(t, p, \mu)=\max_u H(t, p, \mu, u),\quad G_2^\varepsilon(t, p, \mu)=\max_{|u-u(\tau, z_0)|\geqq\varepsilon} H(t, p, \mu, u).$$

Если $p_0\in N_1(z_0)$, то из однозначной определенности оптимального управления $u(t, z_0)$ из сооотношения (4) всюду на отрезке $[t_0, T]$ следует, что

$$\delta(\tau, p_0)=G_1(\tau, p_0, \mu_0)-G_2^\varepsilon(\tau, p_0, \mu_0)>0.$$

Из непрерывности функции H следует, что существуют окрестность $\Delta_1(\tau, p_0)$ точки τ, окрестность $\Delta_2(\tau, p_0)$ вектора p_0 и окрестность $\Delta_3(\tau, p_0)$ точки μ_0 такие, что, если $u\in R^r$, $|u-u(\tau, z_0)|\leqq\varepsilon$ и

$$(t, p, \mu) \in \Delta(\tau, p_0) = \Delta_1(\tau, p_0) \times \Delta_2(\tau, p_0) \times \Delta_3(\tau, p_0), \text{ то}$$

(20) $$|H(\tau, p_0, \mu_0, u) - H(t, p, \mu, u)| \leqq \delta(\tau, p_0)/4.$$

Тогда для $(t, p, \mu) \in \Delta(\tau, p_0)$ имеет место

(21) $$G_1(t, p, \mu) = \max_u H(t, p, \mu, u) \geqq H(t, p, \mu, u(\tau, z_0)) \geqq G_1(\tau, p_0, \mu_0) - \delta(\tau, p_0)/4.$$

Докажем, что для $(t, p, \mu) \in \Delta(\tau, p_0)$ выполняется и

(22) $$G_2^\varepsilon(t, p, \mu) < G_1(\tau, p_0, \mu_0) - \delta(\tau, p_0)/2.$$

Допустим, что существует такая точка $u^0 \in R^r$, $|u^0 - u(\tau, z_0)| \geqq \varepsilon$, для которой

(23) $$H(t, p, \mu, u^0) = G_2^\varepsilon(t, p, \mu) \geqq G_1(\tau, p_0, \mu_0) - \delta(\tau, p_0)/2.$$

Тогда для точки $u^* = u(\tau, z_0) + \nu^*(u^0 - u(\tau, z_0))$, где $\nu^* = \varepsilon / |u^0 - u(\tau, z_0)|$, выполняется $|u^* - u(\tau, z_0)| = \varepsilon$ и в силу (20), (23) и свойств функции h следует, что

$$\begin{aligned} G_1(\tau, p_0, \mu_0) - \delta(\tau, p_0) &= G_2^\varepsilon(\tau, p_0, \mu_0) \geqq H(t, p, \mu, u^*) - \delta(\tau, p_0)/4 > \nu^* H(t, p, \mu, u_0) \\ &+ (1-\nu^*) H(t, p, \mu, u(\tau, z_0)) - \delta(\tau, p_0)/4 \geqq \nu^*(G_1(\tau, p_0, \mu_0) - \delta(\tau, p_0)/2) \\ &+ (1-\nu^*)(G_1(\tau, p_0, \mu_0) - \delta(\tau, p_0)/4) - \delta(\tau, p_0)/4 > G_1(\tau, p_0, \mu_0) - 3\delta(\tau, p_0)/4. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает неравенство (22).

Из бесконечного открытого покрытия $\{\Delta_1(\tau, p_0)\}$ отрезка $[t_0, T]$ при фиксированном векторе $p_0 \in N_1(z_0)$ выбираем конечное подпокрытие $\{\Delta_1(\tau_i, p_0)\}$, $i = 1, \ldots, \nu(p_0)$. Пусть

$$\Delta_2(p_0) = \bigcap_{i=1}^{\nu(p_0)} \Delta_2(\tau_i, p_0).$$

Из бесконечного покрытия компактного множества $N_1(z_0)$ выбираем конечное подпокрытие $\{\Delta_2(p_0^j)\}$, $j = 1, \ldots, \nu$. Обозначим

$$\Delta_3(\varepsilon) = \bigcap_{1 \leqq j \leqq \nu} \Big(\bigcap_{1 \leqq i \leqq \nu(p_0^j)} \Delta_3(\tau_i, p_0^j) \Big).$$

Согласно лемме 7 существует такое число $\delta > 0$, что если $z = (x, \mu) \in Z$, $|z - z_0| < \delta$ и $g \in N_1(z)$, то $\mu \in \Delta_3(\varepsilon)$ и $g \in \cup \Delta_2(p_0^j)$. Пусть точка $z \in Z$ такая, что $|z - z_0| < \delta$ и $g \in N_1(z) \cap \Delta_2(p_0^{j_0})$, а t — произвольная точка отрезка $[t_0, T]$, которая принадлежит $\Delta_1(\tau_{i_0}, p_0^{j_0})$. Тогда согласно (21) и (22) имеет место

$$H(t, g, \mu, u(t, z)) - \max_{|u - u(\tau_{i_0}, z_0)| \geqq \varepsilon} H(t, g, \mu, u) > \delta(\tau_{i_0}, p_0^{j_0})/2 > 0,$$

т. е. $|u(t, z) - u(\tau_{i_0}, z_0)| < \varepsilon$. Аналогично $|u(t, z_0) - u(\tau_{i_0}, z_0)| < \varepsilon$. Следовательно $\max_{t_0 \leqq t \leqq T} |u(t, z) - u(t, z_0)| < 2\varepsilon$. Из доказанного легко следует утверждение теоремы. Доказательство теоремы 2 проводится аналогичным образом, принимая во внимание, что для всех $z \in Z$ вектор $(-1, 0, \ldots, 0)$ принадлежит $N^*(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. Москва, 1972.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 7. 10. 1975