Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only. Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints. Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ПОНЯТИЕ ПОИСКОВОЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

ДИМИТЪР Г. СКОРДЕВ

Я. Московакисом были введены понятия простой и поисковой вычислиомсти. Недавно автор обобщил первое из этих понятий, используя понятие комбинаторного пространства. В настоящей работе дается обобщение и второго из них. Доказывается одна теорема, связывающая определенным образом оба обобщения.

В работе [1] Я. Московакис ввел понятия простой и поисковой вычислимости (prime and search computability). В [2] автор настоящей работы предложил одно обобщение теории рекурсивных функций, использующее понятие комбинаторного пространства и охватывающее в качестве специального примера понятие абсолютной простой вычислимости. Это обобщение охватывает также общее понятие простой вычислимости с константами, полученными из данного множества — для этого достаточно причислить к исходным функциям все одноместные однозначные константные функции со значениями в этом множестве. Здесь будет показано, что, сузив упомянутое обобщение при помощи некоторого дополнительного предположения, можно охватить и понятие поисковой вычислимости с константами, полученными из данного множества. Терминология и обозначения из работы [2] будут использоваться без соответствующих ссылок. Упомянем только, что комбинаторные пространства — это определенный вид частично упорядоченных полугрупп с добавочными операциями, причем элементы этих полугрупп играют роль функций (возможно, многозначных), а полугрупповое умножение и частичный порядок играют соответственно роли композиции и включения.

Начнем с того, что, как заметил кто-то из учеников Московакиса (это было сообщено автору проф. Московакисом), всегда справедливо равенство (по поводу обозначений см. [1])

$$SC(A, \varphi_1, \ldots, \varphi_l) = PC(A, \varphi_1, \ldots, \varphi_l, U),$$

где U — многозначная функция с графиком $B^* \times B^*$ (т. е. $U(s) = B^*$ для любого s из B^*). Из этого равенства и сказанного выше насчет работы [2] ясно, что для обобщения понятия поисковой вычислимости уместно поискать подходящее обобщение многозначной функции U в рамках теории комбинаторных пространств.

Пусть $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F, \leq \rangle$ — некоторое итеративное комбинаторное пространство. Будем использовать буквы $\varphi, \psi, \theta, \chi$ (быть может, с индексами) как переменные для элементов множества $\mathfrak{F}$, а буквы x, y, z, u, v — как переменные для элементов множества $\mathfrak{C}$. О данном комбинаторном пространстве сделаем дополнительное предположение, что имеется элемент U множества $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям: $\forall x(x \leq U)$, $\forall x(Ux \leqq U)$, $\forall x(xU \leqq x)$, $L \leqq U$, $R \leqq U$. Заметим, что это дополнительное предположение выполняется, например, в комбинаторных пространствах, построенных в примерах 3 и 9 работы [2], и в тех, которые рассматриваются в предложении 2 из [3], в комбинаторных пространствах, рассматриваемых в предложении 1 из [4], если L и R удовлетворяют условию $\forall sit(\langle s, i, t\rangle \in L \vee \langle s, i, t\rangle \in R \rightarrow i=0)$, и в тех, которые строятся при доказательстве предложения 2 из [5] (из предпоследнего примера видно, что U не обязан быть наибольшим элементом частично упорядоченного множества $\mathfrak{F}$).

Докажем некоторые свойства элемента U, а именно следующие:

$$\forall x(Ux = U),\ \forall x(xU = x),\ \forall \varphi\psi(\forall x(\varphi x \leqq \psi) \rightarrow \varphi U \leqq \psi),\ U^2 = U.$$

Для доказательства этих свойств заметим прежде всего, что

$$\forall \varphi\psi(\forall x(\varphi x \leqq \psi) \rightarrow \forall y(\varphi \leqq \psi y)). \tag{1}$$

В самом деле, предположим, что φ и ψ удовлетворяют условию $\forall x(\varphi x \leqq \psi)$. Умножая неравенство $\varphi x \leqq \psi$ справа на y и используя равенства $xy = x$ и $y = yx$, получаем, что $\forall xy(\varphi x \leqq \psi yx)$, откуда следует, что $\forall y(\varphi \leqq \psi y)$.

Из (1) и обстоятельства, что $\forall x(Ux \leqq U)$, сразу вытекает первое из сформулированных свойств. Второе из этих свойств следует из того, что для любого x имеем $x = xx \leq xU$. Для доказательства третьего свойства предположим, что $\forall x(\varphi x \leqq \psi)$. Тогда в силу (1) можно утверждать, что $\forall y(\varphi \leqq \psi y)$. Следовательно, для любого y имеем $\varphi Uy \leqq \psi yUy \leqq \psi y$, откуда получаем, что $\varphi U \leqq \psi$. Четвертое свойство вытекает из первого и третьего и обстоятельства, что $\forall x(x \leq U)$.

Заметим, что в этих рассуждениях неравенства $L \leqq U$ и $R \leqq U$ не использовались, а использовались только первые три условия, относящиеся к U. Можно показать, что эти три условия, взятые вместе, эквивалентны требованию, чтобы элемент U был объединением множества $\mathfrak{C}$.

Определение. *Пусть Ψ — некоторое подмножество множества $\mathfrak{F}$. Будем называть квазирекурсивными относительно Ψ те элементы множества $\mathfrak{F}$, которые рекурсивны относительно $\Psi \cup \{U\}$.*

В силу сказанного выше понятие квазирекурсивности следует рассматриваться как обобщение понятия поисковой вычислимости.

Теорема. *Если $\Psi \subseteq \mathfrak{F}$ и φ квазирекурсивно относительно Ψ, то существует элемент ψ множества $\mathfrak{F}$, рекурсивный относительно Ψ и удовлетворящий условию $\psi(I, U) = \varphi$.*

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, заметим, что в условиях примера 3 работы [2] соотношение $\psi(I, U) = \varphi$ эквивалентно следующему условию: для любого s из M множество $\varphi(s)$ является теоретико-множественным объединением всех множеств вида $\psi(J(s, t))$, где $t \in M$. Таким образом, теорема в некотором смысле утверждает, что любой элемент множества $\mathfrak{F}$, квазирекурсивный относительно Ψ, является проекцией подходящего элемента, рекурсивного относительно Ψ.

Доказательство сформулированной теоремы распадается на 13 лемм; те из них, в которых U не упоминается, верны в любом комбинаторном пространстве.

Лемма 1. $\forall x(L(x, I) = x \,\&\, R(x, I) = I)$.

Доказательство. Для любого y имеем

$$L(x, I)\, y = L(xy, Iy) = L(x, y) = x = xy, \quad R(x, I)\, y = R(xy, Iy) = R(x, y) = y = Iy.$$

Лемма 2. $\forall\varphi(\varphi = \varphi L(I, U))$.

Доказательство. Для всех x имеем

$$\varphi L(I, U)x = \varphi L(Ix, Ux) = \varphi L(Ix, I)Ux = \varphi L(x, I)U = \varphi xU = \varphi x.$$

Лемма 3. $U = R(I, U)$.

Доказательство. Для любого x имеем $R(I, U)x = R(Ix, Ux) = R(Ix, I)Ux = R(x, I)Ux = IUx = Ux$.

Лемма 4. $\forall\varphi_1\psi_1\varphi_2\psi_2(\varphi_1 \leqq \varphi_2 \,\&\, \psi_1 \leqq \psi_2 \to (\varphi_1, \psi_1) \leqq (\varphi_2, \psi_2))$.

Доказательство. Если $\varphi_1 \leqq \varphi_2 \,\&\, \psi_1 \leqq \psi_2$, то для любого x имеем

$$(\varphi_1, \psi_1)x = (\varphi_1 x, \psi_1 x) = (I, \psi_1 x)\varphi_1 x \leqq (I, \psi_1 x)\varphi_2 x = (\varphi_2 x, \psi_1 x)$$
$$= (\varphi_2 x, I)\psi_1 x \leqq (\varphi_2 x, I)\psi_2 x = (\varphi_2 x, \psi_2 x) = (\varphi_2, \psi_2)x.$$

Лемма 5. $\forall\psi((I, U)\psi(I, U) = (\psi(L, LR), R^2)(I, U))$.

Доказательство. Обозначим $(\psi(L, LR), R^2)$ через τ. Для любых x и u имеем $\tau(x, I)u = \tau(x, u) = (\psi(L(x, u), LR(x, u)), R^2(x, u)) = (\psi(x, Lu), Ru) \leqq (\psi(x, Uu), Uu) = (I, Uu)\psi(x, Uu) = (I, U)\psi(x, U)$.

Следовательно, для любого x справедливо неравенство

$$\tau(x, I)U \leqq (I, U)\psi(x, U)$$

и поэтому $\tau(I, U)x = \tau(Ix, Ux) = \tau(x, I)U \leqq (I, U)\psi(x, U) = (I, U)\psi(x, Ux) = (I, U)\psi(I, U)x$.

Таким образом мы видим, что имеет место неравенство

$$\tau(I, U) \leqq (I, U)\psi(I, U).$$

Для доказательства обратного неравенства заметим, что для любых x, y и z имеем $(\psi(x, y), I)z = (\psi(x, y), z) = \tau(x, (y, z)) \leqq \tau(x, U)$.

Поэтому для любых x и y имеем $(\psi(x,y), I)U \leqq \tau(x, U)$ и, следовательно, $(I, U)\psi(x, I)\, y = (I, U)\psi(x, y) = (\psi(x, y), U) = (\psi(x, y), I)U \leqq \tau(x, U)$.

Отсюда мы получаем, что для любого x

$$(I, U)\psi(x, I)\, U \leqq \tau(x, U)$$

и, следовательно, $(I, U)\psi(I, U)\, x = (I, U)\psi(x, U) = (I, U)\psi(x, I)U \leqq \tau(x, U) = \tau(I, U)x$.

Лемма 6. $\forall\varphi\psi\theta x((\varphi x, \psi)\theta = (\varphi x, \psi\theta) \,\&\, (\varphi, \psi x)\theta = (\varphi\theta, \psi x))$.

Доказательство.

$$(\varphi x, \psi)\theta = (\varphi x, I)\psi\theta = (\varphi x, \psi\theta), \quad (\varphi, \psi x)\theta = (I, \psi x)\varphi\theta = (\varphi\theta, \psi x).$$

Лемма 7. $\forall\psi_1\psi_2((\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)) = (\psi_1(L, LR), \psi_2(L, R^2))\,(I, U))$.

Доказательство. Обозначим $(\psi_1(L, LR), \psi_2(L, R^2))$ через τ. Для любых x и u имеем $\tau(x, I)u = \tau(x, u) = (\psi_1(x, Lu), \psi_2(x, Ru)) \leqq (\psi_1(x, Uu), \psi_2(x, Uu)) = (\psi_1(x, U), \psi_2(x, U))$.

Поэтому для любого x имеем $\tau(x, I)U \leqq (\psi_2(x, U), \psi_2(x, U))$ и, следовательно,
$\tau(I, U)x = \tau(Ix, Ux) = \tau(x, I)U \leqq (\psi_1(x, U), \psi_2(x, U)) = (\psi_1(I, U), \psi_2(I, U))x$.

Таким образом мы видим, что справедливо неравенство

$$\tau(I, U) \leqq (\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)).$$

Для доказательства обратного неравенства заметим, что для любых x, y и z имеем $(\psi_1(x, y), \psi_2(x, z)) = \tau(x, (y, z)) \leqq \tau(x, U)$. Отсюда мы видим, что для любых x, y и z $(\psi_1(x, y), \psi_2(x, I))z \leq \tau(x, U)$ и, следовательно, для любых x и y $(\psi_1(x, y), \psi_2(x, I))U \leq \tau(x, U)$. Поэтому для любых x и y имеем $(\psi_1(x, I), \psi_2(x, U))y = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, U)) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, I)U) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, I))U \leq \tau(x, U)$. Следовательно, для любого x имеем

$$(\psi_1(x, I), (\psi_2(x, U))U \leq \tau(x, U)$$

и, значит, $(\psi_1(I, U), \psi_2(I, U))x = (\psi_1(x, U), \psi_2(I, U)x) = (\psi_1(x, I)U, \psi_2(I, U)x) = (\psi_1(x, I), \psi_2(x, U))U \leq \tau(x, U)$.

Лемма 8. $\forall \chi\varphi\psi\theta x((\chi \supset \varphi x, \psi x)\theta = (\chi\theta \supset \varphi x, \psi x))$.

Доказательство. $(\chi \supset \varphi x, \psi x)\theta = (I \supset \varphi x, \psi x)\chi\theta = (\chi\theta \supset \varphi x, \psi x)$.

Лемма 9. $\forall \varphi\psi((R \supset \varphi L, \psi L)(I, T) = \varphi \,\&\, (R \supset \varphi L, \psi L)(I, F) = \psi)$.

Доказательство. Для любого z имеем

$$(R \supset \varphi L, \psi L)(I, T)z = (R \supset \varphi L, \psi L)(z, T) = (T \supset \varphi z, \psi z) = \varphi z,$$

$$(R \supset \varphi L, \psi L)(I, F)z = (R \supset \varphi L, \psi L)(z, F) = (F \supset \varphi z, \psi z) = \psi z.$$

Лемма 10. $\forall \chi\varphi\psi\theta x((\chi x \supset \varphi, \psi)\theta = (\chi x \supset \varphi\theta, \psi\theta))$.

Доказательство. Докажем, что для любых $\chi, \varphi, \psi, \theta$ и x справедливо равенство

$$(\chi x \supset \varphi\theta, \psi\theta) = \tau(I, (\chi \supset T, F)x)\theta, \tag{2}$$

где $\tau = (R \supset \varphi L, \psi L)$.

В самом деле, для любого y имеем $\tau(I, (\chi \supset T, F)x)\theta y = \tau(\theta y, (\chi \supset T, F)x)$

$$= \tau(\theta y, I)(\chi \supset T, F)x = (\chi \supset \tau(\theta y, I)T, \tau(\theta y, I)F)x = (\chi x \supset \tau(\theta y, T), \tau(\theta y, F))$$

$$= (\chi x \supset \tau(I, T)\theta y, \tau(I, F)\theta y).$$

Применяя лемму 9, заключаем, что $\tau(I, (\chi \supset T, F)x)\theta y = (\chi x \supset \varphi\theta y, \psi\theta y) = (\chi x \supset \varphi\theta, \psi\theta)y$.

Из равенства (2) при $\theta = I$ получаем, что

$$(\chi x \supset \varphi, \psi) = \tau(I, (\chi \supset T, F)x). \tag{3}$$

Из (2) и (3) утверждение леммы вытекает непосредственно.

Лемма 11.

$$\forall \chi_1\varphi_1\psi_1\chi_2\varphi_2\psi_2(\chi_1 \leq \chi_2 \,\&\, \varphi_1 \leq \varphi_2 \,\&\, \psi_1 \leq \psi_2 \rightarrow (\chi_1 \supset \varphi_1, \psi_1) \leq (\chi_2 \supset \varphi_2, \psi_2)).$$

Доказательство. Если $\chi_1 \leq \chi_2 \,\&\, \varphi_1 \leq \varphi_2 \,\&\, \psi_1 \leq \psi_2$, то для любого x

$$(\chi_1 \supset \varphi_1, \psi_1)x = (\chi_1 x \supset \varphi_1 x, \psi_2 x) = (I \supset \varphi_1 x, \psi_1 x)\chi_1 x \leq (I \supset \varphi_2 x, \psi_2 x)\chi_2 x$$

$$= (\chi_2 x \supset \varphi_2 x, \psi_2 x) = (\chi_2 \supset \varphi_2, \psi_2)x.$$

Лемма 12. $\forall \psi_0\psi_1\psi_2((\psi_0(I, U) \supset \psi_1(I, U), \psi_2(I, U))$

$$= (\psi_0(L, LR) \supset \psi_1(L, R^2), \psi_2(L, R^2))(I, U).$$

Доказательство. Обозначим $(\psi_0(L, LR) \supset \psi_1(L, R^2), \psi_2(L, R^2))$ через τ. Для любых x и u имеем $\tau(x, I)u = \tau(x, u) = (\psi_0(x, Lu) \supset \psi_1(x, Ru), \psi_2(x, Ru)) \leq (\psi_0(x, Uu) \supset \psi_1(x, Uu), \psi_2(x, Uu)) = (\psi_0(x, U) \supset \psi_1(x, U), \psi_2(x, U))$.

Поэтому для любого x $\tau(x, I)U \leq (\psi_0(x, U) \supset \psi_1(x, U), \psi_2(x, U))$ и, следовательно, $\tau(I, U)x = \tau(Ix, Ux) = \tau(x, I)U \leq (\psi_0(x, U) \supset \psi_1(x, U), \psi_2(x, U)) = (\psi_0(I, U) \supset \psi_1(I, U), \psi_2(I, U))x$.

Таким образом доказано, что справедливо неравенство

$$\tau(I, U) \leq (\psi_0(I, U) \supset \psi_1(I, U), \psi_2(I, U)).$$

Для доказательства обратного неравенства заметим, что для всех x, y и z имеем $(\psi_0(x, I) \supset \psi_1(x, z), \psi_2(x, z))\, y = (\psi_0(x, y) \supset \psi_1(x, z), \psi_2(x, z)) = \tau(x, (y, z)) \leqq \tau(x, U)$.

Поэтому для произвольных x и z справедливо неравенство

$$(\psi_0(x, I) \supset \psi_1(x, z), \psi_2(x, z))U \leqq \tau(x, U)$$

и, следовательно,

$$(\psi_0(x, U) \supset \psi_1(x, I), \psi_2(x, I))z = (\psi_0(x, I)U \supset \psi_1(x, z), \psi_2(x, z))$$
$$= (\psi_0(x, I) \supset \psi_1(x, z), \psi_2(x, z))U \leqq \tau(x, U).$$

Отсюда получаем, что для любого x

$$(\psi_0(x, U) \supset \psi_1(x, I), \psi_2(x, I))U \leqq \tau(x, U)$$

и, следовательно, $(\psi_0(I, U) \supset \psi_1(I, U), \psi_2(I, U))x$

$$= (\psi_0(I, U)x \supset \psi_1(x, U), \psi_2(x, U)) = (\psi_0(I, U)x \supset \psi_1(x, I)U, \psi_2(x, I)U)$$
$$= (\psi_0(x, U) \supset \psi_1(x, I), (\psi_2(x, I))U \leqq \tau(x, U) = \tau(I, U)x.$$

Лемма 13. $\forall \psi_1\psi_2([\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]$

$$= L[(\psi_1(L, RLR), R^2), \psi_2(L, L^2R)](I, U).$$

Доказательство. Обозначим $[(\psi_1(L, RLR), R^2), \psi_2(L, L^2R)]$ через τ. Через $\mathfrak{M}_1$ обозначим множество тех θ из $\mathfrak{F}$, которые удовлетворяют неравенству $\theta \leqq L\tau(I, U)$. Так как множество $\mathfrak{M}_1$ содержит любой элемент множества $\mathfrak{F}$, являющийся объединением некоторого подмножества множества $\mathfrak{M}_1$, для доказательства неравенства

$$[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)] \leqq L\tau(I, U) \tag{4}$$

достаточно доказать, что $(\psi_2(I, U) \supset I, \theta\psi_1(I, U)) \in \mathfrak{M}_1$ для любого θ из $\mathfrak{M}_1$. Пусть $\theta \in \mathfrak{M}_1$. Тогда $(\psi_2(I, U) \supset I, \theta\psi_1(I, U)) \leqq (\psi_2(I, U) \supset I, L\tau(I, U)\psi_1(I, U)) = (\psi_2(I, U) \supset I, L\tau(\psi_1(I, U), U))$. Для любых x, y, z и v имеем

$$((\psi_2(x, y) \supset x, L\tau(\psi_1(x, z), v)) = (\psi_2(L, L^2R) \supset L, L\tau(\psi_1(L, RLR), R^2))(x, ((y, z), v))$$
$$= L(\psi_2(L, L^2R) \supset I, \tau(\psi_1(L, RLR), R^2))(I, ((y, z), v))x$$
$$= L\tau(I, ((y, z), v))x \leqq L\tau(I, U)x,$$

откуда заключаем, что для любых x, y, z и v

$$(\psi_2(x, I) \supset x, L\tau(\psi_1(x, z), v))\, y \leqq L\tau(I, U)x$$

и, следовательно, для любых x, z и v имеет место неравенство

$$(\psi_2(x, I) \supset x, L\tau(\psi_1(x, z), v))U \leqq L\tau(I, U)x,$$

а, значит (в силу леммы 8), и неравенство

$$(\psi_2(x, U) \supset x, L\tau(\psi_1(x, z), v)) \leqq L\tau(I, U)x.$$

Отсюда мы заключаем, что для любых x, z и v имеем

$$(\psi_2(x, U) \supset x, L\tau(\psi_1(x, z), I))v \leqq L\tau(I, U)x.$$

Следовательно, для любых x и z имеет место неравенство

$$(\psi_2(x, U) \supset x, L\tau(\psi_1(x, z), I))U \leqq L\tau(I, U)x.$$

а, значит (в силу леммы 10), и неравенство

$$(\psi_2(x, U)\supset x, L\tau(\psi_1(x, z), U))\leq L\tau(I, U)x.$$

Поэтому для любых x и z справедливо неравенство

$$(\psi_2(x, U)\supset x, L\tau(\psi_1(x, I), U))z\leq L\tau(I, U)x$$

и, следовательно, для любого x имеет место неравенство

$$(\psi_2(x, U)\supset x, L\tau(\psi_1(x, I), U))U\leq L\tau(I, U)x.$$

Отсюда (применяя леммы 10 и 6) мы заключаем, что для любого x

$$(\psi_2(x, U)\supset x, L\tau(\psi_1(x, U), U))\leq L\tau(I, U)x.$$

Поэтому для любого x имеем $(\psi_2(I, U)\supset I, L\tau(\psi_1(I, U), U))x\leq L\tau(I, U)x$ и, следовательно, $(\psi_2(I, U)\supset I, L\tau(\psi_1(I, U), U))\leq L\tau(I, U)$. Этим доказано, что $(\psi_2(I, U)\supset I, \theta\psi_1(I, U))\in\mathfrak{M}_1$. Так как это было доказано для произвольного θ из $\mathfrak{M}_1$, мы таким образом доказали неравенство (4).

Для доказательства обратного неравенства обозначим через $\mathfrak{M}_2$ множество тех θ из $\mathfrak{F}$, которые удовлетворяют неравенству $L\theta(I, U)\leqq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]$. Докажем сначала, что $\mathfrak{M}_2$ содержит любой элемент множества $\mathfrak{F}$, который является объединением некоторого подмножества множества $\mathfrak{M}_2$. Пусть $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}_2$ и θ_0 является объединением множества $\mathfrak{M}'$. Тогда для любого θ из $\mathfrak{M}'$ и любых x и u имеем $L\theta(x, u)=L\theta(I, u)x\leq L\theta(I, U)x \leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x$. Поэтому для любых x и u справедливо неравенство

$$L\theta_0(x, u)\leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x,$$

а, значит, и неравенство

$$L\theta_0(x, I)u\leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x.$$

Отсюда получаем, что для любого x имеет место неравенство

$$L\theta_0(x, I)U\leqq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x.$$

Оно может быть переработано в неравенство

$$L\theta_0(I, U)x\leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x.$$

Поэтому $L\theta_0(I, U)\leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]$, т. е. $\theta_0\in\mathfrak{M}_2$. Теперь для доказательства неравенства, обратного неравенству (4), достаточно доказать, что $(\psi_2(L, L^2R)\supset I, \theta(\psi_1(L, RLR), R^2))\in\mathfrak{M}_2$ для любого θ из $\mathfrak{M}_2$. Пусть $\theta\in\mathfrak{M}_2$. Обозначим $(\psi_2(L, L^2R)\supset I, \theta(\psi_1(L, RLR), R^2))$ через $\bar{\theta}$. Для любых x и u имеем

$$L\bar{\theta}(x, I)u=L\bar{\theta}(x, u)=(\psi_2(x, L^2u)\supset x, L\theta(\psi_1(x, RLu), Ru))$$
$$=(\psi_2(x, L^2u)\supset x, L\theta(I, Ru)\psi_1(x, RLu))\leq(\psi_2(x, U)\supset x, L\theta(I, U)\psi_1(x, U))$$
$$\leq(\psi_2(x, U)\supset x, [\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]\psi_1(x, U))$$
$$=(\psi_2(I, U)\supset I, [\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]\psi_1(I, U))x=[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x.$$

Поэтому для любого x справедливо неравенство

$$L\bar{\theta}(x, I)U\leqq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x,$$

которое может быть переработано в неравенство

$$L\bar{\theta}(I, U)x\leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]x.$$

Следовательно, $L\bar{\theta}(I, U)\leq[\psi_1(I, U), \psi_2(I, U)]$, т. е. $\bar{\theta}\in\mathfrak{M}_2$.

Лемма 13 таким образом доказана.

Теперь сформулированная выше теорема получается сразу на основании определения понятия квазирекурсивности и лемм 2, 3, 5, 7, 12 и 13.

Заметим, что при доказательстве теоремы можно обойтись и без леммы 12. В самом деле, определение рекурсивности, данное в [2], может быть упрощено за счет опускания операции Σ, так как можно доказать, что она выражается через I, L, R, T, F, композицию, операцию Π и итерацию при помощи равенства

$$\Sigma(\chi, \varphi, \psi) = R^2[(T, (T, \psi R^2)), L](\tau L, [(T, \varphi R), L])(\tau\chi, I),$$

где $\tau = R[(T, T), L](I, F)$ (в силу равенства $I = [T, T]$, в упомянутом определении может быть опущено также и I, однако это не ведет к дальнейшему упрощению доказательства теоремы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. N. Moschovakis. Abstract first order computability. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138**, 1969, 427—464.
2. D. Skordev. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **24**, 1976, № 1, 23—31.
3. Д. Г. Скордев. Некоторые топологические примеры итеративных комбинаторных пространств. *Доклады БАН*, **28**, 1975, № 12, 1575—1578.
4. Д. Г. Скордев. Некоторые комбинаторные пространства, связанные со сложностью переработки данных. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 1, 7—10.
5. Д. Г. Скордев. О частичном упорядочении множества $\mathfrak{C}$ в комбинаторных пространствах. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 2, 151—154.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 9. 10. 1975