Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ НОВОЙ МЕТРИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

ГЕОРГИ Л. ИЛИЕВ, АНДРЕЙ С. АНДРЕЕВ

Модифицирован второй алгоритм Ремеза для численного нахождения алгебраического многочлена наилучшего приближения непрерывной функции на конечном отрезке относительно одного расстояния, являющегося обобщением равномерного расстояния. Приведены численные эксперименты.

Будем означать через C_Δ множество непрерывных на отрезке $[a, b]=\Delta$ функций. Пусть $f, g \in C_\Delta$. Положим $s(f(x), g(y))=\max[|x-y|, |f(x)-g(y)|]$, $x, y \in \Delta$. Для фиксированной функции $G \in C_\Delta$ определим оператор $L_G(f;x) = \varepsilon(x) \min\{\varrho(f(x), G(y))| y \in \Delta\}$, где $\varepsilon(x)=\operatorname{sgn}(f(x)-G(x))$.

В [1] рассматривается следующее расстояние в C_Δ:

$$R_G(f, g)=\max_{x \in \Delta} |L_G(f;x)-L_G(g;x)|.$$

Отметим, что при $G(x)=0$, $R_G(f, g)$ — обычное равномерное расстояние в C_Δ. Для $f \in C_\Delta$ число $E_n^G(f)=\inf\{R_G(f, P)|P \in H_n\}$ будем называть наилучшим приближением функции f относительно R_G-расстояния между многочленами n-ой степени (как обычно H_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n). В [1] доказаны теоремы существования и единственности многочлена наилучшего R_G-приближения.

Для приближенного построения многочлена наилучшего R_G-приближения необходимы следующие две теоремы [1], (аналоги соответствующих теорем Чебышева и Валле-Пуссена).

Теорема 1. *Если $f \in C_\Delta$ — необходимое и достаточное условие для того, чтобы многочлен $P \in H_n$ являлся многочленом n-ой степени наилучшего R_G-приближения, функции f есть существование $n+2$ точек $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \leq b$, $(\Delta=[a, b])$ таких, что*

$$L_G(f;x_i)-L_G(P;x_i)=\varepsilon(-1)^i R_G(f, P), \ \varepsilon=+1 \text{ или } -1, \ i=1, \ldots, n+2.$$

Теорема 2. *Если $f \in C_\Delta$, $P \in H_n$, существуют $n+2$ точки $a \leq x_1 < \cdots < x_{n+2} \leq b$ и $n+2$ положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}$ такие, что*

$$L_G(f;x_i)-L_G(P;x_i)=(-1)^i \varepsilon \lambda_i, \ \varepsilon=+1 \text{ или } -1, \ i=1, \ldots, n+2,$$

то $\min\{\lambda_i \leq E_n^G(f)|1 \leq i \leq n+2\}$.

Изложим в алгоритмическом виде метод для приближенного построения многочлена наилучшего R_G-приближения для функции $f \in C_\Delta$, если $G \in \operatorname{Lip}_N 1$, $N>0$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 2, 1976, с. 360—364.

1. Возьмем такой многочлен $P_{n,0} \in H_n$, чтобы на отрезке Δ существовали $n+2$ точки $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+2}$, в которых $\operatorname{sgn}(f(y_i) - P_{n,0}(y_i)) = (-1)^i \varepsilon$, $\varepsilon = +1$ или -1.

2. Строим функцию $\Delta_G^{(0)}(x) = L_G(f; x) - L_G(P; x)$ (на практике это делается на конечном множестве точек).

3. Находим $n+2$ точки $x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \cdots < x_{n+2}^{(0)}$ такие, что $\operatorname{sgn} \Delta_G^{(0)}(x_i^{(0)}) = (-1)^i \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. При этом выбор точек такой, что величина $\min \{ |\Delta_G^{(0)}(x_i^{(0)})| \mid 1 \leq i \leq n+2 \}$ была наибольшей для всех возможных наборов из $n+2$ точек $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}\}$, удовлетворяющих условиям $\Delta_G^{(0)}(z_i) = (-1)^i \varepsilon$, $z_i \in \Delta$.

4. Если $\max \{ || \Delta_G^{(0)}(x_i)| - |\Delta_G^{(0)}(x_j)|| < \delta \mid i \neq j \}$, то считаем, что $E_n^G(f)$ найдено с точностью δ, $(\delta > 0)$, а многочлен $P_{n,0}$ принимаем как многочлен наилучшего R_G-приближения. В противном случае переходим к п. 5.

5. Строим $P_0 \in H_n$ как многочлен наилучшего равномерного приближения функции $\Delta_G^{(0)}$ на множестве точек $\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^{n+2}$.

6. Образуем многочлен $P_{n,1}(x) = P_{n,0}(x) + P_0(x)$ и переходим к п. 2, при этом везде индекс 0 заменяем 1.

Докажем сходимость алгоритма.

Лемма 1. *Пусть функции $f, g, G \in C_\Delta$ и обозначим*

$$F(x) = | L_G(f; x) - L_G(g; x) |; \qquad \Delta(x) = | f(x) - g(x) |.$$

Тогда для любого $x \in \Delta$ имеем $\Delta(x) - \omega(G; F(x)) \leq F(x) \leq \Delta(x)$, где $\omega(G : \delta)$ — модуль непрерывности функции G.

Отметим, что эта лемма аналогична теореме 2 из [1].

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathrm{Lip}_N\, 1$ и y_0, y_1 два произвольные числа, $\delta > 0$. Тогда, если $\varepsilon = \operatorname{sgn}(y_0 - y_1)$, то для любого $x \in \Delta$ имеет место неравенство*

$$|M_G(y_0 + \varepsilon\delta; x) - M_G(y_1; x)| \geq |M_G(y_0; x) - M_G(y_1; x)| + \theta\delta,$$

где $0 < \theta < 1$, $\theta = \theta(\delta, x)$, *а*

$$M_G(a; x) = \operatorname{sgn}(a - G(x)) . \min \{ \max [|x - y|, |a - C(y)|] \mid y \in \Delta \}.$$

Доказательство. Допустим для определенности, что $y_0 \geq y_1$. В силу леммы 1

$$M_G(y_0 + \delta; x) - M_G(y_0; x) \geq y_0 + \delta - y_0 - \omega(G; M_G(y_0 + \delta; x) - M_G(y_0; x)) = \delta - N[M_G(y_0 + \delta; x) - M_G(y_0; x)], \tag{1}$$

так как $G \in \mathrm{Lip}_N\, 1$. Из (1), поскольку $y_0 \geq y_1$, находим

$$M_G(y_0 + \delta; x) \geq \frac{\delta}{1+N} + M_G(y_0; x),$$

$$|M_G(y_0 + \varepsilon\delta; x) - M_G(y_1; x)| \geq \frac{\delta}{1+N} + |M_G(y_0; x) - M_G(y_1; x)|,$$

и тогда из [1] следует, что $M_G(y_0 + \delta; x) \geq M_G(y_1; x)$. Случай $y_0 \leq y_1$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Обозначим

$$A_i = \min [|\Delta_G^{(i)}(x_1^{(i)})|, \ldots, |\Delta_G^{(i)}(x_{n+2}^{(i)})|], \qquad L_i = \max [|\Delta_G^{(i)}(x_1^{(i)})|, \ldots, |\Delta_G^{(i)}(x_{n+2}^{(i)})|],$$

$$\varrho_i = \varepsilon(-1)^k [\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)}) - P_i(x_k^{(i)})]; \ \varepsilon = \pm 1, \ k = 1, 2, \ldots, n+2.$$

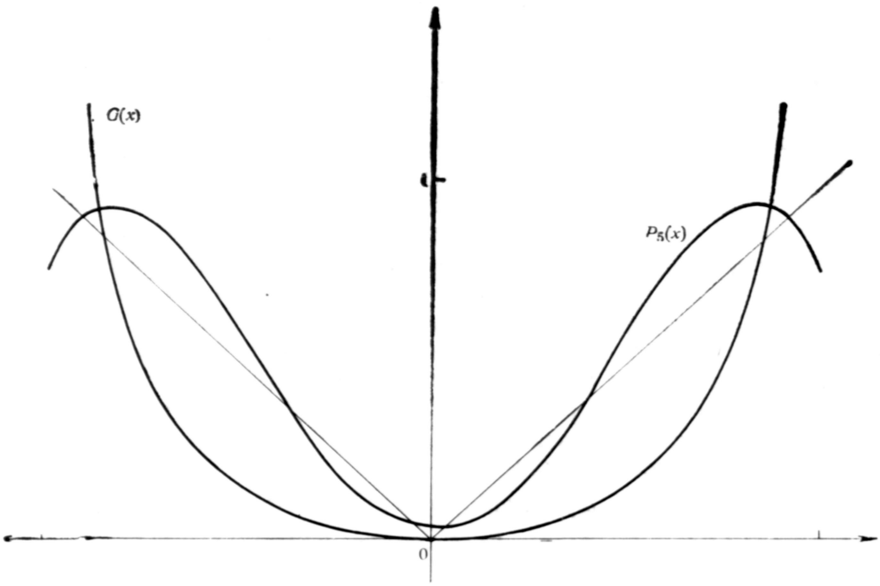

Рис. 1

Будем считать, что $\varrho_i>0$. В [2, с. 304] показано, что

$$\varrho_i=\sum_{k=1}^{n+2} d_{nk}^{(i)}|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|/\sum_{k=1}^{n+2} d_{nk}^{(i)}, \tag{2}$$

где $d_{nk}^{(i)}=1/(x_k^{(i)}-x_1^{(i)})(x_k^{(i)}-x_2^{(i)})\cdots(x_k^{(i)}-x_{k-1}^{(i)})(x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)})\dots(x_{n+2}^{(i)}-x_k^{(i)})$. Из (2) следует $A_i<\varrho_i<L_i$, а в точках $x_k^{(i)}$, для которых $|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|\le\varrho_i$, выполняется $|P_i(x_k^{(i)})|=\varrho_i-|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|$.

Так как $P_{n,i+1}(x)=P_{n,i}(x)+P_i(x)$, в точках $x_k^{(i)}$, где $|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|\le\varrho_i$ и $f(x_k^{(i)})>P_{n,i}(x_k^{(i)})$, имеем

$$P_{n,i+1}(x_k^{(i)})=P_{n,i}(x_k^{(i)})-(\varrho_i-|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|), \tag{3}$$

а в точках $x_k^{(i)}$, где $|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|\le\varrho_i$ и $f(x_k^{(i)})<P_{n,i}(x_k^{(i)})$, имеем

$$P_{n,i+1}(x_k^{(i)})=P_{n,i}(x_k^{(i)})+(\varrho_i-|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|). \tag{4}$$

Из леммы 2, (3) и (4) находим

$$\min_{|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|\le\varrho_i}|M_G(f;x_k^{(i)})-M_G(P_{n,i+1};x_k^{(i)})|\ge\min_{|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|\le\varrho_i}[|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|+\theta(\varrho_i-|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|)]$$

$$=\min_{|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|\le\varrho_i}[\theta\varrho_i+(1-\theta)|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})|]\ge\theta\varrho_i+(1-\theta)A_i.$$

Выбор точек $\{x_k^{(i+1)}\}_{k=1}^{n+2}$ показывает, что

$$A_{i+1} \geq \min_{|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})| \leq \varrho_i} |M_G(f;\ x_k^{(i)}) - M_G(P_{n,i+1}(x_k^{(i)}))|,$$

т. е.

(5) $$A_{n+1} \geq A_i + \theta(\varrho_i - A_i).$$

Из (2), (5) и из определения A_i следует

$$A_{i+1} - A_i \geq \theta(\varrho_i - A_i) = \theta \sum_{k=1}^{n+2} d_{nk}^{(i)}(|\Delta_G^{(i)}(x_k^{(i)})| - A_i) / \sum_{k=1}^{n+2} d_{nk}^{(i)}$$

$$\geq \theta d_{nl}^{(i)}(L_i - A_i) / \sum_{k=1}^{n+2} d_{nk}^{(i)} \geq (1-\delta)(L_i - A_i) \geq (1-\delta)(E_n^G(f) - A_i),$$

$$0 \leq \delta \leq 1 - \theta\, d_{nl}^{(i)} \Big/ \sum_{k=1}^{n+2} d_{nk}^{(i)} < 1,$$

или $E_n^G(f) - A_{i+1} \leq \delta(E_n^G(f) - A_i) \leq \cdots \leq \delta^{i+1}(E_n^G(f) - A_0)$.

Последное неравенство показывает, что

(6) $$\lim_{i\to\infty} A_i = E_n^G(f),$$

а так как $0 \leq L_i - A_i \leq (A_{i+1} - A_i)/(1-\delta)$, то

(7) $$\lim_{i\to\infty} L_i = E_n^G(f).$$

Сходимость процесса следует из (6) и (7).

Численные примеры. На основе описанного алгоритма составлена программа на алгоритмическом языке FOR—32 для „Минск-32". На отрезке $[-1,1]$ для функции $f(x) = |x|$ при фиксированной функции

$$G(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{1-x^2} - 1, & |x| \leq 0{,}999, \\ 100, & 0{,}999 < |x| \leq 1, \end{cases}$$

найден приближенно многочлен P_5 наилучшего R_G-приближения пятой степени и $E_5^G(f)$ (рис. 1). Многочлен

$$P_5(x) \approx -1{,}930887\, x^4 + 2{,}623468\, x^2 + 0{,}0480831$$

был получен после десяти итераций, а в качестве исходного многочлена использован многочлен наилучшего равномерного приближения пятой степени функции $|x|$ на множестве точек $x_i = -1 + i/3$, $i = 0, 1, \ldots, 6$.

Для наилучшего приближения получено $0{,}0400000 \leq E_5^G(|x|) \leq 0{,}0480831$

Отметим, что многочлен пятой степени наилучшего равномерного приближения функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$, [3, с. 73]

$$-1{,}065537\, x^4 + 1{,}930297\, x^2 + 0{,}067621$$

дает отклонение в равномерной метрике, равное $0{,}067621\ldots$ Эти результаты тоже получены программой при $G(x) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Илиев. Аппроксимация функций относительно одной новой метрики. *Доклады Болг. Акад. Наук.*, **28**, 1975, № 3, 299—302.
2. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Москва, 1966.
3. Е. Я. Ремез. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, 1969.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 1. 12. 1975