Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ANALYTISCHE FORTSETZUNG VON POTENZREIHEN

WOLFGANG GAWRONSKI, ROLF TRAUTNER

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung bzw. Modifikation des bekannten Carlsonschen Satzes über analytische Fortsetzung von Potenzreihen.

1. Gegeben sei die Potenzreihe

$$\psi(w)=\sum_{0}^{\infty} a_n w^n, \quad \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}=1. \tag{1}$$

Werden die Koeffizienten a_n durch eine ganze Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus interpoliert, d. h. es gilt

$$F(n)=a_n \quad \text{für} \quad n\geqq N, \tag{2}$$

so gibt Carlson [5] einen Zusammenhang zwischen dem Analytizitätsgebiet von $\psi(w)$ und dem Strahltypus

$$h_F(\varphi)=\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|F(re^{i\varphi})|}{r} \tag{3}$$

von $F(z)$ an. Für einen konvexen Bereich K (d. h. eine abgeschlossene konvexe Punktmenge $K\subset \mathbf{C}$, siehe [4]) heißt

$$k_K(\varphi)=\max_{z\in K} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) \tag{4}$$

Stützwinkelfunktion von K. Sei K der größte konvexe Bereich, so daß für (4) gilt

$$k_K(\varphi)=h_F(-\varphi), \tag{5}$$

so heißt $\bar{K}=\{z\in \mathbf{C}\,|\,\bar{z}\in K\}$ das Indikatordiagramm von $F(z)$. Dann besagt der

Satz von Carlson. a) *Ist $F(z)$ vom Exponentialtypus, so besitz- $\psi(w)$ eine eindeutige analytische Fortsetzung in die $w=0$ enthaltende Zusammenhangskomponente von $(e^{-K})^c\cup\{\infty\}$.*

b) *Ist K eine konvexe und beschränkte Menge, die in Richtung der imaginären Achse eine Breite $<2\pi$ hat, und falls $\psi(w)$ in dem $w=0$ und $w=\infty$ enthaltenden Teilgebiet von $(e^{-K})^c\cup\{\infty\}$ holomorph und eindeutig ist, so existiert eine ganze Funktion $F(z)$, deren Indikatordiagramm in $\bar{K}$ enthalten ist, und es gilt (2) für $n\in \mathbf{N}$.*

Bieberbach [4] wirft die Frage auf, ob man ähnliche Resultate erhalten kann, wenn die Interpolationsfunktion lediglich in einem Winkelraum

$$S_{\alpha,\beta}=\{z=re^{i\varphi}\,|\,-\beta<\varphi<\alpha,\ r>0\} \quad \alpha,\beta>0 \tag{6}$$

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 2, 1976, p. 365—375.

holomorph ist. Er verweist dabei auf MacIntyre [9]. Zu diesem Fragenkomplex zitieren wir folgende wichtige Resultate:

Satz von Lindelöf [7]. *Ist* $F(z)$ *in* $S_{\pi/2,\,\pi/2}$ *holomorph und dort gleichmäßig höchstens vom Minimaltypus der Ordnung* 1, *so ist* $\psi(w)$ *analytisch fortsetzbar nach* $\mathrm{C}^* = \{w \in \mathrm{C} \mid \operatorname{Re} w > 1 \ \operatorname{Im} w \neq 0\}$.

Satz von Bernstein [3], (in der Fassung von Agmon [1]). a) *Ist* $F(z)$ *holomorph und höchstens vom Minimaltypus der Ordnung* 1 *in* $S_{\alpha,\beta}$ $(0 < \alpha,\ \beta \leqq \pi/2)$, *so ist* $\psi(w)$ *analytisch im Gebiet* $G_{\alpha,\beta}$, *das von den exponentiellen Spiralen* $r_1(\varphi) = \exp(\varphi \tan\alpha)$ *und* $r_2(\varphi) = \exp((2\pi - \varphi)\tan\beta)$ *begrenzt wird.*

b) *Ist* $\psi(w)$ *analytisch in* $G_{\alpha,\beta}(0 < \alpha,\ \beta \leqq \pi/2)$, *so existiert zu jedem* $\alpha' \in (0, \alpha)$ *und* $\beta' \in (0, \beta)$ *eine Interpolationsfunktion* $F_{\alpha',\beta'}(z)$, *die in* $S_{\alpha',\beta'}$ *analytisch und dort höchstens vom Minimaltypus der Ordnung* 1 *ist.*

Für $\alpha = \beta = \pi/2$ umfaßt Teil a) den Satz von Lindelöf. Eine Verallgemeinerung des Teiles a) gibt Cowling [6] an, der für $F(z)$ in $S_{\alpha,\beta}$ einen positiven Typus zuläßt. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Carlsonschen Satz für den Fall zu modifizieren, in dem die Interpolationsfunktion in einem Winkelraum $S_{\alpha,\beta}$ analytisch ist, bzw. ein beschränktes Analytizitätsgebiet besitzen kann. Eine wesentliche Frage wird hierbei die einer Modifikation des Begriffes des Indikatordiagrammes sein.

2. Hierzu treffen wir zunächst einige topologische Vorbereitungen. Sei $h(\varphi)$ eine für $-\beta < \varphi < \alpha$ $(0 < \alpha,\ \beta \leqq \pi/2)$ definierte reelle Funktion, welche die trigonometrische Konvexitätsbedingung

$$h(\varphi_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h(\varphi_2)\sin(\varphi_3 - \varphi_1) + h(\varphi_3)\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \leqq 0 \tag{7}$$
$$\text{für} -\beta < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \alpha$$

erfüllt. (Aus (7) folgt die Stetigkeit von $h(\varphi)$, Titchmarsh [10].) Sei

$$H_h(\varphi) = \{z \mid \operatorname{Re} ze^{i\varphi} > h(\varphi)\} \tag{8}$$

(d. h. die Halbebene $\{z = x + iy \mid x\cos\varphi - y\sin\varphi > h(\varphi)\}$) und

$$K_{\alpha,\beta} = \bigcap_{-\beta < \varphi < \alpha} H_h(\varphi)^c, \tag{9}$$

dann heiße $\bar{K}_{\alpha,\beta}$ das Indikatordiagramm von $h(\varphi)$. Aus (9) folgt unmittelbar Konvexität von $K_{\alpha,\beta}$ und folgende Eigenschaft, da $0 < \alpha,\ \beta \leqq \pi/2$ ist:

$$x_0 + iy_0 \in K_{\alpha,\beta} \Rightarrow x + iy_0 \in K_{\alpha,\beta} \quad \text{für alle } x \leqq x_0, \tag{10}$$

die wir als Sternförmigkeit bzgl. $-\infty$ bezeichnen. Falls $\alpha < \pi/2$ oder $\beta < \pi/2$ gilt, wächst die Breite von $K_{\alpha,\beta}$ in Richtung der imaginären Achse über alle Grenzen für $x \to -\infty$. Bezeichnet für eine konvexe Menge K

$$k_K(\varphi) = \max_{z \in K} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) = \max_{z \in K}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \tag{11}$$

die Stützwinkelfunktion von K, so läßt sich die Beziehung zwischen $h(\varphi)$ und dem Indikatordiagramm $\bar{K}_{\alpha,\beta}$ durch

$$k_{K_{\alpha,\beta}}(-\varphi) = h(\varphi), \quad -\beta < \varphi < \alpha \tag{12}$$

beschreiben.

Ist umgekehrt eine konvexe Menge K gegeben, deren Stützwinkelfunktion (11) $k_K(\varphi)$ für $-\alpha<\varphi<\beta$ endlich ist, dann wird durch (12) eine Funktion $h(\varphi)$ für $-\beta<\varphi<\alpha$ erklärt, welche (7) erfüllt. Dabei entspricht der Konvexität von $K_{\alpha,\beta}$ die trigonometrische Konvexität von $h(\varphi)$ (Titchmarsh

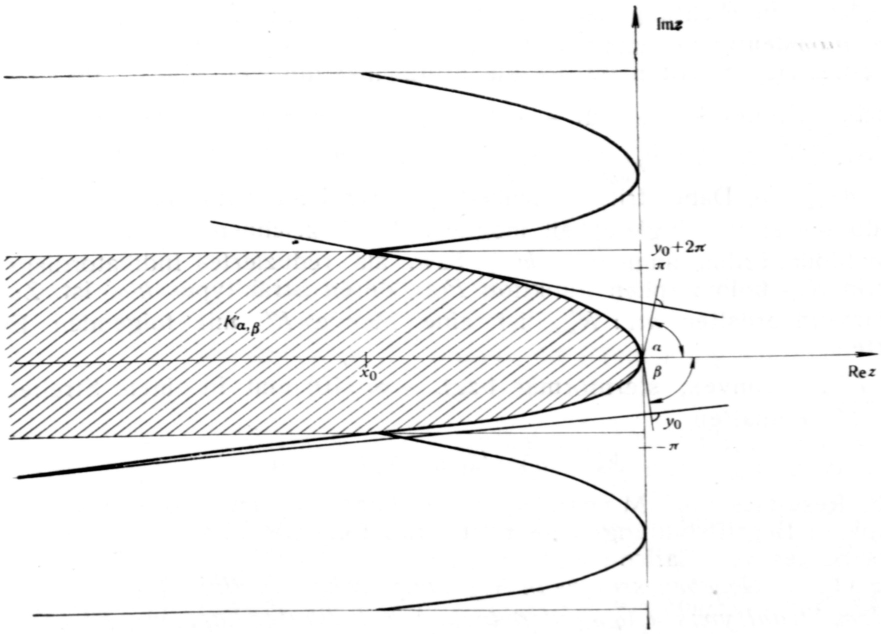

Fig. 1

[10]). Spätere Überlegungen verlangen folgende Verallgemeinerung des Indikatordiagramms. Sei

$$\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(K_{\alpha,\beta}+2\pi i n). \tag{13}$$

$(K+z_0=\{z=z'+z_0 \mid z'\in K\})$, dann erfüllt $\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}$ ebenfalls (10). Die Darstellung (13) von $\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}$ bestimmt $K_{\alpha,\beta}$ nicht eindeutig; d. h. bei vorgegebenem $\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}$ gibt es i. a. verschiedene konvexe Mengen K, die (10) erfüllen. Damit eine Modifikation des Carlsonschen Satzes so formuliert werden kann, daß notwendige und hinreichende Bedingungen möglichst „nahe zusammenliegen", wählen wir unter obigen $K_{\alpha,\beta}$ eine minimale konvexe Menge $K'_{\alpha,\beta}$ aus, die (13) erfüllt, d. h. für alle $K_{\alpha,\beta}$ in (13) gilt $K'_{\alpha,\beta}\subseteq K_{\alpha,\beta}$. Die Möglichkeit einer solchen Wahl erhalten wir aus folgender Konstruktion, die leicht aus geometrischen Überlegungen folgt (s. Fig. 1). Falls $\inf\{x \mid x+iy\in\partial\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}\}=x_0>-\infty$, existiert ein $y_0\in[-\pi,\pi)$ mit $x_0+iy_0\in\partial\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}$. Dann setzen wir

$$K'_{\alpha,\beta}=\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}\cap B_{y^0+\pi} \tag{14}$$

mit

$$B_{y_0} = \{x+iy \mid -\pi+y_0 \leqq y \leqq y_0+\pi\}. \tag{15}$$

Dabei ist $K'_{\alpha,\beta}$ eindeutig bestimmt, sobald y_0 eindeutig bestimmt ist, d. h. wenn $\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}$ ungleich einer Halbebene $\{z \mid \operatorname{Re} z > a\}$ ist. (Im letzten Fall darf $y_0 \in \mathrm{R}$ beliebig gewählt werden.) Falls $\inf \{x \mid x+iy \in \partial\mathfrak{K}_{\alpha,\beta}\} = -\infty$, hat $K_{\alpha,\beta}$ für jedes x in Richtung der imaginären Achse eine Breite$<2\pi$, und damit ist $K_{\alpha,\beta}$ eindeutig bestimmt, d. h. $K'_{\alpha,\beta} = K_{\alpha,\beta}$. Da $K'_{\alpha,\beta}$ stets in einem Parallelstreifen B_{y_0} enthalten ist, ist die Stützwinkelfunktion $k_{K'_{\alpha,\beta}}(\varphi)$ für $|\varphi| \leqq \pi/2$ endlich, während $k_{K_{\alpha,\beta}}(\varphi)$ für $-\pi/2 < \varphi < -\alpha$ bzw. für $\beta < \varphi < \pi/2$ unendlich ist. Aus $K'_{\alpha,\beta} \subseteq K_{\alpha,\beta}$ folgt $k_{K'_{\alpha,\beta}}(\varphi) \leqq k_{K_{\alpha,\beta}}(\varphi)$ für $-\alpha < \varphi < \beta$ also $k_{K'_{\alpha,\beta}}(-\varphi) \leqq h(\varphi)$ für $-\beta < \varphi < \alpha$. Dabei tritt Gleichheit in einer Umgebung von $\varphi = 0$ ein, ausserhalb dieser ist Ungleichheit möglich. Wir bezeichnen $\bar{K}'_{\alpha,\beta}$ als das reduzierte Indikatordiagramm von $h(\varphi)$ bzw. als reduziertes Indikatordiagramm einer in $S_{\alpha,\beta}$ holomorphen Funktion $F(z)$, deren Strahltypus $h(\varphi)$ ist. Zusammenfassend erhalten wir: $K'_{\alpha,\beta}$ ist eine Menge K' mit folgenden Eigenschaften:

(16) K' ist konvex, sternförmig bzgl. $-\infty$ (10) und in einem Streifen B_{y_0} (15) enthalten,

$$k_{K'}(-\varphi) \leqq h(\varphi), \quad -\beta < \varphi < \alpha. \tag{17}$$

3. Resultate von MacIntyre [9] über Laplacetransformationen und die obigen Begriffsbildungen gestatten nun folgende Modifikation des Teiles a) des Satzes von Carlson.

Satz 1. *Gegeben sei eine in $S_{\alpha,\beta}$ analytische Funktion $F(z)$* $(0 < \alpha,\ \beta \leqq \pi/2)$ *mit dem Strahltypus $h_F(\varphi)$ und reduziertem Indikatordiagramm $\bar{K}'_{\alpha,\beta}$. Sei $\psi(w)$ eine Potenzreihe* (1), *welche die Interpolationsbedingung für $n \in \mathrm{N}$ erfüllt*

Dann ist $\psi(w)$ analytisch fortsetzbar nach $\exp(-cK'_{\alpha,\beta})$.

Bemerkung 1. Die Behauptung des Satzes ist äquivalent zu der folgenden. $\psi(w)$ ist analytisch fortsetzbar in $\exp(-cK')c$, wobei K' eine Menge ist, die (16) und (17) erfüllt.

Beweis zu Satz 1. Da $F(z)$ in $S_{\alpha,\beta}$ vom Exponentialtypus ist, konvergiert die Laplacetransformierte

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz} F(t)\,dt \tag{18}$$

für $\operatorname{Re} z > h_F(0)$ und stellt dort eine analytische Funktion dar. Dabei ist der Integrationsweg die positive reelle Achse. O. B. d. A. sei $F(z)$ stetig ergänzbar in $z = 0$ (vgl. Bemerkung 2, ii). Wegen der Holomorphie von $F(z)$ in $S_{\alpha,\beta}$ darf der Integrationsweg durch einen beliebigen Strahl $\arg t = \varphi$ mit $\varphi \in (-\beta, \alpha)$ ersetzt werden. Also ist $f(z)$ analytisch in der Halbebene $H_h(\varphi)$ und damit (beachte die Bezeichnung (9)) analytisch in $K^c_{\alpha,\beta}$. $F(z)$ kann man aus ihrer Laplacetransformierten $f(z)$ mittels der Umkehrformel

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{zt} f(t)\,dt \tag{19}$$

erhalten, wobei Γ eine Jordankurve ist, die parallel zu $\partial K_{\alpha,\beta}$ verläuft (MacIntyre [9]). Wegen (2) folgt mit (19)

$$\psi(w)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty} w^n \int_{\Gamma} e^{nt}f(t)dt+a_0$$

und $(w=e^{-z})$

$$\psi(e^{-z})=\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty} e^{-zn} \int_{\Gamma} e^{nt}f(t)dt+a_0.$$

Für Re $z>\sup\{\operatorname{Re} t \mid t\in\Gamma\}$ können Summe und Integral vertauscht werden und demnach gilt dort

$$\psi(e^{-z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)e^{-(z-t)}}{1-e^{-(z-t)}}dt+a_0. \tag{20}$$

Da Γ beliebig nahe an $\partial K_{\alpha,\beta}$ gelegt werden kann, ist $\psi(e^{-z})$ analytisch für alle $z\neq t+2\pi i n$, $n\in Z$, $t\in K_{\alpha,\beta}$: d. h. (mit der Bezeichnung (13)) $\psi(w)$ ist analytisch fortsetzbar nach $\exp(-c\mathfrak{K}_{\alpha,\beta})$, woraus die Behauptung mit $\exp(-K'_{\alpha,\beta})$ $=\exp(-\mathfrak{K}_{\alpha,\beta})$ folgt.

Bemerkung 2. i) Da $K'_{\alpha,\beta}$ die Bedingung (10) erfüllt, ist $\exp(-K'_{\alpha,\beta})$ sternförmig bzgl. $w=0$; d. h. Satz 1 liefert eine untere Abschätzung für den Mittag-Leffler-Stern von $\psi(w)$. Sofern man nur diesen abschätzen will, ist Satz 1 wegen der schwächeren Voraussetzungen stärker als der Carlsonsche Satz. Andererseits liefert dieser Aussagen über ein nicht sternförmiges Analytizitätsgebiet.

ii) Satz 1 bleibt gültig, falls $F(z)$ nur für $|z|>N$ analytisch ist und die Interpolationsbedingung nur für $n>N$ besteht, denn

$$\psi(w)=\sum_{0}^{\infty} a_n w^n \quad \text{und} \quad \varphi(w)=\sum_{N}^{\infty} a_n w^{n-N}$$

besitzen im Endlichen dasselbe Analytizitätsgebiet.

4. Im folgenden untersuchen wir die Umkehrbarkeit von Satz 1. Sei also $\psi(w)$ analytisch fortsetzbar nach $(e^{-K'})^c$, wobei K' die Bedingung (16) erfüllt und für $|\varphi|\leq\pi/2$ eine endliche Stützwinkelfunktion $k_{K'}(\varphi)$ besitzt. Ziel ist es, eine interpolierende Funktion $F(z)$ zu finden, die für geeignete $\alpha,\beta\in(0,\pi/2]$ analytisch in $S_{\alpha,\beta}$ und dort vom Strahltypus $h_F(\varphi)$ ist, so daß die Umkehrung von (17) gilt, d. h.

$$h_F(\varphi)\leq k_{K'}(-\varphi),\quad -\beta<\varphi<\alpha. \tag{21}$$

Falls dies für $\alpha=\beta=\pi/2$ gilt, ist das reduzierte Indikatordiagramm von $h_F(\varphi)$ in dem vorgegebenen $\bar{K}'$ enthalten. Gilt $\alpha<\pi/2$ oder $\beta<\pi/2$, so läßt (21) nicht notwendig eine solche geometrische Interpretation zu. Wir werden zeigen, daß für $\alpha,\beta<\pi/2$ oder für beschränktes $(e^{-K'})^c$ stets ein solches $F(z)$ gefunden werden kann, wobei $F(z)$ sogar ganz ist. Bei unbeschränktem $(e^{-K'})^c$ und $\alpha=\pi/2$ oder $\beta=\pi/2$ können wir nur unter Zusatzbedingungen (Wachstumsbeschränkungen von $\psi(w)$ bei ∞) eine interpolierende Funktion $F(z)$ angeben. Deshalb machen wir folgende Fallunterscheidung:

1. Fall. $(e^{-K'})^c$ ist beschränkt. Dann existiert ein $r_0>0$ und ein $\varphi_0\in[-\pi,\pi)$, so daß $(e^{-K'})^c\subseteq\{w\mid |w|<r_0\}$ und $w_0=r_0e^{i\varphi_0}\in\partial(e^{-K'})$ gilt. (s. Fig. 2b) Für

$$\mathfrak{K}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(K'+2\pi in)$$

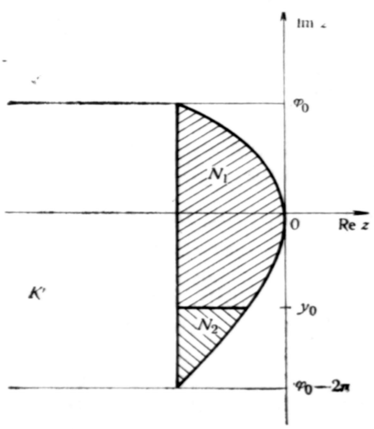

Fig. 2a

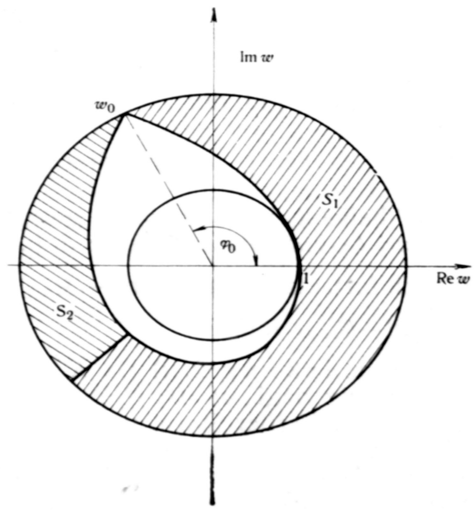

Fig. 2b

ist $x_0=-\log r_0=\min\{\{x\}\mid x+iy\in\partial\mathfrak{K}\}>-\infty$ (s. Fig. 2a, b). Sei $y_0\in(\varphi_0-2\pi,\varphi_0)$ dann sind die Mengen

$$N_1=K'\cap\{z=x+iy\mid x\geq x_0,\ y_0\leq y\leq\varphi_0\}$$
$$N_2=K'\cap\{z=x+iy\mid x\geq x_0,\ \varphi_0-2\pi\leq y\leq y_0\}$$
$$N=N_i\cap N_2$$

konvex. Ihre Stützwinkelfunktionen bezeichnen wir mit $k_{N_i}(\varphi)$ bzw. $k_N(\varphi)$ Die Mengen N_i, N werden vermöge $w=e^{-z}$ auf $S_i=e^{-N_i}$ bzw. $S=e^{-N}=S_1\cup S_2$ in der w-Ebene abgebildet. Wir definieren $\psi(w)=0$ für $r_0<|w|\leq\infty$. Damit ist $\psi(w)$ auf den beiden Zusammenhangskomponenten von $S^c\cup\{\infty\}$ erklärt und dort analytisch. Nach Aronszajn [2] existieren Funktionen

$$\psi_i(w)=\sum_0^\infty a_n^{(i)}w^n\quad(i=1,2)\ \text{mit}$$

(22) $\qquad\psi_i(w)$ ist analytisch auf $S_i^c\cup\{\infty\}\quad(i=1,2)$

und

(23) $\qquad\psi(w)=\psi_1(w)+\psi_2(w)$ für $w\in S^c\cup\{\infty\}$.

Die Funktionen $\psi_i(w)$ sind radial nach $w=\infty$ (einschließlich) analytisch fortsetzbar. Also existieren nach dem Satz von Carlson ganze Funktionen $F_i(z)$, der Ordnung 1 $(i=1, 2)$ mit Strahltypen $h_{F_i}(\varphi)$, so daß gilt

(24) $$h_{F_i}(\varphi) \leqq k_{N_i}(-\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \quad (i=1, 2)$$

und

(25) $$F_i(n) = a_n^{(i)}, \quad n \in \mathrm{N}\ (i=1, 2).$$

Setzen wir

(26) $$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

so folgt aus (23), (25), (26) die Interpolationsbedingung (2) für $n \in \mathrm{N}$. Für den Strahltypus $h_F(\varphi)$ der ganzen Funktion $F(z)$ gilt die Abschätzung

(27) $$h_F(\varphi) \leqq \sup\,(h_{F_1}(\varphi), h_{F_2}(\varphi)) \leqq \sup\,(k_{N_1}(-\varphi), k_{N_2}(-\varphi)) = k_N(-\varphi)$$

für alle φ. Die letzte Gleichung ist richtig, da die Stützwinkelfunktion von $N = N_1 \cup N_2$ gleich dem Supremum der Stützwinkelfunktionen den N_i ist. Insbesondere ist also (27) für $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ erfüllt. Zusammenfassend erhalten wir folgenden

Satz 2. *Gegeben sei eine Menge K', welche (16) erfüllt. Sei $\psi(w)$ (1) analytisch fortsetzbar nach $(e^{-K'})^c$ und $(e^{-K'})^c$ beschränkt.*

Dann existiert eine ganze Funktion $F(z)$, deren Strahltypus $h_F(\varphi)$ für $|\varphi| < \pi/2$ die Bedingung (21) erfüllt, und es gilt (2) für $n \in \mathrm{N}$.

2. Fall. $(e^{-K'})^c$ ist nicht beschränkt. Dann folgt, da K' (16) erfüllt, $K' \subseteq B_{y_0}$ für ein $y_0 \in [-\pi, \pi)$ (s. Fig. 3); d. h. $\psi(w)$ ist analytisch fortsetzbar bis ∞ (ausschließlich) längs einer glatten Kurve C folgender Gestalt

(28) C ist gleich einem Strahl $\arg w = \kappa_0$ oder eine Asymptote zu einem solchen Strahl.

Sei zunächst $C = \{w \mid \arg w = y_0\}$. Um jetzt eine geeignete Interpolationsfunktion zu erhalten, stellen wir wie beim Beweis des Carlsonschen Satzes die Koeffizienten a_n durch ein Cauchyintegral dar und ersetzen n durch die kontinuierliche Variable z. Also gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\psi(w)}{w^{n+1}}\, dw, \quad n \in \mathrm{N} \cup \{0\},$$

wobei γ eine einfach geschlossene in $(e^{-K'})^c$ verlaufende Jordankurve ist (s. Fig. 3b). Mit der Substitution $w = e^{-t}$ folgt

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \psi(e^{-t}) e^{nt}\, dt,$$

wobei Γ_σ $(e^{-\Gamma_\sigma} = \gamma)$ ein in K'^c verlaufender Jordanbogen ist, der folgende Bedingung erfüllt:

(29) Γ_σ verläuft im Analytizitätsgebiet von $\psi(e^{-t})$; die Endpunkte von Γ_σ sind $t_1 = \sigma + i(y_0 + \pi)$, $t_2 = \sigma + i(y_0 - \pi)$. (s. Fig. 3)

Die Funktion

(30) $$F_\sigma(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \psi(e^{-t}) e^{zt}\, dt$$

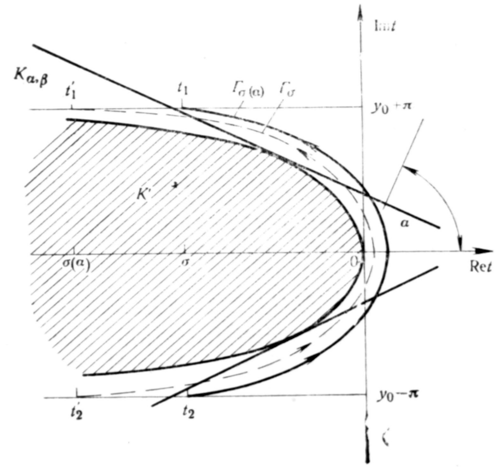

Fig. 3a

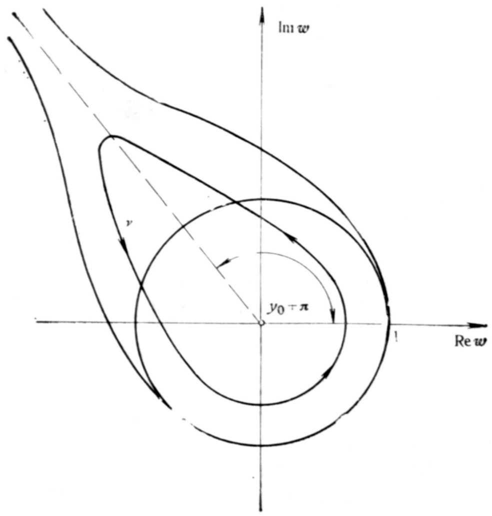

Fig. 3b

ist ganz, höchstens von der Ordnung 1 und erfüllt (2) für $n \geq 0$. Dies gilt für jede Wahl von Γ_σ mit (29). Für verschiedene σ erhält man jedoch i. a. verschiedene Funktionen $F_\sigma(z)$. Für den Strahltypus $h_{F_\sigma}(\varphi)$ von $F_\sigma(z)$ folgt sofort aus (30) $|F_\sigma(re^{i\varphi})| \leq M(\Gamma_\sigma) \sup\{\exp(r\,(\operatorname{Re} te^{i\varphi})) \mid t \in \Gamma_\sigma\}$ also

$$h_{F_\sigma}(\varphi) \leq \sup_{t \in \Gamma_\sigma} \operatorname{Re} te^{i\varphi}. \tag{31}$$

Im folgenden ist zu klären, für welche Werte von φ $\sup\{\operatorname{Re} te^{i\varphi} \mid t \in \Gamma_\sigma\} = \sup\{\operatorname{Re} te^{i\varphi} \mid t \in K'\}$ gilt. Sobald dies erlaubt ist, folgt aus (31) die gewünschte Beziehung $h_{F_\sigma}(\varphi) \leq k_{K'}(-\varphi)$. Wir zeigen, daß dies möglich ist für $|\varphi| \leq \alpha < \pi/2$. Dabei hängt $\sigma = \sigma(\alpha)$ und somit auch $\Gamma_{\sigma(\alpha)}$ und $F_{\sigma(\alpha)}(z)$ von α ab. Bei geeigneten Wachstumsvoraussetzungen für $\psi(e^{-t})$, für $\operatorname{Re} t \to -\infty$ $(t \in B_{y_0})$, gilt die Abschätzung (21) auch für $|\varphi| < \pi/2$.

I) Sei zunächst $0 < \alpha < \pi/2$. Die Stützwinkelfunktion $k_{K'}(\varphi)$ erfüllt (7). Wir bilden mit ihr nach (9) die Menge $K_{\alpha,\alpha}$ ($K_{\alpha,\alpha}$ ist also das Indikatordiagramm von $k_{K'}(\varphi)$ für $|\varphi| < \alpha$.) Es gilt dann $K' \subset K_{\alpha,\alpha}$. Wegen $\alpha < \pi/2$ wächst die Breite $\sup\{|y_1 - y_2| \mid x + iy_j \in K_{\alpha,\alpha}\}$ $(j = 1, 2)$ von $K_{\alpha,\alpha}$ für $x \to -\infty$ unbeschränkt, während diejenige von $K' < 2\pi$ ist für alle x. Wir können nun in (30) den Integrationsweg $\Gamma_{\sigma(\alpha)}$ so wählen, daß dieser in K'^c verläuft, seine Endpunkte t_j' $(j = 1, 2)$ aber in $K_{\alpha,\alpha}$ liegen (s. Fig. 3 a). Anschließend können wir, bei festgehaltenen Endpunkten t_j', $\Gamma_{\sigma(\alpha)}$ so deformieren, daß $\Gamma_{\sigma(\alpha)}$ von $K_{\alpha,\alpha}$ einen Abstand hat, der kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ist. Dann gilt für alle $|\varphi| \leq \alpha$ und $t \in \Gamma_{\sigma(\alpha)}$ $\operatorname{Re} te^{i\varphi} < k_{K_{\alpha,\alpha}}(-\varphi) + \varepsilon$, also ist (beachte (31))

$$h_F(\varphi) \leq \sup_{t \in \Gamma_{\sigma(\alpha)}} \operatorname{Re} te^{i\varphi} \leq \sup_{t \in K_{\alpha,\alpha}} \operatorname{Re} te^{i\varphi} = k_{K'}(-\varphi).$$

Letztere Gleichheit folgt, da die Stützwinkelfunktion von $K_{\alpha,\alpha}$ und K' (nach Konstruktion) für $|\varphi|\leqq\alpha$ übereinstimmen.

II) Um eine interpolierende Funktion $F(z)$ zu finden, die für $|\varphi|<\pi/2$ die Typusbeziehung (21) erfüllt, gehe man wie folgt vor. Zu jedem $\alpha\in(0,\pi/2)$ bestimme man nach I) ein $\sigma(\alpha)$ und die Funktion $F_{\sigma(\alpha)}(z)$. Dann nehme man den Grenzübergang $\alpha\to\pi/2$ vor; dem entspricht der von $\sigma(\alpha)\to-\infty$. Falls also

$$F(z)=\lim_{\alpha\to\pi/2-0}F_{\sigma(\alpha)}(z) \tag{32}$$

gleichmäßig in einer Halbebene $\operatorname{Re} z>k$ existiert, so erfüllt $F(z)$ (21) für $|\varphi|<\pi/2$ sowie die Interpolationsbedingung (2) für $n>k$. Hinreichend für die Existenz von (32) ist etwa die Wachstumsvoraussetzung

$$\psi(w)=O(w^k)\ (w\to\infty,\ w\in C\ (28))\ \text{für ein } k\geqq 0. \tag{33}$$

Dann konvergieren für Re $z>k+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, die Laplaceintegrale

$$\int_0^{-\infty}\psi(e^{-(\sigma+i(y_0\pm\pi))})e^{z(\sigma+i(y_0\pm\pi))}d\sigma,$$

und die Ungleichung (21) gilt für $|\varphi|<\pi/2$.

Ist C in (28) eine Asymptote, so verläuft der Beweis analog. Dabei sind die Wege Γ_σ durch Wege Γ'_σ zu ersetzen, deren Endpunkte $t_j=\sigma+iy_j(\sigma)$ auf einer Kurve $\Gamma'\subset K'^c$ liegen mit $e^{-\Gamma'}=C$. Zusammenfassend erhalten wir folgenden

Satz 3. *Gegeben sei eine Menge K', welche (16) erfüllt. Sei $\psi(w)$ (1) analytisch fortsetzbar nach $(e^{-K'})^c$ und $(e^{-K'})^c$ unbeschränkt.*

Dann gilt:

i) *Zu jedem $\alpha\in(0,\pi/2)$ existiert eine ganze Funktion $F_\alpha(z)$, die (2) für $n\geq 0$ erfüllt und in $S_{\alpha,\alpha}$ der Typusabschätzung* (21) *genügt.*

ii) *Ist zusätzlich $\psi(w)$ analytisch fortsetzbar entlang einer Kurve C mit (28) und (33), so existiert eine für* $\operatorname{Re} z>k$ *analytische Funktion $F(z)$, die (2) für $n>k$ erfüllt und in $S_{\pi/2,\,\pi/2}$ der Typusabschätzung* (21) *genügt.*

Bemerkung 3. Hervorzuheben ist, daß der Fall, in dem $(e^{-K'})^c$ beschränkt ist, einfacher zu behandeln ist und ein stärkeres Resultat liefert als der des unbeschränkten Analytizitätsgebietes, nämlich die Typusabschätzung gilt für alle φ.

Bemerkung 4. Im allgemeinen Fall kann nicht entschieden werden, ob eine interpolierende Koeffizientenfunktion $F(z)$ existiert, die für $|\varphi|<\pi/2$ die Typusabschätzung (21) erfüllt. Daß diese jedoch für $|\varphi|\leqq\pi/2$ nicht gelten muß, sieht man an folgendem Beispiel: $\psi(w)=w$ ist sicherlich nach $C^*=(e^{-K'})^c$ analytisch fortsetzbar mit $K'=\{z\mid\arg z=\pi\}\cup\{0\}$, und es gilt $k_{K'}(\varphi)=0$ für $|\varphi|\leqq\pi/2$. Gäbe es eine interpolierende Koeffizientenfunktion $F(z)$, die (21) für $|\varphi|\leqq\pi/2$ erfüllt, so wäre $F(z)\equiv 0$ nach dem Carlsonschen Nullstellensatz.

Aus Satz 1 und 2 folgt unmittelbar

Satz 4. *Sei $F(z)$ analytisch in $S_{\alpha,\beta}$ $(0<\alpha,\ \beta\leqq\pi/2)$ und dort höchstens von der Ordnung 1 mit dem Strahltypus $h_F(\varphi)$.*

Dann existiert eine ganze Funktion $G(z)$ vom Exponentialtypus, so daß für deren Strahltypus $h_G(\varphi)$ gilt $h_G(\varphi)\leqq h_F(\varphi)$, $-\beta<\varphi<\alpha$ sowie $F(n)=G(n)$ für $n\in\mathrm{N}$.

Als Anwendung von Satz 4 erhält man folgenden Interpolationssatz für ganze Funktionen.

S a t z 5. *Zu* $\alpha \in (0, \pi/2)$ *existiert eine ganze Funktion* $G(z)$ *vom Exponentialtypus mit Strahltypus* $h_G(\varphi) = 0$ *für* $|\varphi| < \alpha$, *und es gilt* $G(n_k) = 0$ *für eine Folge* $n_k \in \mathbb{N}$, *deren obere Dichte 1 ist* (d. h. $\lim_{k\to\infty} \sup k/n_k = 1$).

B e w e i s. Es gibt eine Folge $\{n_k\}$ der genannten Art und eine Potenzreihe

$$\psi(w) = \sum_k a_k w^k$$

mit $a_{n_k} = 0$, die bzgl. $\{n_k\}$ kompakt in C^* überkonvergiert (d. h. die Partialsummenfolge $s_{n_k}(w)$ konvergiert kompakt in C^*.). Die Existenz einer solchen Funktion folgt mit der Konstruktion von L u h [8]. Somit ergibt sich die Behauptung mit Satz 4.

LITERATUR

1. S. A g m o n. On the singularities of Taylor series with reciprocal coefficients. *Pac. J. Math.*, **2**, 1952, 431—453.
2. A r o n s z a j n. Sur les decompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications. *Acta Math.*, **65**, 1935, 1—152.
3. V. B e r n s t e i n. Leçons sur progrès récents de la theorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.
4. L. B i e b e r b a c h. Analytische Fortsetzung. Berlin, 1955.
5. F. C a r l s o n. Sur une classe de séries de Taylor. Diss. Uppsala, 1914.
6. V. F. C o w l i n g. A generalization of a theorem of Le Roy and Lindelöf. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 1946, 1065—1082.
7. E. L i n d e l ö f. Quelques applications d'une formule sommatoire générale. *Acta Soc Sci. Fenn.*, 31, 1902, Nr. 3.
8. W. L u h. Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten. *Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen*. Giessen, 1970.
9. J. M a c I n t y r e. Laplace transformation and integral functions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), **45**, 1938, 1—20.
10. E. C. T i t c h m a r s h. The Theory of Functions. Oxford, 1968.

Abteilung für Mathematik der Universität Ulm
Oberer Eselsberg 7900 Ulm/Donau BRD

Eingegangen am 27. 2. 1976