Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О 3-РАСКРАШИВАЕМЫХ ПЛОСКИХ ГРАФАХ

НИКОЛА Й. МАРТИНОВ

Рассматриваются конечные, неориентированные плоские графы без петель, которые могут иметь кратные ребра, т. е. плоские мультиграфы. Четной триангуляцией называется граф, для которого каждая грань (включая и внешнюю) является треугольником и каждая вершина имеет четную степень. Доказывается, что граф 3-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он является подграфом четной триангуляции.

Проблема характеризации n-раскрашиваемых графов в общем случае не решена. Для $n=2$ она решена Кенигом [1, с. 170]: граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины. Аналогичный результат для $n>2$ не известен. Ф. Харари полагает, что подобный критерий для $n=3$ помог бы решению гипотезы четырех красок [2, с. 152]. Из множества результатов, касающихся характеризации трицветных графов, основными являются результаты Гретша [3] и Грюнбаума [4], но они дают только достаточные условия 3-раскрашиваемости плоского графа. В настоящей статье дается критерий, который характеризует 3-раскрашиваемые плоские графы.

Мы рассматриваем конечные, неориентированные и связные плоские графы без петель и висячих ребер. Однако мы допускаем кратные ребра, т. е. включаем и мультиграфы. Область плоскости, контур которой является плоским циклом такого графа и которая не содержит ребер графа, будем называть клеткой графа. Если все клетки графа (в том числе и неограниченная) — треугольники, будем называть его триангуляцией. Если степень некоторой вершины — четное число, то эту вершину будем называть четной, а если степень нечетна, то вершина будет называться нечетной. Граф, который имеет только четные (нечетные) вершины, будем называть четным (нечетным) графом.

Лемма 1. *Если две смежные вершины триангуляции нечетны, то эта триангуляция имеет по крайней мере еще одну нечетную вершину.*

Доказательство. Единственная триангуляция с тремя вершинами (K_3) является четным графом. В этом случае предположение леммы невыполнимо и, следовательно, она верна.

Допустим, что лемма является справедливой для каждой триангуляции, число вершин которой меньше положительного целого числа n. Докажем, что она справедлива и для произвольной триангуляции с n вершинами.

И так, пусть триангуляция Γ имеет n вершин и пусть две из них A и B являются смежными и нечетными. Докажем, что у Γ есть по крайней мере еще одна нечетная вершина. Для этой цели мы рассмотрим несколько случаев.

1. По крайней мере одна вершина L графа Γ имеет степень 2. Пусть M и N — вершины, смежные с L (рис. 1). Два ребра, инцидентные L, обра-

зуют общую грань двух клеток — Δ_1 и Δ_2. Третьи ребра l_1 и l_2 этих клеток имеют общие концы — вершины M и N. Клетку, которая имеет грань l_1 и не совпадает с Δ_1, обозначаем через Δ_1'. Определяем граф Γ' следующим образом: вершины Γ' — это вершины Γ за исключением L, а ребра Γ' — это ребра Γ за исключением сторон треугольника Δ_1, т. е. $\Gamma' = (\Gamma - L) - l_1$. Так как Δ_1, Δ_1' и Δ_2 вместе составляют треугольник-клетку Γ', а все остальные клетки Γ являются и клетками Γ', то Γ' тоже триангуляция. Учитывая, что вершины M и N смежны и для Γ', получаем, что произвольные две вершины Γ' смежны тогда и только тогда, когда они смежны для Γ. Кроме того, вершины Γ' имеют те же степени в Γ', как и в Γ, за исключением M и N, чьи степени на 2 меньше. Следовательно, A и B будут смежными и нечетными вершинами Γ'. Но Γ' имеет $n-1$ вершин и согласно предположению у Γ' есть третья нечетная вершина. Эта вершина относительно Γ тоже нечетна.

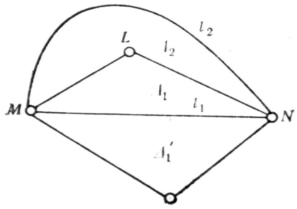

Рис. 1

2. У триангуляции Γ нет вершины степени 2. Здесь мы рассмотрим два подслучая.

2.1. У Γ есть кратные ребра. Пусть s_1 и s_2 — два ребра, связывающие вершины M и N. Обозначим через S_1 и S_2 две области плоскости, полученные разбиением ее посредством $s_1 \cup s_2$; пусть Γ_1 и Γ_2 — графы, полученные из Γ, удаляя вершины, внутренние соответственно для S_2, S_1. Так как Γ является плоским графом, а A и B — смежные вершины, то по крайней мере один из графов Γ_1 и Γ_2 содержит одновременно A и B. Не теряя общности, предполагаем, что A и B — вершины Γ_1. Так как Γ — триангуляция, то каждая из областей S_1 и S_2 содержит в своей внутренности вершины Γ. Если в некоторой из областей S_1 или S_2 есть только одна вершина, то это будет уже рассмотренный случай 1. Поэтому мы предполагаем, что в каждой из областей S_1 и S_2 есть больше одной вершины, т. е. что у каждого из Γ_1 и Γ_2 есть больше 3 и меньше чем $n-1$ вершин. Определяем новые графы Γ_1' и Γ_2'. Вершины Γ_1' — это вершины Γ_1 и еще одна вершина L_1 (L_1 — внутренняя по отношению к S_2), а ребра Γ_1' — это ребра Γ_1 и еще два, которые соединяют L_1 соответственно с M и N. Так, полученный граф Γ_1' — триангуляция, потому что L_1 и два ребра, инцидентные L_1, разбивают S_2 на два треугольника. Аналогичным образом из Γ_2, добавляя одну вершину и два ребра, связывающие эту вершину соответственно с M и N, получаем триангуляцию Γ_2'. У каждого из Γ_1' и Γ_2' есть меньше чем n вершин и по предположению не могут быть только две нечетные и смежные вершины.

2.1.1. У триангуляции Γ_2' есть по крайней мере одна нечетная вершина. Учитывая, что число нечетных вершин любого графа — четно, получаем, что у Γ_2' есть по крайней мере две нечетные вершины. Если эти две нечетные вершины смежны, то будет существовать и еще одна нечетная вершина. Из этого следует, что будет нечетная вершина, несовпадающая с M и N. Эта вершина нечетна относительно Γ и не совпадает с A и B.

2.1.2. У триангуляции Γ_2' нет нечетных вершин. В этом подслучае вершины A и B нечетны (и смежны) для Γ_1'. Тогда по предположению у

Γ_1' есть и новая нечетная вершина X. Если X различна от M и N, то очевидно у X одна и та же степень относительно Γ и Γ_1'. Если X совпадает с M или N, то, так как у Γ_2' нет нечетных вершин, степени X относительно Γ и Γ_1' различаются на четное число. Из этого следует, что X — нечетная вершина и для Γ.

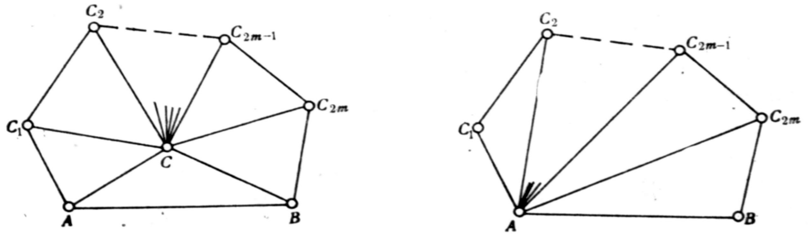

Рис. 2

2.2. У триангуляции Γ нет кратных ребер. Теперь каждые две смежные вершины определяют только одно ребро. Пусть Δ — одна из клеток, имеющих в качестве грани ребро AB, а C — третья вершина треугольника Δ. Случай, когда степень вершины C равна 2 или является нечетным числом, не представляет интереса. Пусть $\deg C = 2m+2$ (m — целое положительное число). Пусть $A, C_1, C_2, \ldots, C_{2m}, B$ — последовательные вершины, смежные с C (последовательные для цикла колеса с центром C) (рис. 2). Определяем граф Γ_0, устраняя из Γ вершину C и добавляя $2m-1$ ребер, связывающих A соответственно с $C_2, C_3, \ldots, C_{2m}$, т. е.

$$\Gamma_0 = (\Gamma - C) + AC_2 + AC_3 + \cdots + AC_{2m}.$$

Граф Γ_0 — триангуляция, потому что добавленные $2m-1$ ребра к $\Gamma - C$ разбивают многоугольник $AC_1C_2 \ldots C_{2m}B$ на треугольники. Вершины Γ_0, за исключением A, B и C_1, сохраняют свои степени из Γ, вершина A увеличивает свою степень на $2m-2$, а B и C_1 уменьшают свои степени на 1. Если у C_1 относительно Γ — нечетная степень, то утверждение леммы выполнено. Пусть C_1 — четная вершина Γ. Тогда A и C_1 — смежные и нечетные вершины триангуляции Γ_0, у которой $n-1$ вершин. По предположению у Γ_0 есть и третья нечетная вершина. Она будет третьей нечетной вершиной для Γ.

Этим доказательство леммы закончено. Другое доказательство этой леммы дано в [5].

Лемма 2. *Каждая четная триангуляция 3-раскрашиваема.*

Доказательство. Очевидно, что единственная триангуляция с тремя вершинами (K_3) является 3-раскрашиваемой.

Допустим, что лемма справедлива для каждой четной триангуляции, чье число вершин меньше натурального числа n. Мы докажем, что она в силе и для произвольной четной триангуляции Γ с n вершинами. Рассмотрим два случая.

1. У триангуляции Γ есть кратные ребра. Пусть s_1 и s_2 — два несовпадающие ребра, связывающие вершины A и B. Обозначиваем через S_1 и

S_2 две области, на которые разбивается плоскость посредством $s_1 \cup s_2$, а через Γ_1, Γ_2 — графы, которые получаются из Γ удалением вершин, внутренних соответственно для S_2, S_1. Из Γ_1, отождествляя ребра s_1 и s_2 (устраняя s_2), получаем триангуляцию Γ_1'. Аналогичным образом из Γ_2 отож-

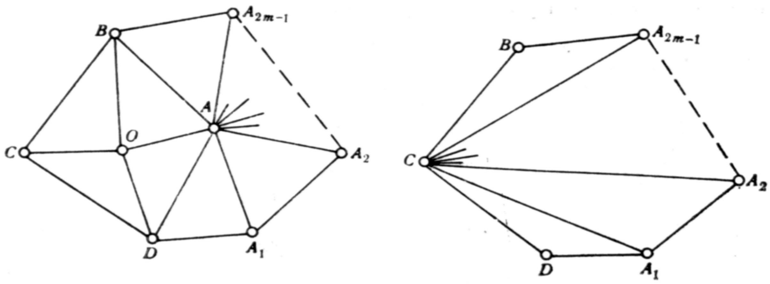

Рис. 3

дествлением s_1 и s_2 получаем триангуляцию Γ_2'. Вершины Γ_1', которые различаются от A и B, четны по условию. Так как число нечетных вершин любого графа четно, то A и B являются одновременно четными или нечетными. Однако в силу леммы 1 только A и B не могут быть нечетными. Из этого следует, что Γ_1' — четная триангуляция. Подобным образом устанавливается, что и Γ_2' — четная триангуляция. Так как у Γ есть вершины внутренние для каждой из областей S_1 и S_2 (Γ — триангуляция), то у каждой из триангуляций Γ_1' и Γ_2' есть меньше чем n вершин. Тогда по предположению Γ_1' и Γ_2' — 3-раскрашиваемы. У Γ_1' и Γ_2' есть только две общие вершины, поэтому их 3-раскраски могут быть согласованы (каждая общая вершина получает один и тот же цвет при двух раскрасках). Из таких 3-раскрасок Γ_1' и Γ_2', сохраняя цвет каждой вершины, получаем 3-раскраску Γ.

2. Триангуляция Γ не имеет кратных ребер. Очевидно, что в этом случае у Γ нет вершин степени 2. Так как Γ — четная триангуляция, по теореме Ойлера о связи между числами вершин, ребер и клеток легко получаем, что у Γ есть вершина O степени 4. Пусть A, B, C, D — последовательные смежные с O вершины (последователные для цикла колеса с центром O). Если A, C и B, D — пары смежных вершин, получим противоречие — K_5 будет подграфом плоского графа Γ. Не теряя общности, предполагаем, что A и C не являются смежными. Пусть еще $O, D, A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}, B$ — последовательные смежные с A вершины (рис. 3). Определяем граф Γ'', удаляя из Γ вершины O, A и добавляя $2m-1$ ребер, связывающих C соответственно с $A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}$, т. е.

$$\Gamma'' = (\Gamma - \{O, A\}) + CA_1 + CA_2 + \cdots + CA_{2m-1}.$$

Граф Γ'' — триангуляция, потому что добавленные $2m-1$ ребер разбивают многоугольник $CDA_1, A_2 \ldots A_{2m-1}B$ на треугольники. Вершины Γ'', за исключением B, C и D, сохраняют свои степени из Γ, степени B и D уменьшаются на 2, а степень C увеличивается на $2m-2$. Следовательно, Γ'' — четная триангуляция. Так как у Γ'' есть $2n-2$ вершин, она 3-раскрашиваема. При 3-раскраске Γ'' вершины D, A_1, A_2, ..., A_{2m-1}, B, как смежные с C, будут окрашены двумя цветами, и эти два цвета будут чередоваться. Так как расстояние между B и D по цепи $DA_1A_2 \ldots A_{2m-1}B$ четно $(2m)$, то эти вершины получат один и тот же цвет. Тогда от раскраски Γ'' переходим к раскраске Γ, сохраняя цвета всех общих вершин Γ и Γ', вершину A окрашиваем цветом C, а O — третьим цветом, различающимся от цветов B и C.

Этим лемма доказана.

Лемма 3. *Каждый 3-раскрашиваемый плоский граф является подграфом четной триангуляции.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Произвольному плоскому графу G ставим в соответствии число $f(G)$, являющееся длиной самого длинного цикла, огораживающего клетку G.

1. Сначала докажем утверждение в случае, когда $f(G) \leqq 3$.

Пусть у G есть клетка — двуугольник, т. е. клетка, которая огораженная двумя ребрами с общими концами M и N. Эту клетку разбиваем на два треугольника, вводя дополнительно одну вершину L и два ребра, соединяющие L соответственно с M и N. Сохраняя первоначальную раскраску и окрашивая L цветом, различающимся от цветов M и N, получаем 3-раскраску корректированного графа. Так поступаем с каждой клеткой — двуугольником и в результате получаем 3-цветную триангуляцию G'.

Пусть A — произвольная вершина G', а

$$s_1, s_2, \ldots, s_m, s_1 \tag{1}$$

— последовательные ребра, инцидентные A (последовательные в одном из двух направлений ротации вокруг A). Вторые концы этих ребер являются вершинами, смежными с A, и поэтому окрашены двумя цветами. (Число этих вершин может быть и меньше, чем m.) Так как произвольные два последовательные ребра из (1) являются сторонами клетки-треугольника, то их вторые концы не совпадают и являются смежными вершинами; вот почему они не могут быть одинакового цвета. Таким образом, по отношению цветов вторых своих концов ребра (1) разделяются на два класса; при этим каждые два последовательные ребра находятся в разных классах. Это означает, что m — четное число. Следовательно, G' — четная триангуляция, а G — подграф этой триангуляции.

2. Пусть $n > 3$ — натуральное число и лемма справедлива для каждого 3-раскрашиваемого плоского графа G с $f(G) < n$. Докажем, что она верна и для произвольного 3-раскрашиваемого плоского графа G_1 с $f(G_1) = n$.

Пусть Δ — клетка G_1, чей огораживающий цикл s имеет длину n. Если в s имеются две несмежные вершины M и N разного цвета, добавляем к G_1 новое ребро, которое соединяет M с N; этим способом мы разбиваем Δ на две клетки, у чьих огораживающих циклов длины меньше, чем n. Если каждые две несмежные вершины s — одинакового цвета (это случится, когда Δ — четырехугольник, окрашенный двумя цветами), тогда добавляем еще одну вершину L и n ребер, соединяющих L соответственно с вершинами s. (Вершина L — внутренняя для клетки Δ). Окрашиваем L цветом, который не участвует в s. Таким образом в двух возможных случаях заменяем Δ клетками, у чьих огораживающих циклов длины меньше n. Поступая таким же образом с каждой клеткой, у огораживающего цикла которой длина равна

n, в результате получим плоский и 3-раскрашиваемый граф G_2 с $f(G_2)<n$. По предположению G_2 — подграф четной триангуляции G_0. Очевидно G_1 — тоже подграф G_0.

Этим лемма доказана.

Из леммы 2 и леммы 3 непосредственно получаем следующую теорему.

Теорема. *Плоский граф 3-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он является подграфом четной триангуляции.*

ЛИТЕРАТУРА

1. D. König. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
2. Ф. Харари. Теория графов. Москва, 1973.
3. H. Grötzsch. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Naturwiss. R.*, **8**, 1958, 109—120.
4. B. Grünbaum. Grötzsch's theorem on 3-colorings. *Michigan Math. J.*, **10**, 1963, 303—310.
5. H. Fleischner, P. Roy. Distribution of points of odd degree of certain triangulations in the plane. *Monatsh. Math.*, **78**, 1974, № 5, 385—390.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 6. 10. 1975; в переработанном виде 16. 3. 1976.