Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ В n-МЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ПЛАМЕН Б. ДЖАКОВ

Если алгебраическое многообразие в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ определяется одним полиномом, то его пространство голоморфных функций изоморфно пространству целых функций в $\mathbb{C}^{n-1}$.

Пусть V — алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^n$, т. е.

$$V=\{z\in\mathbb{C}^n : P_i(z)=0,\ i=1,\ldots,m\},$$

где $P_i(z)$ — полиномы, порождающие простой идеал $I=I(P_1,\ldots,P_m)$ в $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$. Б. С. Митягин и Г. М. Хенкин поставили следующий вопрос [1, § 6, вопрос 6.5]:

„Верно ли, что $H(V)\cong H(\mathbb{C}^k)$, где $k=\dim V$?" Здесь $H(V)$ и $H(\mathbb{C}^k)$ обозначают пространства голоморфных функций соответственно в V и $\mathbb{C}^k$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Мы даем положительный ответ на их вопрос в частном случае, когда алгебраическое многообразие определяется одним полиномом.

Пусть V — аналитическое множество в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что функция $f: V\to\mathbb{C}$ называется голоморфной, если для любой точки $z_0\in V$ существуют окрестность U в $\mathbb{C}^n$ и голоморфная функция $\varphi: U\to\mathbb{C}$, такие, что $f(z)=\varphi(z)$ для $z\in U\cap V$. Обозначим через $H(V)$ пространство голоморфных функций на V с топологией равномерной сходимости на компактах. Хорошо известно, что $H(V)$ — пространство Фреше и любая функция $f\in H(V)$ является ограничением целой функцией $\varphi\in H(\mathbb{C}^n)$, [2, гл. 5 (B), теор. 5, гл. 4(D), теор. 2 и гл. 8 (A), теор. 14]. Другими словами, оператор ограничения $\lambda: H(\mathbb{C}^n)\to H(V)$ является сюрективным отображением. Положим $I=\{\varphi\in H(\mathbb{C}^n):\varphi|_V\equiv 0\}$.

Лемма 1. *Пространства $H(V)$ и $H(\mathbb{C}^n)/I$ изоморфны.*

Доказательство. Очевидно идеал I замкнут в $H(\mathbb{C}^n)$. Так как $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство Фреше, то $H(\mathbb{C}^n)/I$ — тоже пространство Фреше. Рассмотрим коммутативную диаграмму (см. стр. 26), где π — факторотображение, а μ — отображение, возникающее из λ после факторизации. Так как λ и π непрерывны, то μ тоже непрерывно, и очевидно биективно. По теореме об открытом отображении μ — измоорфизм.

Лемма 2. *Пусть* $P(z)=z_n^p+\sum_{\nu=0}^{p-1} z_n^\nu h_\nu(z')$, где $z=(z_1,\ldots,z_{n-1},z_n)=(z',z_n)$, $z'=(z_1,\ldots,z_{n-1})$, $h_\nu\in H(\mathbb{C}^{n-1})$. *Тогда существуют такие непрерывные линейные операторы*

$$S: H(\mathbb{C}^n)\to H(\mathbb{C}_n),\ R_\nu: H(\mathbb{C}^n)\to H(\mathbb{C}^{n-1}),\ \nu=0,1,\ldots,p-1,$$

что для любой функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$ имеет место представление

$$f = P \cdot S(f) + \sum_{\nu=0}^{p-1} z_n^\nu R_\nu(f), \tag{2}$$

причем функции $S(f)$ и $R_\nu(f)$, $\nu = 0, \ldots, p-1$ определены этим представлением однозначно.

$$\begin{tikzcd} H(\mathbb{C}^n) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & & H(V) \\ H(\mathbb{C}^n)/I \arrow[urr, "\mu"'] & & \end{tikzcd}$$

Замечание. Эта лемма — аналог подготовительной теоремы Вейерштрасса. Доказательство, которое мы даем, является модификацией доказательства теоремы 6. 1. 1 из книги Хёрмандера [3].

Доказательство. Очевидно любая функция $\varphi \in H(\mathbb{C}^n)$ можно представить однозначно в виде

$$\varphi(z) = z_n^p s(z) + r(z), \tag{3}$$

где $s \in H(\mathbb{C}^n)$, r — многочлен по z_n степени $\leq p-1$, причем

$$r(z) = \sum_{\nu=0}^{p-1} z_n^\nu \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial z_n^\nu}(z', 0).$$

Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leq \varrho_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — компактный полидиск в $\mathbb{C}^n$. Из неравенства Коши следует, что $\left|\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu \varphi}{\partial z_n^\nu}(z', 0)\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\Delta}{\varrho_n^\nu}$ для $(z', 0) \in \Delta$, где $\|\varphi\|_\Delta = \sup_{z \in \Delta} |\varphi(z)|$, поэтому

$$\|r\|_\Delta \leq \sum_{\nu=0}^{p-1} \varrho_n^\nu \left\| \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial z_n^\nu}(z', 0) \right\|_\Delta \leq p\|\varphi\|_\Delta \tag{4}$$

и $\|z_n^p s\| \leq (p+1)\|\varphi\|_\Delta$. Отсюда получаем по лемме Шварца

$$\|s\|_\Delta \leq \frac{p+1}{\varrho_n^p} \|\varphi\|_\Delta \tag{5}$$

Фиксируем $f \in H(\mathbb{C}^n)$ и рассматриваем „процесс деления" функции f на полином P. Применяя последовательно представление (3), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} f &= z_n^p s_1 + r_1 = P s_1 + r_1 - s_1 h, \\ -s_1 h &= z_n^p s_2 + r_2 = P s_2 + r_2 - s_2 h, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -s_{k-1} h &= z_n^p s_k + r_k = P s_k + r_k - s_k h \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

где $h = \sum_{\nu=0}^{p-1} z_n^\nu h_\nu$, $s_k \in H(\mathbb{C}^n)$, r_k — многочлены по z_n степени $\leq p-1$. Складывая первые k равенств, получаем

$$f = P(s_1 + s_2 + \cdots + s_k) + r_1 + r_2 + \cdots + r_k - s_k h. \tag{6}$$

Ряды $\sum_{k=1}^\infty s_k$ и $\sum_{k=1}^\infty r_k$ сходятся в $H(\mathbb{C}^n)$. Действительно, рассмотрим исчерпывающую $\mathbb{C}^n$ систему компактных полидисков

$$\Delta_m = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leq m,\ i = 1, \ldots, n-1,\ |z_n| \leq \varrho(m)\},\ m = 2, 3, \ldots,$$

где $\varrho(m)$ выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$m \leq \varrho(m),\ \frac{p+1}{[\varrho(m)]^p} \|h\|_{\Delta_m} \leq \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Это возможно, так как для достаточно больших ϱ имеем

$$\frac{p+1}{\varrho^p} \|h\|_{\Delta_m} \leq (p+1) \sum_{\nu=0}^{p-1} \varrho^\nu \frac{\|h_\nu\|_{\Delta'_m}}{\varrho^p} \leq \frac{1}{2},$$

где $\Delta'_m = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : |z_i| \leq m,\ i = 1, \ldots, n-1\}$. Применяя неравенства (4) и (5), получаем

$$\|r_1\|_{\Delta_m} \leq p \|f\|_{\Delta_m},\ \|s_1\|_{\Delta_m} \leq \frac{p+1}{[\varrho(m)]^p} \|f\|_{\Delta_m} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{\Delta_m},$$

$$\|s_k\|_{\Delta_m} \leq \frac{p+1}{[\varrho(m)]^p} \|h\|_{\Delta_m} \|s_{k-1}\|_{\Delta_m} \leq \frac{1}{2} \|s_{k-1}\|_{\Delta_m} \leq \cdots \leq \frac{1}{2^k} \|f\|_{\Delta_m},$$

$$\|r_k\|_{\Delta_m} \leq p \|h\|_{\Delta_m} \|s_{k-1}\|_{\Delta_m} \leq \frac{p}{2^{k-2}} \|h\|_{\Delta_m} \|s_1\|_{\Delta_m} \leq \frac{p}{2^{k-2}} \|h\|_{\Delta_m} \frac{p+1}{[\varrho(m)]^p} \|f\|_{\Delta_m} \leq \frac{p\|f\|_\Delta}{2^{k-1}}.$$

Следовательно, ряды $\Sigma_{k=1}^\infty s_k$ и $\Sigma_{k=1}^\infty r_k$ сходятся в $H(\mathbb{C}^n)$ и если положим $S(f) = \Sigma_{k=1}^\infty s_k$, $R(f) = \Sigma_{k=1}^\infty r_k$, то

$$\|S(f)\|_{\Delta_m} \leq \|f\|_{\Delta_m},\ \|R(f)\|_{\Delta_m} \leq 2p \|f\|_{\Delta_m},\ m = 2, 3, \ldots \tag{8}$$

После граничного перехода в равенстве (6) получаем $f = P.S(f) + R(f)$, где $R(f)$ — многочлен по z_n степени $\leq p-1$.

Функции $S(f)$ и $R(f)$ определены однозначно; на самом деле, если $0 = Ps + r$, где $s, r \in H(\mathbb{C}^n)$, r — многочлен по z_n степени $\leq p-1$, то $-hs = z_n^p . s + r$ и по неравенствам (5) и (7) $\|s\|_{\Delta_m} \leq \|s\|_{\Delta_m}/2$, следовательно $s = 0$, $r = 0$.

В силу однозначности $S(f)$ и $R(f)$ линейно зависят от f. Неравенства (8) дают непрерывность линейных операторов $S: H(\mathbb{C}^n) \to H(\mathbb{C}^n)$ и $R: H(\mathbb{C}^n) \to H(\mathbb{C}^n)$. Положим

$$R(f) = \sum_{\nu=0}^{p-1} z_n^\nu R_\nu(f),\quad R_\nu(f) \in H(\mathbb{C}^{n-1}),\quad R_\nu(f)(z') = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu R(f)}{\partial z_n^\nu}(0, z').$$

Тогда по неравенству Коши $\|R_\nu(f)\|_{\Delta'_m} \leq [\varrho(m)]^{-\nu} \|R(f)\|_{\Delta_m} \leq 2p [\varrho(m)]^{-\nu} \|f\|_{\Delta_m}$, следовательно линейные операторы $R_\nu : H(\mathbb{C}^n) \to H(\mathbb{C}^{n-1})$, $\nu = 0, \ldots, p-1$ непрерывны. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам необходимо следующее утверждение:

Лемма 3. *Для любых натуральных чисел n, p имеет место изоморфизм $H(\mathbb{C}_n)^p \cong H(\mathbb{C}^n)$, где $H(\mathbb{C}^n)^p$ — декартово произведение p экземпляров пространства $H(\mathbb{C}^n)$.*

Доказательство. Очевидно достаточно доказать утверждение при $p = 2$. Система функций $\{z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_+^n\}$, где $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, является базисом в $H(\mathbb{C}^n)$. Обозначим через H_1 и H_2 замкнутые линейные оболочки множеств $\{z'^\beta z_n^{2k+1} : \beta \in Z_+^{n-1},\ k \in Z_+\}$ и $z'^\beta z_n^{2k} : \beta \in Z_+^{n-1},\ k \in Z_+\}$ соответственно. Линейные операторы $T_1 : H(\mathbb{C}^n) \to H_1$ и $T_2 : H(\mathbb{C}^n) \to H_2$, определенные соотношениями $T_1(z'^{\beta}z_n^k)=z'^{\beta}z_n^{2k+1}$, $T_2(z'^{\beta}z_n^k)=z'^{\beta}z_n^{2k}$, являются изоморфизмами. Проверим это для оператора T_1. Пусть $B_\varrho=\{z\in\mathbb{C}^n : |z_i|\leq\varrho,\ i=1,\dots,n\}$. Если $f=\Sigma a_{\beta k}z'^{\beta}z_n^k$, то $T_1f=\Sigma a_{\beta k}\,z'^{\beta}z_n^{2k+1}$; используя неравенства Коши, получаем

$$\|T_1f\|_{B_\varrho}\leq\Sigma|a_{\beta k}|\,\varrho^{|\beta|+2k+1}\leq\Sigma\|f\|_{B_{2\varrho^2}}\,\varrho^{|\beta|+2k+1}/(2\varrho^2)^{|\beta|+k}\leq C_\varrho\,\|f\|_{B_{2\varrho^2}}.$$

Аналогично $\|f\|_{B_\varrho}\leq C'_\varrho\,\|T_1f\|_{B2\varrho}$. Так как $H(\mathbb{C}^n)\cong H_1$, $H(\mathbb{C}^n)\cong H_2$ и $H(\mathbb{C}^n)=H_1+H_2$, то $H(\mathbb{C}^n)\cong H(\mathbb{C}^n)^2$.

Теперь мы уже готовы доказать наше основное утверждение:

Теорема 1. *Пусть алгебраическое многообразие $V\subset\mathbb{C}^n$ определяется одним полиномом, т. е. $V=\{z\in\mathbb{C}^n : P(z)=0\}$, где P — полином. Тогда $H(V)\cong H(\mathbb{C}^{n-1})$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $P(z)=z_n^p+\Sigma_{\nu=0}^{p-1}z_n^\nu h_\nu(z')$, где $h_\nu\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_{n-1}]$ (в противном случае можно сделать подходящую замену координат). Так как V — алгебраическое многообразие, то идеал $I(V)=\{Q\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n] : Q|_V=0\}$ — простой. Отсюда вытекает, что полином $P(z',z_n)$ можно считать неприводимым над $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_{n-1}]$.

По лемме 2 существуют такие непрерывные линейные операторы $S : H(\mathbb{C}^n)\to H(\mathbb{C}^n)$ и $R_\nu : H(\mathbb{C}^n)\to H(\mathbb{C}^{n-1})$, $\nu=0,\dots,p-1$, что $f=P\,.\,S(f)+\Sigma_{\nu=0}^{p-1}z_n^\nu R_\nu(f)$ для любой функции $f\in H(\mathbb{C}^n)$.

Пусть $I=\{\varphi\in H(\mathbb{C}^n) : \varphi|_V=0\}$. По лемме 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что $H(\mathbb{C}^n)/I\cong H(\mathbb{C}^{n-1})$. Мы покажем сначала, что $I=\{f\in H(\mathbb{C}^n) : f=P\,.\,S(f)\}$. Действительно, если $f\in I$, то очевидно $\Sigma_{\nu=0}^{p-1}z_n^\nu R_\nu(f)\in I$, т. е. для любого фиксированного $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$ этот полином по z_n степени $\leq p-1$ имеет те же нули, что и $P(z',z_n)$. Но тогда $R_\nu(f)(z')=0$, $\nu=0,\dots,p-1$, для любой точки $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$, в которой дискриминант $D(z')$ полинома $P(z',z_n)$ отличен от нуля. Из неприводимости $P(z',z_n)$ вытекает, что $D(z')\not\equiv0$. На самом деле, $D=uP-v\partial P/\partial z_n$, где u и v — полиномы по z_n степени $p-2$ и $p-1$ соответственно, с коэффициентами из $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_{n-1}]$ [4, гл. 5, § 10]. Если $D(z')\equiv0$, то $uP=v\partial P/\partial z_n$ и, очевидно, P приводим над $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_{n-1}]$. Следовательно, $D(z')\not\equiv0$. Но тогда аналитическое множество $W=\{z'\in\mathbb{C}^{n-1} : D(z')=0\}$ нигде не плотно. Так как $R_\nu|_{\mathbb{C}^{n-1}\setminus W}=0$, то $R_\nu\equiv0$, $\nu=0,\dots,p-1$.

Наконец, рассмотрим коммутативную диаграмму, где $R(f)=(R_0(f),\dots,$

$$\begin{tikzcd}
H(\mathbb{C}^n) \arrow[rr, "R"] \arrow[d, "\pi"'] & & H(\mathbb{C}^{n-1})^p \\
H(\mathbb{C}^n)/I \arrow[urr, "T"'] & &
\end{tikzcd}$$

$R_{p-1}(f))$, π — фактороотображение. Очевидно оператор T является алгебраическим изоморфизмом и непрерывен, следовательно по теореме об открытом отображении T — изоморфизм. По лемме 3 $H(\mathbb{C}^{n-1})^p\cong H(\mathbb{C}^{n-1})$, что завершает доказательство теоремы.

Заметим, что наши рассуждения доказывают следующее, немного более общее утверждение:

Теорема 2. *Пусть аналитическое множество* $V \subset \mathbb{C}^n$ *определяется одним псевдополиномом Вейерштрасса, т. е.* $V = \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$, *где* $P(z) = z_n^p + \sum_{\nu=0}^{p-1} z_n^\nu h_\nu (z')$, $h_\nu \in H(\mathbb{C}^{n-1})$, $\nu = 0, \dots, p-1$. *Тогда, если дискриминант полинома* $P(., z_n)$ *не равен тождественно нулю, то* $H(V) \cong H(\mathbb{C}^{n-1})$.

Кроме того, в частном случае, рассмотренном нами, непосредственно доказывается предложение 6.4 работы [1]. Точнее, справедлива

Теорема 3. *Пусть алгебраическое многообразие* $V \subset \mathbb{C}^n$ *определяется одним полиномом. Тогда существует линейный непрерывный оператор* $E : H(V) \to H(\mathbb{C}^n)$ *такой, что* $Ef|_V = f$, $\forall f \in H(V)$.

Действительно, из доказательства теоремы 1 видно, что имеет место изоморфизм $H(\mathbb{C}^n)/I \to L$, где L подпространство целых функций вида $\sum_{\nu=0}^{p-1} \varphi_\nu(z') z_n^\nu$, $\varphi_\nu \in H(\mathbb{C}^{n-1})$. С другой стороны, по лемме 1 $H(V) \cong H(\mathbb{C}^n)/I$, причем изоморфизм такой, что сопоставляет любой функцией $f \in H(V)$ класс тех целых функций, ограничение которых на V совпадает с f. Очевидно композиция этих двух изоморфизмов дает нужный оператор $E : H(V) \to H(\mathbb{C}^n)$.

Работа является частью кандидатской диссертации автора [5], защищенной в Московском Государственном университете под руководством профессора Б. С. Митягина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Митягин, Г. М. Хенкин. Линейные задачи комплексного анализа. *Успехи мат. наук*, **26**, 1971, № 4, 93—152.
2. Р. Ганнинг, Х. Росси. Аналитические функции многих комплексных переменных. Москва, 1969.
3. Л. Хёрмандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. Москва, 1968.
4. С. Ленг. Алгебра. Москва, 1968.
5. П. Б. Джаков. Изоморфизмы и структура базисов в ядерных пространствах Фреше. *Диссертация*, Москва, МГУ, 1974.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 11. 11. 1975; в переработанном виде 3. 5. 1976