Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕТОДОМ ДВОЙСТВЕННОСТИ

МИТКО М. ЦВЕТАНОВ, ТАТЯНА П. ИВАНОВА

В работе применяются двойственные методы для решения задачи о нижней грани выпуклого функционала

$$F(x)=\iint_T f(t,\ \tau,\ x(t,\tau),\ x'_t(t,\tau),\ x'_\tau(t,\tau)\,dtd\tau,$$

рассмотренного на квадрате $T=\{(t,\tau)\in R^2: 0\leqq t\leqq 1,\ 0\leqq\tau\leqq 1\}$ с границей Γ. $x(.\,,.)\in C^1(T)$.

1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1$ вещественные линейные пространства $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}_1$ — двойственные им относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$ для $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\langle x_1, y_1\rangle$ для $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$. Очевидно, $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}_1$ двойственны относительно $\langle x, y\rangle+\langle x_1,y_1\rangle$. Пусть в $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}_1$ задана выпуклая замкнутая (полунепрерывная снизу) функция $F(x, x_1)$. Пусть $A:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}_1$ линейный непрерывный оператор, множество значений которого есть все $\mathfrak{X}_1$, т. е. $\operatorname{Im} A=\mathfrak{X}_1$. Сопряженный к нему оператор, действующий из $\mathfrak{Y}_1$ в $\mathfrak{Y}$, обозначаемый обычно через A^*, задается равенством $\langle Ax, y_1\rangle=\langle x, A^*y_1\rangle$ для всех $x\in\mathfrak{X}$, $y_1\in\mathfrak{Y}_1$.

Задача о нижней грани функции F при условии $x_1=Ax$ и ограничении $x\in X\subset\mathfrak{X}$, где X некоторое выпуклое замкнутое множество, очевидно, эквивалентна задаче о нижней грани функции $\Phi(x, x_1)=F(x, x_1)+\delta_{X\times\mathfrak{X}_1}(x, x_1)$, где $x_1=Ax$,

$$\delta_Z(z)=\begin{cases}0 & z\in Z,\\ \infty & z\notin Z.\end{cases}$$

Определение 1. *Функцию $\Phi(x, x_1)$ будем называть N-функцией, если существует точка $(x, Ax)\in\operatorname{dom}\Phi$, $x\in X$, в которой $F(x, x_1)$ непрерывна.*

Здесь через $\operatorname{dom}\Phi$ обозначено множество $\{(x, x_1):\Phi(x, x_1)<\infty\}$.

Задачу о нахождении $\inf\Phi(x, Ax)$ в случае, когда Φ есть N — функция, мы сведем к двойственной задаче, состоящей в нахождении $\inf\Phi^*(-A^*y_1, y_1)$, где

$$\Phi^*(y,\ y_1)=\sup_{x,\ x_1}[\langle x, y\rangle+\langle x_1,\ y_1\rangle-\Phi(x, x_1)]. \tag{1}$$

Это возможно согласно следующей теореме:

Теорема 1. [4, с. 211] *Если Φ есть N-функция, то* $\inf\Phi^*(-A^*y_1, y_1)$ *достигается и* $\inf\Phi(x, Ax)+\min\Phi^*(-A^*y_1,\ y_1)=0$.

Из соотношения (1) следует важное неравенство Юнга: $\Phi(x, x_1)+\Phi^*(y, y_1)\geqq\langle x, y\rangle+\langle x_1, y_1\rangle$. Эти результаты мы применим в дальнейшем при решении одной задачи вариационного исчисления. Для дальнейших исследований нам понадобятся некоторые понятия, которые мы сейчас приведем.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 30—40.

Определение 2. *Субдифференциалом функции* $\Phi(x, x_1)$ *в точке* (x^0, x_1^0) *назовем множество*

$$\partial\Phi(x^0, x_1^0)=\{(y^0, y_1^0)\in\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}_1\colon \Phi(x, x_1)\geqq\Phi(x^0, x_1^0)+\langle x-x^0, y^0\rangle+\langle x_1-x_1^0, y_1^0\rangle\}.$$

Назовем субградиентом каждую пару $(y^0, y_1^0)\in\partial\Phi$. *Множества*

$$\partial_x\Phi(x^0, x_1^0)=\{y\in\mathfrak{N}:\Phi(x, x_1^0)-\Phi(x^0, x_1^0)\geqq\langle x-x^0, y\rangle\forall x\in\mathfrak{X}\},$$

$$\partial x_1\Phi(x_0, x_1^0)=\{y_1\in\mathfrak{N}_1:\Phi(x_1^0\, x_1)-\Phi(x_1^0, x_1^0)\geqq\langle x_1-x_1^0, y_1\rangle\forall x_1\in\mathfrak{X}_1\}$$

назовем частными субдифференциалами соответственно по первой и второй переменной.

Определение 3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *линейное топологическое пространство и* $\mathfrak{N}$ — *его двойственное. Пусть* $L\subset\mathfrak{X}$ — *подпространство. Аннулятором подпространства* L *назовем множество* $L^\perp=\{y\in\mathfrak{N}:\langle x, y\rangle=0\forall x\in L\}$. *Если* $A:\mathfrak{X}\to\mathfrak{N}$ *линейный оператор, то множество* $\operatorname{Ker} A=\{x: Ax=0\}$ *называют ядром оператора* A.

2. Пусть $T=\{(t, \tau): 0\leqq t\leqq 1,\ 0\leqq\tau\leqq 1\}$ и Γ — его граница. Пусть на $T\times R^3$ задана выпуклая и конечная по $(x, x_1, x_2)\in R^3$ для почти всех $(t, \tau)\in T$ и измеримая по $(t, \tau)\in T$ для всех $(x, x_1, x_2)\in R^3$ функция $f(t, \tau, x, x_1, x_2)$. Рассмотрим следующую задачу:

Найти нижнюю грань функционала

$$F(x, x_1, x_2)=\iint\limits_T f(t, \tau, x(t, \tau), x_1(t, \tau), x_2(t, \tau))dtd\tau \tag{2}$$

при условии, что $x(.\,,.)\in C_1(T)$, $x_1(.\,,.)\in C(T)$, $x_2(.\,,.)\in C(T)$ и

$$x_1(t, \tau)=\frac{\partial}{\partial t}x(t, \tau),\quad x_2(t, \tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}x(t, \tau). \tag{3}$$

Пространство $C(T)$ будем предполагать наделенным нормой $\|x\|=\max\{|x(t, \tau)|\,|(t, \tau\in T\}$, а $C_1(T)$ — нормой $\|x\|_{C_1}=\max\{\|x\|_C, \|x_t'\|_C, \|x_\tau'\|_C\}$.

Будем рассматривать два случая: 1) $x|_\Gamma=\varphi$; 2) $x|_\Gamma$ — свободна. Обе задачи укладываются в данную выше схему, положив $\mathfrak{X}=C_1(T)$, $\mathfrak{X}_1=C(T)\times C(T)$, $\mathfrak{N}=[C_1(T)]^*$, $\mathfrak{N}_1=[C(T)\times C(T)]^*$, $A=(\partial/\partial t, \partial/\partial\tau)$, $A^*=(\partial/\partial t, \partial/\partial\tau)^*$. В первой задаче $X=\{(x(t, \tau): x(t, \tau)|_\Gamma=\varphi(t, \tau)\}$, а во второй $X=C_1(T)$. По определению

$$F^*(y, y_1, y_2)=\sup_{x,\, x_1,\, x_2}[\langle x, y\rangle+\langle x_1, y_1\rangle+\langle x_2, y_2\rangle-F(x, x_1, x_2)]. \tag{4}$$

Для того чтобы получить явный вид функционала F^*, надо описать линейные функционалы $\langle x, y\rangle$ в $C_1(T)$ и $\langle x_1, y_1\rangle$ и $\langle x_2, y_2\rangle$ в $C(T)$. Для функционалов $\langle x_1, y_1\rangle$ и $\langle x_2, y_2\rangle$ в $C(T)$ имеет место

Теорема 2. (Рисс) *Всякий линейный непрерывный функционал* y *на пространстве* $C(T)$ *можно единственным образом представить в виде*

$$\langle x, y\rangle=\int\limits_T x(t, \tau)d\mu,$$

где μ — *регулярная борелевская мера на* T *и* $\|y\|=\int_T d|\mu|=|\mu|(T)$, *а* $|\mu|=\mu^++\mu^-$, *где* μ^+ *и* μ^- — *положительная и отрицательная составляющие меры* μ.

Для получения общего вида непрерывного линейного функционала, з а данного на $C_1(T)$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма об аннуляторе [2, с. 26]. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $A: X \to Y$ — линейный непрерывный оператор, такой, что $\operatorname{Im} A = Y$. Тогда $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*$, т. е. аннулятор ядра равен множеству значений сопряженного оператора.*

Равенство $\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ дает

$$\langle x, A^*y\rangle = \int_T x'_t(t, \tau)d\mu_1 + \int_T x'_\tau(t, \tau)d\mu_2. \tag{5}$$

Напомним, что $Ax = (\partial/\partial t, \partial/\partial\tau)x = (x'_t, x'_\tau)$, откуда следует, что

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x'_t, y_1\rangle + \langle x'_\tau, y_2\rangle = \int_T x'_t(t, \tau)d\mu_2 + \int_T x'_\tau(t, \tau)d\mu_2$$

согласно теореме Рисса. Отсюда видно, что поскольку мы рассматриваем задачу об $\inf f^*(-A^*y_1, y_1)$ не на всем пространстве $\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}_1$, а только на $\operatorname{Im} A^*\times\mathfrak{N}_1$, то (5) дает общий вид непрерывного билинейного функционала, заданного на $C_1(T)\times A^*[C^*(T)\times C^*(T)]$. Однако для нахождения $(\partial/\partial t, \partial/\partial\tau)^*$, т. е. A^*, нам будет нужен общий вид непрерывного линейного функционала, з аданного на $C_1(T)$. Найдем его.

Пусть y — непрерывный линейный функционал на $C_1(T)$. Обозначим $a = \langle 1, y\rangle$ и рассмотрим функционал $\bar{y}$, заданный следующим равенством $\langle x, \bar{y}\rangle = \langle x, y\rangle - ax(0, 0)$. Покажем, что $\bar{y}\in(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, т. е. что $\langle x, \bar{y}\rangle = 0$ для всякой функции $x\in \operatorname{Ker} A$, т. е. $x = \mathrm{const}$. Действительно $\langle x, \bar{y}\rangle = \langle x, y\rangle - ax(0, 0) = x(0, 0)\langle 1, y\rangle - ax(0, 0) = 0$. По лемме об аннуляторе существует функционал $y_1\in[C(T)\times C(T)]^*$ такой, что $\bar{y} = A^*y_1$, т. е. такой, что для всякого $x\in C_1(T)$ справедливо

$$\langle x, \bar{y}\rangle = \langle (x'_t, x'_\tau), y_1\rangle = \int_T x'_t(t, \tau)d\mu_1 + \int_T x'_\tau(t, \tau)d\mu_2.$$

Отсюда $\langle x, y\rangle = ax(0,0) + \int_T x'_t(t, \tau)\, d\mu_1 + \int_T x'_\tau(t, \tau)d\mu_2$, где μ_1 и μ_2 — регулярные борелевские меры и

$$\|y\| = |a| + [(\int_T d|\mu_1|)^2 + (\int_T d|\mu_2|)^2]^{1/2}.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Определение 4. *Счетно аддитивная функция множеств μ, заданная на σ-алгебре U подмножеств множества T называется абсолютно непрерывной, если она задана и равна нулю на каждом множестве $F\in U$ лебеговской меры нуль.*

Рассмотрим функционал

$$F(x_1, x_2) = \int_T\int f(t, \tau, x_1(t, \tau), x_2(t, \tau))dtd\tau,$$

где f — выпуклая и конечная по (x, x_2) для почти всех $(t, \tau)\in T$ и измеримая по (t, τ) для всех $(x_1, x_2)\in R^2$ функция, $x_1(\,.\,,\,.\,)\in C(T)$, $x_2(\,.\,,\,.\,)\in C(T)$.

Тогда

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1, x_2}[\int_T x_1(t, \tau)d\mu_1 + \int_T x_2(t, \tau)d\mu_2 - \int_T\int f(t, \tau, x_1(t, \tau), x_2(t, \tau)dtd\tau$$

и справедлива следующая

Лемма 1. *Если $F^*(\mu_1, \mu_2)<\infty$, то меры μ_1 и μ_2 абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Пусть $F^*(\mu_1, \mu_2)<\infty$, $\varepsilon>0$ и $N>0$ произвольные фиксированные числа. Пусть $E\subset T$ произвольное множество меры $\operatorname{mes} E<\varepsilon$ и $E_1\supset E$ — открытое множество меры $\operatorname{mes} E_1<2\varepsilon$. Обозначим через M множество

$$M=\{(x_1(\cdot\,,\cdot),\ x_2(\cdot\,,\cdot))\in C(T)\times C(T): |x_1(t,\tau)|\leq N,\ |x_2(t,\tau)|\leq N \ \text{при}$$
$$(t,\tau)\in E \ \text{ и } \ x_2(t,\tau)=x_2(t,\tau)=0 \ \text{ при } \ (t,\tau)\notin E_1\}.$$

По неравенству Юнга для всех $x_1(\cdot\,,\cdot)\in M$, $x_2(\cdot\,,\cdot)\in M$ имеем

$$\int_{E_1} x_1(t,\tau)d\mu_1+\int_{E_1} x_2(t,\tau)d\mu_2\leq F^*(\mu_1,\mu_2)+F(0,0)$$
$$+\iint_{E_1} f(t,\tau,x_1(t,\tau),x_2(t,\tau))dtd\tau-\iint_{E_1} f(t,\tau,0,0)dtd\tau.$$

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега дает, что $\lim\iint_{E_1} f(t,\tau,$ $x_1(t,\tau), x_2(t,\tau))dtd\tau\to 0$ при $\operatorname{mes} E_1\to 0$ для любых $x_1(\cdot\,,\cdot)$, $x_2(\cdot\,,\cdot)$ (скажем, принадлежащих M). Тогда

$$\lim_{\operatorname{mes} E\to 0}\ \sup_{\substack{x_1(\cdot,\cdot)\in M\\ x_2(\cdot,\cdot)\in M}} \left[\int_E x_1(t,\tau)d\mu_1+\int_E x_2(t,\tau)d\mu_2\right]=\lim_{\operatorname{mes} E\to 0}\left[N|\mu_1|_E+|\mu_2|_E\right]$$
$$\leq F^*(\mu_1,\mu_2)+F(0,0)+\lim_{\operatorname{mes} E_1\to 0}\left[\iint_{E_1} f^*(t,\tau,x_1(t,\tau),x_2(t,\tau))dtd\tau\right.$$
$$\left.-\iint_{E_1} f(t,\tau,0,0)dtd\tau\right]=F^*(\mu_1,\mu_2)+F(0,0).$$

Поскольку $F^*(\mu_1,\mu_2)+F(0,0)\geqq 0$ фиксированное число, то неравенство $\lim_{\operatorname{mes} E\to 0} N(|\mu_2|_E+|\mu_2|_E)\leq F^*(\mu_1,\mu_2)+F(0,0)$ будет нарушено при $|\mu_1|_E+|\mu_2|_E>0$, взяв $N>0$ достаточно большое. Отсюда ввиду произвольности E следует, что μ_1 и μ_2 абсолютно непрерывны на T.

Пусть задан функционал $F(x)=\iint_T f(t,\tau,x(t,\tau))dtd\tau$, где f выпуклая и конечная по x для почти всех $(t,\tau)\in T$ и измеримая по (t,τ) для всех $x\in R^1$ функция; $x(\cdot\,,\cdot)\in C_1(T)$. Двойственный к этому функционалу задается формулой

$$F^*(a,\mu_3,\mu_4)=\sup_x\left[ax(0,0)+\int_T x'_t(t,\tau)d\mu_3\right.$$
$$\left.+\int_T x'_\tau(t,\tau)d\mu_4-\iint_T f(t,\tau,x(t,\tau))dtd\tau\right].$$

Имеет место

Лемма 2. *Если $F^*(a,\mu_3,\mu_4)<\infty$, то μ_3 и μ_4 абсолютно непрерывны.*

Доказательство мало отличается от доказательства предыдущей леммы, и мы приводить его не будем.

Нам понадобятся следующие две теоремы:

Теорема 3. (Радон-Никодим, [6, с. 180]). *Абсолютно непрерывная счетно аддитивная функция множеств $\mu(E)$ есть интеграл от некоторой суммируемой на каждом борелевском множестве $E\subset T$ функции $\xi(t,\tau)$, определенной однозначно с точностью до множества меры нуль.*

Теорема 4. [3, с. 227]. *Если* $g(\pi)$ *представима в виде*

$$g(\pi)=\iint_{\pi} g(t,\tau)dtd\tau, \quad \text{то} \quad \int_T f(t,\tau)dg=\iint_T f(t,\tau)\cdot g(t,\tau)dtd\tau,$$

где π — *прямоугольник вида* $\pi=[a, b]$, $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2)$ $\pi=\{(t,\tau)\in R^2:$ $a_1\leqq t\leqq b_1,\ a_2\leqq\tau\leqq b_2\}$.

Из этих теорем и верхних двух лемм следует, что

$$\int_T x_t'(t,\tau)d\mu_3=\iint_T x_t'(t,\tau)\,y_3(t,\tau)dtd\tau, \quad \int_T x(t,\tau)d\mu_1=\iint_T x(t,\tau)\,y_1(t,\tau)dtd\tau,$$

$$\int_T x_\tau'(t,\tau)d\mu_4=\iint_T x_\tau'(t,\tau)\,y_4(t,\tau)dtd\tau, \quad \int_T x(t,\tau)d\mu_2=\iint_T x(t,\tau)\,y_2(t,\tau)dtd\tau,$$

и отсюда

$$F^*(a, y_3, y_4)=\sup_x\{ax(0,0)+\iint_T[x_t'(t,\tau)\,y_3(t,\tau)+x_\tau'(t,\tau)\,y_4(t,\tau)-f(t,\tau,x(t,\tau))]dtd\tau\},$$

$$F^*(y_1,y_2)=\sup_{x_1,\,x_2}\iint_T[x_1(t,\tau)\,y_1(t,\tau)+x_2(t,\tau)\,y_2(t,\tau)-f(t,\tau,\ x_1(t,\tau),\ x_2(t,\tau)]dtd\tau.$$

Лемма 3. $F^*(y_1,y_2)=\iint_T f^*(t,\tau,\ y_1(t,\tau),\ y_2(t,\tau))dtd\tau$, *где* $f^*(t,\tau,\ y_1,y_2)=\sup_{x_1,\,x_2}[x_1y_1+x_2y_2-f(t,\tau,\ x_1,\ x_2)]$.

Доказательство аналогично доказательству подобной леммы, проведенному для одномерного случая в [5].

Лемма 4. *Если* $F^*(a,y_3,y_4)<\infty$, *то* y_{3t}' *и* $y_{4\tau}'$ *существуют.*

Доказательство: Пусть $F^*(a,y_3,y_4)<\infty$. По неравенству Юнга

$$ax(0,0)+\iint_T x_t'(t,\tau)\,y_3(t,\tau)dtd\tau+\iint_T x_\tau'(t,\tau)\,y_4(t,\tau)dtd\tau\leqq F^*(a,y_3,y_4)+F(x).$$

Это неравенство и ограничения, наложенные на функцию f, дают, что функционал

$$(6) \qquad ax(0,0)+\iint_T x_t'(t,\tau)\,y_3(t,\tau)dtd\tau+\iint_T x_\tau'(t,\tau)\,y_4(t,\tau)dtd\tau$$

ограничен в топологии пространства $C(T)$ на множестве $C_1(T)$, всюду плотном в $C(T)$. Но тогда его можно продолжить по непрерывности до линейного функционала на $C(T)$, т. е. существует регулярная борелевская мера μ такая, что равенство

$$ax(0,0)+\iint_T x_t'(t,\tau)\,y_3(t,\tau)dtd\tau+\iint_T x_\tau'(t,\tau)\,y_4(t,\tau)dtd\tau=\int_T x(t,\tau)d\mu$$

выполнено для всех $x\in C_1(T)$. Для функционала в правой стороне, используя доказанное выше, получаем $\int_T x(t,\tau)d\mu=\iint_T x(t,\tau)\,y(t,\tau)dtd\tau$. Положим, не уменьшая общность $y(t,\tau)=u_t'(t,\tau)+v_\tau'\,.(t,\tau)$. Тогда

$$ax(0,0)+\iint_T[x_t'(t,\tau)\,y_3(t,\tau)+x_\tau'(t,\tau)\,y_4(t,\tau)]dtd\tau$$

$$=\iint_T x(t,\tau)[u_t'(t,\tau)+v_\tau'(t,\tau)]dtd\tau.$$

Применяя формулу Грина, получаем

$$\iint_T[x(t,\tau)u_t'(t,\tau)+x(t,\tau)v_\tau'(t,\tau)]dtd\tau$$

$$=\iint_T\left[\frac{\partial}{\partial t}(x(t,\tau)u(t,\tau))+\frac{\partial}{\partial\tau}(x(t,\tau)v(t,\tau))\right]dtd\tau-\iint_T[x'_t(t,\tau)u(t,\tau)+x'_\tau(t,\tau)v(t,\tau)]dtd\tau$$

$$=\int_\Gamma-x(t,\tau)v(t,\tau)dt+x(t,\tau)u(t,\tau)d\tau-\iint_T[x'_t(t,\tau)u(t,\tau)+x'_\tau(t,\tau)v(t,\tau)]dtd\tau$$

$$=ax(0,\ 0)+\iint_T[x'_t(t,\tau)\,y_3(t,\tau)+x'_\tau(t,\tau)\,y_4(t,\tau)]dtd\tau$$

для всех $x\in C_1(T)$ и, следовательно,

$$\iint_T[x'_t(t,\tau)(y_3(t,\tau)+u(t,\tau))+x'_\tau(t,\tau)(y_4(t,\tau)+v(t,\tau))]dtd\tau=0,\quad \forall x\in C_1(T),\ x|_\Gamma=0.$$

Отсюда следует, что y'_{3_t} и $y'_{4\tau}$ существуют, и $y'_{3_t}=-u'_t$, $y'_{4\tau}=-v'_\tau$ для почти всех $(t,\tau)\in T$. Кроме того, из верхних неравенств получаем, что $a=0$, $u|_\Gamma=v|_\Gamma=0$ и, следовательно, функционал (6) принимает вид

$$\iint_T x(t,\tau)(-y'_{3_t}(t,\tau)-y'_{4\tau}(t,\tau))dtd\tau. \tag{7}$$

Для функционала $F^*(a,\ y_3,\ y_4)$, используя (4), получаем

$$F^*(y_3,\ y_4)=\sup_{x\in C_1}[\iint_T[x(t,\tau)(-y'_{3_t}(t,\tau)-y'_{4\tau}(t,\tau))-f(t,\tau,\ x(t,\tau))]dtd\tau]$$

$$=\iint_T\sup_{x\in R^1}[x(-y'_{3_t}(t,\tau)-y'_{4\tau}(t,\tau)-f(t,\tau,x)]dtd\tau=\iint_T f^*(t,\tau,\ -y'_{\ t}(t,\tau)-y'_{4\tau}(t,\tau))dtd\tau.$$

Справедливость равенства $\sup\iint\ldots=\iint\sup\ldots$ доказывается как и в одномерном случае [5, с. 280, лемма 2]. Вернемся теперь к равенству (4). Применяя верхние результаты, получаем

$$F^*(y_1,y_2,y_3,y_4)=\sup_{x,\ x_1,\ x_2}[ax(0,0)+\int_T x'_t(t,\tau)d\mu_1+\int_T x'_\tau(t,\tau)d\mu_2$$

$$+\int_T x_1(t,\tau)d\mu_3+\int_T x_2(t,\tau)d\mu_4-\iint_T f(t,\tau,x(t,\tau),\ x_1(t,\tau),\ x_2(t,\tau))dtd\tau]$$

$$=\sup_{x,\ x_1,\ x_2}\{\iint_T[x(t,\tau)(-y'_{1_t}(t,\tau)-y'_{2\tau}(t,\tau)+x_1(t,\tau)\,y_3(t,\tau)+x_2(t,\tau)\,y_4(t,\tau)]dtd\tau \tag{8}$$

$$-\iint_T f(t,\ \tau,\ x(t,\ \tau),\ x_1(t,\ \tau),\ x_2(t,\ \tau))dtd\tau\}.$$

Фиксируем x. Тогда

$$\sup_{x_1,\ x_2}\ \{\iint_T[x(t,\tau)(-y'_{1_t}(t,\tau)-y'_{2\tau}(t,\tau))+x_1(t,\tau)y_3(t,\tau)+x_2(t,\tau)\,y_4(t,\tau)]dtd\tau$$

$$-\iint_T f(t,\tau,x(t,\tau),x_1(t,\tau),x_2(t,\tau))dtd\tau\}=\iint_T x(t,\tau)(-y'_{1_t}(t,\tau)-y'_{2\tau}(t,\tau))dtd\tau \tag{9}$$

$$+\iint_T\ \sup_{x_1,\ x_2}\ [x_1y_3(t,\tau)+x_2\,y_4(t,\tau)-f(t,\ \tau,\ x(t,\tau),\ x_1,\ x_2)]dtd\tau.$$

Обозначим $H(t,\tau,y_3,y_4)=\sup_{x_1,\ x_2}[x_1\,y_3+x_2y_4-f(t,\tau,x,x_1,x_2)]$. Функцию H будем называть функцией Гамильтона функции f. Из (8) и (9) получаем

$$F^*(y_1,y_2,y_3,y_4)=\sup_x[\iint_T x(t,\tau)(-y'_{1_t}(t,\tau)-y'_{2\tau}(t,\tau)dtd\tau$$

$$+\iint_T H(t,\tau,x(t,\tau),y_3(t,\tau),y_4(t,\tau))dtd\tau]=\iint_T\sup_x[x(-y'_{1_t}(t,\tau)-y'_{2\tau}(t,\tau)$$

$$+H(t,\tau,x,y_3(t,\tau),y_4(t,\tau))]dtd\tau$$

$$=\iint_T f^*(t,\tau,-y'_{1_t}(t,\tau)-y'_{2\tau}(t,\tau),y_3(t,\tau),y_4(t,\tau))dtd\tau.$$

Теорема 5. *Пусть функция* $f(t,\tau,x,x_1,x_2)$ *выпукла и конечна по* (x,x_1,x_2) *для почти всех* $(t,\tau)\in T$ *и измерима по* (t,τ) *для всех* $(x,x_1,x_2)\in R^3$. *Тогда справедливы следующие соотношения*:

а. *Для задачи со свободной по границе* Γ *функции* $x(t,\tau)$

$$\inf_{x\in C_1(T)}\iint_T f(t,\tau,x(t,\tau),x'_t(t,\tau),x'_\tau(t,\tau))dtd\tau \tag{10}$$

$$+\min\iint_T f^*(t,\tau,y'_t(t,\tau)+z'_\tau(t,\tau),y(t,\tau),z(t,\tau))dtd\tau=0,$$

где min *берется по всем* y *и* z, *для которых* y'_t *и* z'_τ *существуют и* $y(t,\tau)|_\Gamma=z(t,\tau)|_\Gamma=0$.

б. *Для задачи с фиксированной по границе области функции* $x(t,\tau)$:

$$\inf_{\substack{x\in C_1(T)\\ x|_\Gamma=\varphi}}\iint_T f(t,\tau,x(t,\tau),x'_t(t,\tau),x'_\tau(t,\tau))dtd\tau+\min\Big[\int_\Gamma x(t,\tau)z(t,\tau)dt \tag{11}$$

$$-\int_\Gamma x(t,\tau)\,y(t,\tau)d\tau+\iint_T f^*(t,\tau,y'_t(t,\tau)+z'_\tau(t,\tau),y(t,\tau),z(t,\tau))dtd\tau\Big]=0,$$

где min *берется по всем* y, z, *для которых* y'_t *и* z'_τ *существуют.*

Доказательство. Поскольку функционал $F(x,x_1,x_2)$ является N-функцией в нормированной топологией пространства $C_1(T)\times C(T)\times C(T)$, то справедливо равенство

$$\inf_{x\in C_1(T)}F(x,x'_t,x'_\tau)+\min_{w+A^*(w_1,w_2)=0}F^*(w,w_1,w_2)=0, \tag{12}$$

где $w\in[C_1(T)]^*$, а $(w_1,w_2)\in[C(T)\times C(T)]^*$. Оператор A имеет вид $\partial/\partial t$, $\partial/\partial\tau$. Найдем A^*. Обозначим $w=(a,y_2(.\,,.),\ y_2(.\,,.))$; $w_1=y_3(.\,,.)$; $w_2=y_4(.\,,.)$; $A^*(w_1,w_2)=(b,z_1(.\,,.),\ z_2(.\,,.))$. Тогда

$$bx(0,0)+\iint_T x'_t(t,\tau)z_1(t,\tau)dtd\tau+\iint_T x'_\tau(t,\tau)z_2(t,\tau)dtd\tau$$

$$=\iint_T x'_t(t,\tau)\,y_3(t,\tau)dtd\tau+\iint_T x'_\tau(t,\tau)\,y_4(t,\tau)dtd\tau$$

для всех $x\in C_1(T)$, откуда $b=0$, $y_3=z_1$, $y_4=z_2$, т. е. $A^*(w_1,w_2)=(0,y_3,y_4)$ и равенство $w+A^*(w_1,w_2)=0$ дает $(a,y_1,y_2)+(0,y_3,y_4)=(0,0,0)$. Окончательно получаем $a=0$, $y_1(t,\tau)=-y_3(t,\tau)$, $y_2(t,\tau)=-y_4(t,\tau)$ и равенство (12) принимает вид (10). В случае б) для функционала F^* получаем

$$F^*(w,w_1,w_2)=\int_\Gamma x(t,\tau)z(t,\tau)dt-x(t,\tau)\,y(t,\tau)d\tau$$

$$+\iint_T f^*(t,\tau,y'_t(t,\tau)+z'_\tau(t,\tau),y(t,\tau),z(t,\tau))dtd\tau,$$

что вместе с (12) дает (11).

Для полноты изложения сформулируем еще две теоремы. Поскольку их доказательства в принципе мало отличаются от доказательств соответствующих теорем для одномерного случая [5, с. 290—291, теорема 2 и 3], мы их приводить не будем.

Пусть, как и выше, функция $f(t, \tau, x, x_1, x_2)$ предположена выпуклой и конечной по (x, x_1, x_2) для почти всех $(t, \tau)\in T$ и измеримой по $(t, \tau)\in T$ для всех $(x, x_1, x_2)\in R^3$. Тогда имеет место

Теорема 6. *Для того чтобы функционал* (2) *достигал минимума в точке* $(x^0(t, \tau), x_1^0(t, \tau), x_2^0(t, \tau))$ *при условии* (3) *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие* $(w^0, w_1^0, w_2^0)\in \partial F(x^0, x_1^0, x_2^0)$, $w=(a^0, y_1^0, y_2^0)$, $w_1^0=y_3^0$, $w_2^0=y_4^0$, *для которых бы выполнялись следующие соотношения, которые мы будем называть уравнением Эйлера*:

а. *Для задачи с* $x|_\Gamma=\varphi$

$$y_1^0(t, \tau)+y_3^0(t, \tau)=0, \quad y_2^0(t, \tau)+y_4^0(t, \tau)=0. \tag{13}$$

б. *Для задачи со свободной на границе функцией*

$$\begin{gathered} y_1^0(t, \tau)+y_3^0(t, \tau)=0 \\ y_2^0(t, \tau)+y_4^0(t, \tau)=0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} y_1^0(t, \tau)|_\Gamma=-y_3^0(t, \tau)|_\Gamma=0 \\ y_2^0(t, \tau)|_\Gamma=-y_4^0(t, \tau)|_\Gamma=0. \end{gathered} \tag{15}$$

Теорема 7. *Для того чтобы функционал (2) достигал минимума в точке* $(x^0(t, \tau), x_1^0(t, \tau), x_2^0(t, \tau))$ *при условии (3), необходимо и достаточно, чтобы существовали такие* $y_1^0(t, \tau), y_2^0(t, \tau), y_3^0(t, \tau), y_4^0(t, \tau)$, *для которых*

$$[-y_1^0(t, \tau)-y_2^0(t, \tau), y_3^0(t, \tau), y_4^0(t, \tau)]\in\partial f(t, \tau, x^0(t, \tau), x_1^0(t, \tau), x_2^0(t, \tau))$$

для почти всех $(t, \tau)\in T$, *и которые удовлетворяли бы равенствам* (13), *(14) и (15).*

3. В случае, когда функция f удовлетворяет некоторым требованиям гладкости и роста, подинтегральная функция в двойственной задаче дифференцируема по своим переменным и система Эйлера имеет вид

$$f_y^*-\frac{\partial}{\partial t}f_u^{*\prime}=0, \quad f^{*\prime}-\frac{\partial}{\partial\tau}f_u^{*\prime}=0,$$

где через u мы обозначили $y_t'+z_\tau'$. Если в основной задаче имеется ограничение $x|_\Gamma=\varphi$, то условия трансверсальности на границе дают $[x-f_u^{*\prime}]|_\Gamma=0$. Напомним, что если в основной задаче на x не наложены ограничения на границе, то $y|_\Gamma=z|_\Gamma=0$.

Как известно, если функция f имеет линейный рост по x_t' или x_τ', то в принципе решения в C^1 не существуют. Увидим на примерах, что решения в этом случае могут существовать в C^1, при некоторых граничных условиях более специального вида.

Пример 1. Найти нижнюю грань функционала

$$F(x)=\iint_T t\tau(x^2+|x_t'|+|x_\tau'|)dtd\tau, \quad x|_\Gamma=\varphi. \tag{16}$$

Найдем f^*. Имеем $f^*(t, \tau, y_t'+z_\tau', y, z)=\sup_{x, x_1, x_2}[x(y_t'+z_\tau')+x_1y+x_2z-t\tau(x^2+|x_1|+|x_2|)]$.

Отсюда видно, что $f^*=\infty$, если $|y|>t\tau$ или $|z|>t\tau$. Дифференцируя по x, получаем $y'_t+z'_\tau=2t\tau x$

$$x=(y'_t+z'_\tau)/2t\tau, \quad x(y'_t+z'_\tau)-t\tau x^2=(y'_t+z'_\tau)^2/4t\tau. \tag{17}$$

Итак

$$f^*=\begin{cases}(y'_t+z'_\tau)^2/4t\tau & \text{при } |y|\leq t\tau \text{ и } |z|\leq t\tau\\ \infty & \text{при } |y|>t\tau \text{ или } |z|>t\tau.\end{cases}$$

Двойственная задача принимает вид

$$\inf_{\substack{y,\,z\\ |y|\leq t\tau,\ |z|\leq t\tau}} \left[\int_\Gamma xzdt-xyd\tau+\int_T\int\frac{(y'_t+z'_\tau)^2}{4t\tau}dtd\tau\right]. \tag{18}$$

Если рассмотрим задачу (18) без ограничений $|y|\leq t\tau$, $|z|\leq t\tau$, то ее система Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y'_t+z'_\tau}{2t\tau}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{y'_t+z'_\tau}{2t\tau}\right)=0. \tag{19}$$

Из первого равенства в (17) и из (19) следует, что $x=\text{const}$.

Мы получили, что всюду, где y и z удовлетворяют ограничениям, имеем $x=\text{const}$. Очевидно, задача о нижней грани функционала (16) будет иметь непрерывное решение $x=\text{const}$, только в случае, когда $\varphi=\text{const}$ и $|y|\leq t\tau$, $|z|\leq t\tau$ для всех $(t,\tau)\in T$.

Пример 2.

$$F(x)=\int_T\int t\tau(x^2+x_t'^2+|x'_\tau|)dtd\tau, \quad x|_\Gamma=\varphi. \tag{20}$$

Имеем $f^*(y'_t+z'_\tau, y, z)=\sup_{x,\,x_1,\,x_2}[x(y'_t+z'_\tau)+x_1y+x_2z-t\tau(x^2+x_1^2+|x_2|)]$ откуда $y'_t+z'_\tau=2t\tau$, $x=(y'_t+z'_\tau)/2t\tau$, $y=2t\tau x$, $|z|\leq t\tau$ и для двойственной задачи получаем

$$\inf_{\substack{y,\,z\\ |z|\leq t\tau}}\left[\int_\Gamma xzdt-xyd\tau+\int_T\int\frac{(y'_t+z'_\tau)^2+y^2}{4t\tau}\right]dtd\tau.$$

Система Эйлера имеет вид (не принимая во внимание ограничение $|z|\leq t\tau$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{y'_t+z'_\tau}{2t\tau}=\frac{y}{2t\tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{y'_t+z'_\tau}{2t\tau}=0,$$

т. е. $(y'_t+z'_\tau)/2t\tau=\Phi(t)$, $y=2t\tau\Phi'(t)$ и получаем новую систему $y'_t+z'_\tau=2t\tau\Phi(t)$, $y=2t\tau\Phi'(t)$.

Если продифференцируем второе равенство по t, вычтем его из первого равенства, получаем

$$z'_\tau=2\tau[t\Phi(t)-\Phi'(t)-\Phi''(t)], \quad z=\tau^2[t\Phi(t)-\Phi'(t)-\Phi''(t)]+\psi(t).$$

Ограничение $|z|\leq t\tau$ дает, что $z(t,0)=z(0,\tau)=0$, т. е. $\psi(t)=0$ и $\Phi(0)+\Phi''(0)=0$. Для y и z получаем

$$\left| \begin{array}{l} z = \tau^2[t\Phi(t) - \Phi'(t) - \Phi''(t)] \\ y = 2t\tau\Phi'(t). \end{array} \right.$$

Равенство $2t\tau x = y'_t + z'_\tau$ дает, что всюду, где y и z удовлетворяют системе Эйлера, т. е. z удовлетворяет ограничению $|z| \leq t\tau$, имеем $x = \Phi(t)$, т. е. там поверхность $x(t, \tau)$ будет цилиндрической с направляющей параллельной оси τ. Очевидно, что в этом случае существование непрерывного решения задачи (20) возможно только при $\varphi(0, \tau) = C_1$, $\varphi(1, \tau) = C_2$, $\Phi(0) = C_1$, $\Phi(1) = C_2$, $x(0, t) = x(1, t)$.

Перед тем как перейти к последнему примеру, сделаем следующее дополнение к теории, предполагая, что x и f удовлетворяют тем же самым ограничениям, как и выше.

Пусть функционал F имеет вид

$$F_{uv}(x) = \int_\Gamma x(t,\tau)u(t,\tau)dt + x(t,\tau)v(t,\tau)d\tau + \iint_T f(t,\tau,x(t,\tau),x'_t(t,\tau),x'_\tau(t,\tau))dtd\tau,$$

где u и v заданные на Γ функции. Для двойственного функционала получаем

$$F^*(y,z) = \sup_{x,\,x_1,\,x_2} \{-\int_\Gamma x(t,\tau)(z(t,\tau) + u(t,\tau))dt - x(t,\tau)(y(t,\tau) - v(t,\tau))d\tau$$

$$+ \iint_T [x(t,\tau)(y'_t(t,\tau) + z'_\tau(t,\tau)) + x_1(t,\tau)y(t,\tau) + x_2(t,\tau)z(t,\tau)]dtd\tau$$

$$- \iint_T f(t,\tau,\ x(t,\tau),\ x_1(t,\tau),\ x_2(t,\tau))dtd\tau\}.$$

Если для функции x имеет ограничение $x|_\Gamma = \varphi$, то

$$F^* = -\int_\Gamma x(t,\tau)(z(t,\tau) + u(t,\tau))dt - x(t,\tau)(y(t,\tau) - v(t,\tau))d\tau$$

$$+ \iint_T f^*(t,\tau,\ y'_t(t,\tau) + z'_\tau(t,\tau),\ y(t,\tau),\ z(t,\tau))dtd\tau.$$

Если x свободна на Γ, то

$$F^* = \iint_T f^*(t,\tau,y'_t(t,\tau) + z'_\tau(t,\tau),\ y(t,\tau),\ z(t,\tau))dtd\tau,\ y|_\Gamma = v,\ z|_\Gamma = -u.$$

Пример 3. $F(x) = \iint_T (x'^2_t + x'^2_\tau + 2\psi x)dtd\tau - 2\int_\Gamma x\frac{\partial x}{\partial n}\,ds$, где $(\partial x/dn)|_\Gamma$ и $\psi(t,\tau)$ заданные функции.

Этот функционал вкладывается в нашу схему с известной оговоркой. Его можно представить так:

$$F(x) = \int_\Gamma x\left(-2\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)dt + x\left(2\frac{\partial x}{\partial t}\right)d\tau + \iint_T (x'^2_t + x'^2_\tau + 2x\psi)dtd\tau.$$

Найдем двойственную $f = x'^2_t + x'^2_\tau + 2x\psi$ функцию

$$f^* = \sup_{x,\,x_1,\,x_2} [x(y'_t + z'_\tau) + x_1 y + x_2 z - x'^2_1 - x'^2_2 - 2\psi x].$$

Отсюда $y = 2x_1$, $z = 2x_2$ и

$$f^* = \begin{cases} \dfrac{y^2+z^2}{4} & \text{при} \quad y'_t + z'_\tau = 2\psi \\ \infty & \text{при} \quad y'_t + z'_\tau \neq 2\psi. \end{cases}$$

Итак, двойственная задача является задачей с ограничением типа равенства: $y'_t + z'_\tau - 2\psi = 0$. Для нее составим функцию Лагранжа:

$$L(y, z, \pi) = \iint_T \Big[\frac{y^2+z^2}{4} + \lambda(y'_t + z'_\tau - 2\psi)\Big] dt d\tau, \quad y|_\Gamma = 2\frac{\partial x}{\partial t}, \quad z|_\Gamma = 2\frac{\partial x}{\partial \tau},$$

где $\lambda = \lambda(t, \tau)$ — множитель Лагранжа. Для этой функции система Эйлера имеет вид $\lambda'_t = y/2$; $\lambda'_\tau = z/2$. Добавив к этой системе ограничение, получаем

$$\lambda'_t = y/2; \quad \lambda'_\tau = z/2; \quad y'_t + z'_\tau = 2\psi. \tag{21}$$

Отметим известный из теории двойственности факт, что $\lambda(t, \tau)$, полученное при решении системы (21), будет решением задачи об $\inf F(x)$, т. е. $\lambda(t, \tau) = x^0(t, \tau)$, где $F(x^0) = \min F(x)$. Сейчас поясним, о какой оговорке шла речь.

Ввиду того, что мы рассматриваем все в квадрате T, то из $\partial x/\partial n|_\Gamma$ нельзя получить $\partial x/\partial t$ и $\partial x/\partial \tau$ всюду на границе, т. е. получаем только следующие граничные условия:

$$y(t, 0) = 2\frac{\partial x(t, 0)}{\partial t}; \quad z(0, \tau) = 2\frac{\partial x}{\partial \tau}(0, \tau), \tag{22}$$

$$y(t, 1) = 2\frac{\partial x(t, 1)}{\partial t}; \quad z(1, \tau) = 2\frac{\partial x}{\partial \tau}(1, \tau),$$

а $y(0, \tau)$, $y(1, \tau)$, $z(t, 0)$, $z(t, 1)$ — свободны.

Дифференцируя первое уравнение системы (21) по τ, второе — по t и вычитая, получаем $y'_\tau - z'_t = 0$, что вместе с третьим уравнением дает новую систему $y'_t + z'_\tau = 2\varphi$; $y'_\tau - z'_t = 0$ с граничными условиями (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. Москва, 1974.
3. Э. Камке. Интеграл Лебега — Стильтеса. Москва, 1959.
4. М. М. Цветанов. Двойственность в экстремальных задачах. *Укр. мат. ж.*, **23**, 1971, № 2, 201—218.
5. М. М. Цветанов. Двойственность в задачах вариационного вычисления и оптимального управления. *Известия мат. инст. БАН*, **13**, 1972, 277—315.
6. Г. Е. Шилов., Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. Москва, 1964.

Единый центр науки и подготовки кадров по механике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 9. 12. 1975,
в переработанном виде 29. 7. 1976