Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ИВАНКА Й. ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

В работе даны вторые вариации следующих величин: средней кривизны $\mathcal{H}$ поверхности, кривизны $\varkappa$, нормальной кривизны ν, угла $\theta=(n, l)$, кручения τ и геодезического кручения α произвольной кривой поверхности. Показана жесткость второго порядка односвязных поверхностей вращения смешанной кривизны ограниченных, параллелью L, при следующих краевых условиях: а) вариация средней кривизны $\mathcal{H}$ поверхности вдоль L равна нулю; б) вариация нормальной кривизны ν (кривизны $\varkappa$) кривой L равна нулю; в) вариация угла θ вдоль L равна нулю.

1. Пусть

$$S: x=x(u, v),\ (u, v)\in D \tag{1}$$

регулярная поверхность. Система гладких векторных полей ${}^1z(u, v)$, ${}^2z(u, v)$, $\ldots, {}^nz(u, v)$ называется системой полей бесконечно малого (б. м.) изгибания порядка n поверхности S, если квадрат линейного элемента поверхности

$$S_\varepsilon: x(u, v, \varepsilon)=x(u, v)+\Sigma_{k=1}^{n}\varepsilon^k\, {}^kz(u, v) \tag{2}$$

не содержит членов с $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ [1, 2] (ε — малый числовой параметр). Поля z, $k=1, \ldots, n$, б. м. изгибания (2) определяются с помощью систем:

$$2dx\, d({}^kz)=-\Sigma_{i=1}^{k-1} d({}^iz)\, d({}^{k-1}z),\ k=1, \ldots, n. \tag{3}$$

Бесконечно малое изгибание (2) поверхности (1) называется тривиальным, если поле ${}^1z$ тривиально. Поверхность S называется жесткой n-го порядка, если она не имеет других б. м. изгибаний порядка n, кроме тривиальных.

Настоящая статья посвящена б. м. изгибаниям второго порядка. Во втором пункте статьи даются вторые вариации следующих величин: средней кривизны $\mathcal{H}$ поверхности S, кривизны $\varkappa$, нормальной кривизны ν, угла $\theta=(n, l)$, кручения τ и геодезического кручения α произвольной регулярной кривой L поверхности S. Даны некоторые следствия, вытекающие из полученных выражений. В пунктах 3—7 исследуются б. м. изгибания второго порядка односвязных поверхностей вращения смешанной кривизны, ограниченных параллелью L, при следующих краевых условиях: а) вариация средней кривизны $\mathcal{H}$ поверхности вдоль L равна нулю; б) вариация нормальной кривизны ν (кривизны $\varkappa$) кривой L равна нулю; в) вариация угла θ вдоль L равна нулю.

Заметим, что задача б) для двухсвязных поверхностей вращения рассмотрена в [3].

2. Пусть L произвольная регулярная кривая поверхности S. Вариации величин $\varkappa$, τ, ν, α, θ кривой L имеют вид [4]:

$$\delta\varkappa = \delta\nu \cos\theta, \tag{4}$$

$$\delta\tau = \delta\alpha + \frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\theta}{\varkappa}\,\delta\nu\right), \tag{5}$$

$$\delta\nu = \delta L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\delta M\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + \delta N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \tag{6}$$

$$\delta\alpha = -\delta L\,\frac{du}{d\sigma}\,\frac{du}{ds} - \delta M\left(\frac{du}{d\sigma}\,\frac{dv}{ds} + \frac{dv}{d\sigma}\,\frac{du}{ds}\right) - \delta N\,\frac{dv}{d\sigma}\,\frac{dv}{ds}, \tag{7}$$

$$\delta\theta = -(\delta\nu \sin\vartheta)/\varkappa, \tag{8}$$

а вариация средней кривизны поверхности S

$$\delta\mathcal{H} = (E\delta N + G\delta L - 2F\delta M)/2\,(EG - F^2). \tag{9}$$

Для вторых вариаций величин $\varkappa$, τ, ν, α, θ, $\mathcal{H}$ легко получаем:

$$\delta^2\varkappa = \cos\theta\,\delta^2\nu + \varkappa\,(\delta\theta)^2/2, \tag{10}$$

$$\delta^2\tau = \delta^2\alpha - \frac{d}{ds}\,(\delta^2\theta), \tag{11}$$

$$\delta^2\nu = \delta^2 L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\delta^2 M\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + \delta^2 N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \tag{12}$$

$$\delta^2\alpha = -\delta^2 L\,\frac{du}{d\sigma}\,\frac{du}{ds} - \delta^2 M\left(\frac{du}{d\sigma}\,\frac{dv}{ds} + \frac{dv}{d\sigma}\,\frac{du}{ds}\right) - \delta^2 N\,\frac{dv}{d\sigma}\,\frac{dv}{ds}, \tag{13}$$

$$\delta^2\theta = -\frac{\sin\theta}{\varkappa}\,\delta^2\nu + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\varkappa^2}\,(\delta\nu)^2. \tag{14}$$

$$\delta^2\mathcal{H} = (E\delta^2 N + G\delta^2 L - 2F\delta^2 M)/2(EG - F^2), \tag{15}$$

где du/ds, dv/ds, $(du/d\sigma, dv/d\sigma)$ контравариантные координаты единичного касательного вектора t кривой L (единичного вектора p тангенциальной нормали L).

Из (4)—(15) видно, что имеют место следующие следствия:

Следствие 1. *Если L асимптотическая и кривизна $\varkappa$ кривой L отлична от нуля, то $\varkappa$ сохраняется относительно б. м. изгибания второго порядка тогда и только тогда, когда $\delta\nu|_L = 0$.*

Следствие 2. *Если $\cos\theta \neq 0$ вдоль кривой L и кривизна $\varkappa \neq 0$, то б. м. изгибание второго порядка сохраняет кривизну $\varkappa$ кривой L тогда и только тогда, когда оно сохраняет нормальную кривизну ν кривой L.*

Следствие 3. *Если L геодезическая и имеет кривизну $\varkappa \neq 0$, то вдоль L величина θ всегда сохраняется относительно б. м. изгибания второго порядка.*

Следствие 4. *Если $\sin\theta \neq 0$ вдоль L и $\varkappa \neq 0$, то θ сохраняется относительно б. м. изгибания второго порядка тогда и только тогда, когда сохраняется нормальная кривизна ν.*

Доказательство следствия 1. Из того, что L асимптотическая и вдоль нее $\varkappa \neq 0$, следует, что $\cos\theta\,|_L = 0$ и, следовательно, $\delta\varkappa = 0$. Из (10) видно, что $\delta^2\varkappa = 0$ тогда и только тогда, когда $\delta\theta\,|_L = 0$. Кроме этого, так как $\sin\theta\,|_L \neq 0$, то из (8) следует, что $\delta\theta\,|_L = 0$ тогда и только тогда, когда $\delta\nu|_L = 0$

Замечание 1. Следствие 1 утверждает, что кривизна $\varkappa$ асимптотической L, для которой $\varkappa \neq 0$, сохраняется относительно б. м. изгибания вто рого порядка тогда и только тогда, когда L после изгибания первого порядка остается асимптотической.

На доказательстве остальных следствий не будем останавливаться.

3. Пусть S регулярная поверхность вращения. Относительно подвижной координатной системы $\{0, e, a(v), da/dv\}$ [1] для радиус-вектора $x(u, v)$ произвольной точки поверхности S имеем

$$x(u, v) = u \,.\, e + r(u) \,.\, a(v), \tag{16}$$

где $r = r(u)$ — уравнение меридиана поверхности, а e — единичный вектор оси вращения. Пусть

$${}^1z(u, v) = {}^1\alpha(u, v) \,.\, e + {}^1\beta(u, v) \,.\, a + {}^1\gamma(u, v) \,.\, a', \tag{17}$$

$${}^2z(u, v) = {}^2\alpha(u, v) \,.\, e + {}^2\beta(u, v) \,.\, a + {}^2\gamma(u, v) \,.\, a' \tag{18}$$

система гладких векторных полей б. м. изгибания второго порядка поверхности S. (У поверхности S и полей ${}^1z$ и ${}^2z$ предполагаем класс гладкости, который обеспечивает операции в пунктах 3 и 4.) Из (3) следует, что поля (17) и (18) удовлетворяют соответственно следующим системам [1]:

$${}^1\alpha_u + r'\,{}^1\beta_u = 0, \quad {}^1\beta + {}^1\gamma_v = 0, \quad {}^1\alpha_v + r'\,({}^1\beta_v - {}^1\gamma) + r\,{}^1\gamma_u = 0; \tag{19}$$

$$\begin{gathered} {}^2\alpha_u + r'\,{}^2\beta_u = -[{}^1\alpha_u^2 + {}^1\beta_u^2 + {}^1\gamma_u^2]/2, \; {}^2\beta + {}^2\gamma_v = -[{}^1\alpha_v^2 + ({}^1\beta_v - {}^1\gamma)^2]/2r, \\ {}^2\alpha_v + r'\,({}^2\beta_v - {}^2\gamma) + r\,{}^2\gamma_u = -[{}^1\alpha_u\,{}^1\alpha_v + {}^1\beta_u\,({}^1\beta_v - {}^1\gamma)]. \end{gathered} \tag{20}$$

Так как функции ${}^j\alpha$, ${}^j\beta$, ${}^j\gamma$, $j = 1, 2$, периодические от v с периодом 2π, то представим их рядами Фурье:

$${}^j\alpha(u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^j\varphi_k(u)\, e^{ikv}, \; {}^j\beta(u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^j\chi_k(u)\, e^{ikv}, \; {}^j\gamma(u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^j\psi_k(u)\, e^{ikv}. \tag{21}$$

Тогда из (19), (20) и (21) получаем следующие системы для коэффициентов Фурье [5]:

$${}^1\varphi'_k + r'\,{}^1\chi'_k = 0, \; ik\,{}^1\psi_k + {}^1\chi_k = 0, \; ik\,{}^1\varphi_k + r'\,(ik\,{}^1\chi_k - {}^1\psi_k) + r\,{}^1\psi'_k = 0, \; -\infty < k < \infty \tag{22}$$

$$\begin{gathered} {}^2\varphi'_k + r'\,{}^2\chi'_k = -2^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} ({}^1\varphi'_m\,{}^1\varphi'_{k-m} + {}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{k-m} + {}^1\psi'_m\,{}^1\psi'_{k-m}), \\ ik\,{}^2\psi_k + {}^2\chi_k = -(2r)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{-m(k-m)\,{}^1\varphi_m\,{}^1\varphi_{k-m} \\ + (im\,{}^1\chi_m - {}^1\psi_m)\,[i(k-m)\,{}^1\chi_{k-m} - {}^1\psi_{k-m}]\}, \\ ik\,{}^2\varphi_k + r'(ik\,{}^2\chi_k - {}^2\psi_k) + r\,{}^2\psi'_k = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{i(k-m)\,{}^1\varphi'_m\,{}^1\varphi_{k-m} + {}^1\chi'_m[i(k-m)\,{}^1\chi_{k-m} - {}^1\psi_{k-m}]\}, \\ -\infty < k < \infty. \end{gathered} \tag{23}$$

Производя исключение функции ${}^1\varphi_k$ и ${}^1\psi_k$ из (22), а ${}^2\varphi_k$ и ${}^2\psi_k$ из (23), получаем для ${}^1\chi_k$ и ${}^2\chi_k$ соответственно следующие уравнения второго порядка

$$r\,{}^1\chi''_k + (k^2 - 1)\, r''\,{}^1\chi_k = 0, \tag{24}$$

$$r\,{}^2\chi''_k + (k^2 - 1)\, r''\,{}^2\chi_k = \mathcal{R}_k, \tag{25}$$

где

(26) $$\mathcal{R}_k = r\mathcal{R}''_{2k} - r''\mathcal{R}_{2k} + k\mathcal{R}'_{3k} - k^2\mathcal{R}_{1k},$$

$$\mathcal{R}_{1k} = -2^{-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}({}^1\varphi'_m\,{}^1\varphi'_{k-m} + {}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{k-m} + {}^1\psi'_m\,{}^1\psi'_{k-m}),$$

(27) $$\mathcal{R}_{2k} = -(2r)^{-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\{-m(k-m)\,{}^1\varphi_m\,{}^1\varphi_{k-m} + (im\,{}^1\chi_m - {}^1\psi_m) \times[i(k-m)\,{}^1\chi_{k-m} - {}^1\psi_{k-m}]\},$$

$$\mathcal{R}_{3k} = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\{(k-m)\,{}^1\varphi'_m\,{}^1\varphi_{k-m} + {}^1\chi'_m[(k-m)\,{}^1\chi_{k-m} + i\,{}^1\psi_{k-m}]\}.$$

4. В этом пункте даны вариации коэффициентов второй квадратичной формы регулярной поверхности вращения S (см. (16)). Рассмотрим семейство поверхностей

(28) $$S_\varepsilon : x(u, v, \varepsilon) = (u + \varepsilon\,{}^1\alpha + \varepsilon^2\,{}^2\alpha)\,.\,e + (r + \varepsilon\,{}^1\beta + \varepsilon^2\,{}^2\beta)\,.\,a + (\varepsilon\,{}^1\gamma + \varepsilon^2\,{}^2\gamma)\,.\,a'$$

— б. м. изгибание второго порядка поверхности S. После обычных выкладок для коэффициентов L_ε, M_ε, N_ε второй квадратичной формы поверхности S_ε получаем:

$$L_\varepsilon = (EG-F^2)^{-1/2}\{-rr'' + r(r'\,{}^1\alpha_{uu} - {}^1\beta_{uu} - r''\,{}^1\alpha_u)\,\varepsilon + [r(r'\,{}^2\alpha_{uu} - {}^2\beta_{uu}) - r''({}^2\beta + {}^2\gamma_v + r\,{}^2\alpha_u) + r({}^1\beta_u\,{}^1\alpha_{uu} - {}^1\alpha_u\,{}^1\beta_{uu}) + r''\,{}^1\alpha_v\,{}^1\gamma_u + {}^1\gamma_{uu}({}^1\beta_v - {}^1\gamma - r'\,{}^1\alpha_v)]\varepsilon^2 + \cdots\},$$

(29) $$M_\varepsilon = (EG-E^2)^{-1/2}\{(rr'\,{}^1\alpha_{uv} - r\,{}^1\beta_{uv} + r\,{}^1\gamma_u + r'\,{}^1\beta_v - r'\,{}^1\gamma - r'^2\,{}^1\alpha_v)\,\varepsilon + [r(r'\,{}^2\alpha_{uv} - {}^2\beta_{uv} + {}^2\gamma_u) + r'({}^2\beta_v - {}^2\gamma - r'\,{}^2\alpha_v) + {}^1\alpha_u(-r\,{}^1\beta_{uv} + r\,{}^1\gamma_u + r'\,{}^1\beta_v - r'\,{}^1\gamma) + {}^1\beta_u(r\,{}^1\alpha_{uv} - 2r'\,{}^1\alpha_v + {}^1\beta_v - {}^1\gamma) + {}^1\gamma_{uv}({}^1\beta_v - r'\,{}^1\alpha_v - {}^1\gamma)]\,\varepsilon^2 + \cdots\},$$

$$N_\varepsilon = (EG-F^2)^{-1/2}\{r^2 + r(r'\,{}^1\alpha_{vv} - {}^1\beta_{vv} + {}^1\gamma_v + r\,{}^1\alpha_u)\,\varepsilon + [r(r'\,{}^2\alpha_{vv} - {}^2\beta_{vv} + 3\,{}^2\gamma_v + 2\,{}^2\beta + r\,{}^2\alpha_u) + r({}^1\beta_u\,{}^1\alpha_{vv} - {}^1\alpha_v\,{}^1\gamma_u - {}^1\alpha_u\,{}^1\beta_{vv} + {}^1\alpha_u\,{}^1\gamma_v) + {}^1\gamma(r'\,{}^1\alpha_v - 2\,{}^1\beta_v + {}^1\gamma) + {}^1\beta_v({}^1\beta_v - r'\,{}^1\alpha_v)]\,\varepsilon^2 + \cdots\}.$$

Для вариаций коэффициентов второй квадратичной формы поверхности (16) из (29), учитывая (19) и (20), имеем

(30) $$\delta L = -\sqrt{1+r'^2}\,{}^1\beta_{uu},$$

(31) $$\delta M = \sqrt{1+r'^2}\,[r({}^1\gamma_u - {}^1\beta_{uv}) + r'({}^1\beta_v - {}^1\gamma)]/r,$$

(32) $$\delta N = -\sqrt{1+r'^2}\,({}^1\beta + {}^1\beta_{vv}),$$

(33) $$\delta^2 L = \sqrt{1+r'^2}\,[-2r^2\,{}^2\beta_{uu} - r^2 r''\,{}^1\beta_u^2 - 2r^2 r'\,{}^1\beta_u\,{}^1\beta_{uu} + r''({}^1\beta_v - {}^1\gamma)^2 + 2r\,{}^1\gamma_{uu}({}^1\beta_v - {}^1\gamma)]/2r^2,$$

(34) $$\delta^2 M = -\sqrt{1+r'^2}\,[r\,{}^2\beta_{uv} - r'({}^2\beta_v - {}^2\gamma) - r\,{}^2\gamma_u + rr'\,{}^1\beta_u\,{}^1\beta_{uv} - rr'\,{}^1\beta_u\,{}^1\gamma_u - r'^2\,{}^1\beta_u({}^1\beta_v - {}^1\gamma)]/r,$$

$$(35)\quad \delta^2 N = \sqrt{1+r'^2}[-2r({}^2\beta_{vv}+{}^2\beta)-4rr'\,{}^1\gamma_u({}^1\beta_v-{}^1\gamma)-2r^2\,{}^1\gamma_u^2-(2r'^2+1)({}^1\beta_v-{}^1\gamma)^2$$
$$+r^2\,{}^1\beta_u^2-2rr'\,{}^1\beta_u({}^1\beta_{vv}+{}^1\beta)]/2r.$$

5. Пусть S_1 поверхность вращения и c её меридиан, где

$$c: r=r(u)\in C[0,u_2]\cap C^2(0,u_2],\ r(0)=0,\ r(u)>0 \text{ в } (0,u_2],$$
$$\lim_{u\to 0} r'(u)=+\infty,\ r''(u)\leqq 0 \text{ в } (u,u_1],\ 0<u_1<u_2,\ r''(u)\geqq 0 \text{ в } [u_1,u_2].$$

Пусть S_1 аналитическая в окрестности полюса $u=0$ и полюс не является параболической точкой поверхности. Обозначим граничную параллель $u=u_2$ через L. Предположим, что искомые поля ${}^1z(u,v)$ и ${}^2z(u,v)$ принадлежат классу C^2.

Имеет место следующая

Лемма. *Если поля*

$$(36)\quad {}^1z_{k_j}(u,v)={}^1\alpha_{k_j}(u,v)\,.\,e+{}^1\beta_{k_j}(u,v)\,.\,a+{}^1\gamma_{k_j}(u,v)\,.\,a',\ k_j\geqq 2,\ j=1,\ldots,p,$$

$$(37)\quad {}^1\alpha_{k_j}={}^1\varphi_{k_j}(u)\,e^{ik_jv}+{}^1\varphi_{-k_j}e^{-ik_jv},\ {}^1\beta_{k_j}={}^1\chi_{k_j}e^{ik_jv}+{}^1\chi_{-k_j}e^{-ik_jv},$$
$${}^1\gamma_{k_j}={}^1\psi_{k_j}e^{ik_jv}+{}^1\psi_{-k_j}e^{-ik_jv},$$

б. м. изгибания первого порядка поверхности S_1 регулярные (определение дано в пункте 6), то любое нетривиальное б. м. изгибание первого порядка

$$(38)\quad {}^1z=\Sigma_{(k_j)}a_{k_j}\,{}^1z_{k_j},\ a_{k_j}=\text{const}$$

может быть продолжено в регулярное б. м. изгибание второго порядка поверхности S_1.

Пусть поверхность S_1 имеет только конечное число регулярных нетривиальных б. м. изгибаний ${}^1z_{k_j}$, $j=1,\ldots,p$, первого порядка, для которых

$$(39)\quad {}^1\chi_{k_j}|_L=0,\ j=1,\ldots,p.$$

Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Поверхность S_1 обладает жесткостью второго порядка относительно б. м. изгибаний, сохраняющих нормальную кривизну ν (кривизну $\varkappa$) граничной параллели L.*

Теорема 2. *Если параллель L не является геодезической линией поверхности S_1, то поверхность S_1 жестка по отношению к б. м. изгибаниям второго порядка, сохраняющим угол θ вдоль L.*

Теорема 3. *Поверхность S_1 обладает жесткостью второго порядка относительно б. м. изгибаний, сохраняющих среднюю кривизну $\mathcal{H}$ поверхности вдоль граничной параллели L.*

6. Доказательство леммы. Б. м. изгибание ${}^1z$ первого порядка поверхности S_1 называется регулярным, если в полюсе $u=0$ оно равно нулю. В силу нашего предположения поле (36) регулярно. Тогда функции

$$(40)\quad {}^1\varphi_{k_j}(u)\,({}^1\varphi_{-k_j}(u)),\ {}^1\chi_{k_j}(u)\,({}^1\chi_{-k_j}(u)),\ {}^1\psi_{k_j}(u)\,({}^1\psi_{-k_j}(u))$$

— решения системы (22), имеют в полюсе $u=0$ поверхности S_1 нули, порядка соответственно $k_j/2$, $(k_j+1)/2$, $(k_j+1)/2$ [1]. Решения (40) в этом случае называются регулярными.

Чтобы показать, что регулярное поле (38) (очевидно можно считать, что константы a_{k_j} принимают только значения нуль и единица) б. м. изгибания первого порядка, можно продолжить в б. м. изгибание второго порядка поверхности S_1, надо доказать, что система (20), где правые части содержат координаты ${}^1\alpha(u, v)$, ${}^1\beta(u, v)$, ${}^1\gamma(u, v)$ поля (38), имеет регулярное решение (см. определение ниже). Так как правые части системы (20) являются многочленами Фурье, то будем искать функции ${}^2\alpha(u, v)$, ${}^2\beta(u, v)$, ${}^2\gamma(u, v)$ в виде таких многочленов. В силу сделанных предположений в пункте 5 о C^2 гладкости поверхности S_1 и полей ${}^1z$, ${}^2z$, все равенства (23), (25)—(27) имеют место, притом в их правых частях все суммы конечны (m и k-m принимают независимо значения $\pm k_j$, $j=1, \ldots, p$), а индекс k принимает только подходящие значения. Функции $\mathcal{R}_{1k}(u)$, $\mathcal{R}_{2k}(u)$ и $\mathcal{R}_{3k}(u)$ теперь имеют вид

$$\mathcal{R}_{1k}(u) = -2^{-1}\Sigma_{(m)}\, a_m a_{k-m}({}^1\varphi'_m\, {}^1\varphi'_{k-m} + {}^1\chi'_m\, {}^1\chi'_{k-m} + {}^1\psi'_m\, {}^1\psi'_{k-m}),$$

$$\text{(41)}\qquad \mathcal{R}_{2k}(u) = -(2r)^{-1}\Sigma_{(m)}\, a_m a_{k-m}\{-m(k-m)\, {}^1\varphi_m\, {}^1\varphi_{k-m} + (im\, {}^1\chi_m - {}^1\psi_m)\,[i\,(k-m)\, {}^1\chi_{k-m} - {}^1\psi_{k-m}]\},$$

$$\mathcal{R}_{3k}(u) = -\Sigma_{(m)}\, a_m\, a_{k-m}\{i\,(k-m)\, {}^1\varphi'_m\, {}^1\varphi_{k-m} + {}^1\chi'_m\,[i\,(k-m)\, {}^1\chi_{k-m} - {}^1\psi_{k-m}]\}.$$

Таким образом число уравнений (25) конечное. Следуя [6] под регулярным решением ${}^2\varphi_k(u)$, ${}^2\chi_k(u)$, ${}^2\psi_k(u)$ системы (23), а, следовательно, и системы (20), в $[0, u_2]$ будем понимать: при $k \neq 0$ — решение, обращающееся в нуль в полюсе $u=0$ и при $k=0$ — решение для которого ${}^2\chi_0(u)$ и ${}^2\psi_0(u)$ обращаются в нуль в $u=0$.

Покажем, что система (23) в нашем случае имеет регулярное решение. Заметим, что если система (23) имеет уравнения с индексом $k>0$, то она имеет и уравнения с индексом $-k$. Так как исследования в этих двух случаях существенно не отличаются друг от друга, то проведем наши исследования только для $k=0$ и $k>0$.

При $k=0$ непосредственно получаем решения

$$\text{(42)}\qquad {}^2\chi_0 = \mathcal{R}_{20}(u),\ {}^2\psi_0 = r\,(c_1 + \textstyle\int \mathcal{R}_{30}\, r^{-2} du),$$

которые регулярны в $[0, u_2]$, так как функции $r(u)$, $\mathcal{R}_{20}(u)$ и $\mathcal{R}_{30}(u)$ имеют в полюсе $u=0$ нули порядка соответственно $1/2$, $(2m-1)/2$ и $m-1$, где $m \geqq 2$.

Система (23) может иметь уравнения с индексом $k=1$ только в следующих двух случаях: а) $m \geqq 2$, $1-m \leqq -2$ и б) $m \leqq -2$, $1-m \geqq 2$. Эти уравнения будут

$$\text{(43)}\qquad {}^2\varphi'_1 + r'\, {}^2\chi'_1 = \mathcal{R}_{11},\ i\, {}^2\psi_1 + {}^2\chi_1 = \mathcal{R}_{21},\ i\, {}^2\varphi_1 + r'\,(i\, {}^2\chi_1 - {}^2\psi_1) + r\, {}^2\psi'_1 = \mathcal{R}_{31}.$$

Из (43) получаем

$$\text{(44)}\qquad {}^2\psi''_1 = (-i\mathcal{R}_{11} + \mathcal{R}'_{31} - ir''\mathcal{R}_{21})/r.$$

В случае а) $m \geqq 3$, а $\mathcal{R}_{11}$, $\mathcal{R}_{21}$, $\mathcal{R}_{31}$ имеют в точке $u=0$ нули порядка соответственно $(2m-5)/2$, $m-1$, $(2m-3)/2$, откуда следует, что правая часть уравнения (44) имеет в $u=0$ нуль порядка $m-3 \geqq 0$. Тогда из (44) получаем регулярное решение ${}^2\psi_1$, а из $(43_{1,2})$ — регулярные решения ${}^2\chi_1$ и ${}^2\varphi_1$.

В случае б) легко подсчитать, что $\mathcal{R}_{11}$, $\mathcal{R}_{21}$, $\mathcal{R}_{31}$ и правая часть уравнения (44) имеют в $u=0$ нуль порядка соответственно $(2\,|m|-3)/2$, $|m|$,

$(2|m|-1)/2$ и $|m|-2$, где $|m|\geqq 2$. Отсюда следует существование регулярных решений ${}^2\psi_1$, ${}^2\chi_1$, ${}^2\varphi_1$ и в этом случае.

Рассмотрим уравнения с индексом $k\geqq 2$. Это имеет место только в следующих трех случаях: а) $m\geqq 2$, $k-m\leqq -2$; б) $m\geqq 2$, $k-m\geqq 2$ и в) $m\leqq -2$, $k-m\geqq 2$. Покажем тем же способом, как в [6], что уравнение (25), которое имеет в полюсе $u=0$ особенность, при $k\geqq 2$ имеет регулярное решение. Из аналитической теории дифференциальных уравнений [7] известно, что однородное уравнение (оно является уравнением класса Фукса), соответствующее неоднородному уравнению (25), имеет в окрестности полюса $u=0$ две фундаментальные решения. Для одного из них точка $u=0$ является нулем $(k+1)/2$-го порядка, а для другого — полюсом порядка $(k-1)/2$. Продолжим эти решения в $[0, u_2]$ и обозначим их соответственно

$$ {}_{+}^{2}\chi_k(u),\quad {}_{-}^{2}\chi_k(u). \tag{45} $$

Для простоты нормируем их так, что

$$ {}_{+}^{2}\chi_k'\,{}_{-}^{2}\chi_k-{}_{+}^{2}\chi_k\,{}_{-}^{2}\chi_k'=1. \tag{46} $$

При помощи решений (45) и метода вариации постоянных строим частное решение

$$ {}^2\chi_k(u)={}_{+}^{2}\chi_k(u)\int\limits_{u_0}^{u}\frac{\mathcal{R}_k(\tau)}{r(\tau)}\,{}_{-}^{2}\chi_k(\tau)\,d\tau-{}_{-}^{2}\chi_k(u)\int\limits_{0}^{u}\frac{\mathcal{R}_k(\tau)}{r(\tau)}\,{}_{+}^{2}\chi_k(\tau)\,d\tau \tag{47} $$

уравнения (25) в $(0, u_2]$. Покажем, что оно является регулярным решением неоднородного уравнения (25) в $[0, u_2]$. Для этого надо показать, что при $u=0$ функция ${}^2\chi_k(u)$ равна нулю.

Рассмотрим случай а). Теперь $m\geqq k+2$. Легко подсчитать, что функция $\mathcal{R}_k(u)$ и подинтегральные функции $\mathcal{R}_k\,{}_{-}^{2}\chi_k/r$ и $\mathcal{R}_k\,{}_{+}^{2}\chi_k/r$ имеют в $u=0$ нули порядка соответственно $(2m-k-4)/2$, $m-k-2$ и $m-2$, откуда следует, что первый интеграл в (47) не имеет особенность в $u=0$, а второй имеет в $u=0$ нуль порядка $m-1$. Поскольку ${}_{+}^{2}\chi_k$ имеет в $u=0$ нуль порядка $(k+1)/2$, а ${}_{-}^{2}\chi_k$ — полюс порядка $(k-1)/2$, то решение (47) регулярно в $u=0$.

В случае б) имеем $k\geqq 2+m$, $m\geqq 2$. Теперь $\mathcal{R}_k$ имеет в $u=0$ нуль порядка $(k-4)/2$, а функции $\mathcal{R}_k\,{}_{-}^{2}\chi_k/r$ и $\mathcal{R}_k\,{}_{+}^{2}\chi_k/r$ — соответственно полюс порядка 2 и нуль порядка $k-2$. Но так как ${}_{+}^{2}\chi_k$ имеет в $u=0$ нуль порядка $(k+1)/2$, а ${}_{-}^{2}\chi_k$ — полюс порядка $(k-1)/2$, то применяя правило Лопиталя получаем, что решение ${}^2\chi_k$ в $u=0$ регулярное. Аналогично показывается, что и в случае в) решение (47) регулярное в $u=0$.

Подставляя функцию (47) в соответствующих уравнениях системы (23), найдем регулярные в $[0, u_2]$ решения ${}^2\psi_k$ и ${}^2\varphi_k$. Этим лемма доказана.

Замечание 2. Так как поля ${}^1z_0$ и ${}^1z_1$ определяют тривиальное б. м. изгибание [1] поверхности S_1 и поле ${}^1z$ допускает регулярное продолжение второго порядка, то тогда и поле ${}^1z+a_0\,{}^1z_0+a_1\,{}^1z_1$, a_0, a_1 - константы допускает регулярное продолжение второго порядка [8].

7. Доказательство теоремы 1. Нетривиальное регулярное поле ${}^1z_k(u, v)$ б. м. изгибания поверхности S_1 сохраняет нормальную кривизну ν (кривизну $\varkappa$) граничной параллели L тогда и только тогда, когда нетривиальное регулярное решение ${}^1\chi_k(u)$ соответствующего уравнения (24) удовлетворяет краевому условию (39) [9]. (Множество нулей нетривиальных решений ${}^1\chi_k(u)$, $k\geqq 2$, уравнений (24) в $(u_1, u_2]$ счетное и всюду плотное [10].) В силу нашего предположения существуют только конечное число регулярных линейно независимых б. м. изгибаний ${}^1z_{k_j}$, $j=1,\dots,p$, первого порядка поверхности S_1, которые сохраняют нормальную кривизну ν (кривизну $\varkappa$) граничной параллели L. Тогда произвольное б. м. изгибание первого порядка ${}^1z(u,v)$ поверхности S_1, сохраняющее нормальную кривизну ν (кривизну $\varkappa$) имеет вид (38). Ищем поле ${}^2z(u,v)$, которое сохраняет нормальную кривизну ν (кривизну $\varkappa$) граничной параллели L. Тогда его координаты

$$(48)\qquad {}^2\alpha(u,v),\ {}^2\beta(u,v),\ {}^2\gamma(u,v)$$

должны удовлетворять системе (20) и краевому условию

$$(49)\qquad \delta^2\nu\,|_L=0,$$

где правые части системы (20) содержат координаты ${}^1\alpha(u,v)$, ${}^1\beta(u,v)$, ${}^1\gamma(u,v)$ поля (38). Так как искомое поле ${}^2z(u,v)$ однозначно на поверхности S_1, то наша задача сводится к следующей: найти регулярное решение конечной системы (23) (k и m принимают указанные в пункте 6 значения), удовлетворяющее условию (49).

Пусть система функций (48) регулярное решение системы (20), которое является продолжением регулярного б. м. изгибания (38) первого порядка. В силу нашей леммы такое решение существует. Поле (48) удовлетворяет условию (49) вдоль L тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию

$$(49')\qquad \delta^2N|_L=0,$$

где δ^2N имеет вид (35). Функции (48) имеют вид

$$(48')\qquad \begin{aligned} {}^2\alpha &= \Sigma_{(k)}\,{}^2\alpha_k=\Sigma_{(k)}\,[{}^2\varphi_k(u)\,e^{ikv}+{}^2\varphi_{-k}(u)\,e^{-ikv}],\\ {}^2\beta &= \Sigma_{(k)}\,{}^2\beta_k=\Sigma_{(k)}\,[{}^2\chi_k(u)\,e^{ikv}+{}^2\chi_{-k}(u)\,e^{-ikv}],\\ {}^2\gamma &= \Sigma_{(k)}\,{}^2\gamma_k=\Sigma_{(k)}\,[{}^2\psi_k(u)\,e^{ikv}+{}^2\psi_{-k}(u)\,e^{-ikv}],\end{aligned}$$

где индекс k принимает указанные в пункте 6 значения. Подставим поле (38) и (48′) в (35). После обычных выкладок получим для δ^2N многочлен Фурье. В силу равенства (49′) он должен равняться нулю вдоль параллели L, откуда следует, что его коэффициенты равны нулю вдоль L. Рассмотрим как в [3] подробнее свободный член этого многочлена. Обозначим его через $(\delta^2N)_0$. Легко получаем, что

$$(50)\qquad \begin{aligned}(\delta^2N)_0 &=(2r)^{-1}\sqrt{1+r'^2}\,[-2r\,{}^2\chi_0-4rr'\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\psi'_m\,(-im\,{}^1\chi_{-m}-{}^1\psi_{-m})\\ &-2r^2\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\psi'_m\,{}^1\psi'_{-m}-(2r'^2+1)\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,(im\,{}^1\chi_m-{}^1\psi_m)\,(-im\,{}^1\chi_{-m}-{}^1\psi_{-m})\\ &+r^2\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{-m}-2rr'\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,im\,(im\,{}^1\chi_m-{}^1\psi_m)\,{}^1\psi'_{-m}],\end{aligned}$$

где m принимает указанные в пункте 6 значения. Принимая во внимание то, что поле (38) удовлетворяет условиям (39), то

$$(51)\qquad (\delta^2N)_0|_L=(2r)^{-1}\sqrt{1+r'^2}\,(-2r\,{}^2\chi_0-2r^2\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\psi'_m\,{}^1\psi'_{-m}+r^2\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{-m})\,|_L.$$

Из (23) имеем

$${}^2\chi_0=-[\Sigma_{(m)}\,m^2\,a_m^2\,{}^1\varphi_m\,{}^1\varphi_{-m}+\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,(im\,{}^1\chi_m-{}^1\psi_m)\,(-im\,{}^1\chi_{-m}-{}^1\psi_{-m})]/2r,$$

откуда пользуясь равенствами (22), получаем

$$(52)\quad {}^2\chi_0 = -\frac{1+r'^2}{2r}\,\Sigma_{(m)}\frac{(m^2-1)^2}{m^2}\,a_m^2\,{}^1\chi_m\,{}^1\chi_{-m} - \frac{r^1}{2}\,\Sigma_{(m)}\frac{m^2-1}{m^2}\,a_m^2\,({}^1\chi_m\,{}^1\chi'_{-m} + {}^1\chi_{-m}\,{}^1\chi'_m)$$

$$-\frac{r}{2}\,\Sigma_{(m)}\frac{a_m^2}{m^2}\,{}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{-m}.$$

Тогда

$$(53)\quad {}^2\chi_0\,|_L = -\frac{r}{2}\,\Sigma_{(m)}\frac{a_m^2}{m^2}\,{}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{-m}\,|_L.$$

Из равенства (51) при помощи выражения(53), равенства (22_2) и пользуясь тем, что ${}^1\chi_{-m} = \overline{{}^1\chi_m}$ [1], получаем

$$(54)\quad (\delta^2 N)_0\,|_L = \frac{r\sqrt{1+r'^2}}{2}\,\Sigma_{(m)}\frac{m^2-1}{m^2}\,a_m^2\,|\,{}^1\chi'_m\,|^2\,|_L.$$

Так как $(\delta^2 N)_0\,|_L = 0$ и $|\,m\,| \geqq 2$, то из (54) следует, что

$$(55)\quad {}^1\chi'_m\,|_L = 0,\ \ m = k_1, \ldots, k_p.$$

Таким образом поле (38) должно удовлетворять краевым условиям (39) и (55). Но это возможно только тогда, когда поле (38) тривиально. Этим теорема 1 доказана.

Теорема 2 следует из теоремы 1 и следствия 4.

Доказательство теоремы 3. Нетривиальное регулярное поле ${}^1z_k(u, v)$ б. м. изгибания первого порядка поверхности S_1 сохраняет среднюю кривизну поверхности вдоль параллели L тогда и только тогда, когда нетривиальное регулярное решение ${}^1\chi_k(u)$ соответствующего уравнения (24) удовлетворяет краевому условию (39) [9]. В силу нашего предположения из пункта 6 произвольное б. м. изгибание первого порядка ${}^1z(u, v)$ поверхности S_1, сохраняющее среднюю кривизну $\mathcal{H}$ поверхности вдоль L, опять имеет вид (38). Теперь надо искать функции (48), являющиеся регулярными решениями системы (20) и удовлетворяющие краевому условию

$$(56)\quad \delta^2\mathcal{H}\,|_L = 0,$$

где правые части систем (20) опять содержат координаты поля (38). Из равенства (15) видно, что условие (56) выполняется тогда и только тогда, когда

$$(57)\quad (1+r'^2)\,\delta^2 N + r^2\,\delta^2 L\,|_L = 0.$$

Подставляя поля (38) и (48′) в равенств (57), где вторые вариации $\delta^2 L$ и $\delta^2 N$ имеют вид (33) и (35), получим опять многочлен Фурье, который должен равняться нулю вдоль параллели L. Рассмотрим опять его свободный член. Обозначим его через $(1+r'^2)(\delta^2 N)_0 + r^2(\delta^2 L)_0$, где $(\delta^2 N)_0$ имеет вид (50) а

$$(58)\quad (\delta^2 L)_0 = \sqrt{1+r'^2}\,[-2\,{}^2\chi''_0 - r''\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\chi'_m\,{}^1\chi'_{-m} - 2r'\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,{}^1\chi'_m\,{}^1\chi''_{-m}$$

$$+ r^{-2}r''\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,(im\,{}^1\chi_m - {}^1\psi_m)(-im\,{}^1\chi_{-m} - {}^1\psi_{-m}) + 2r^{-1}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,(im\,{}^1\chi_m$$

$$-{}^1\psi_m)^1\,\psi''_{-m}]/2.$$

Из равенства (52) получаем

$$
\begin{aligned}
{}^2\chi_0' &= -\frac{1+r'^2}{2r}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{(m^2-1)^2}{m^2}\,({}^1\chi_m'\,{}^1\chi_{-m}+{}^1\chi_m\,{}^1\chi_{-m}') \\
&+\frac{r'+r'^3}{2r^2}\,\Sigma_{(m)}\,\frac{(m^2-1)^2}{m^2}\,a_m^2\,{}^1\chi_m\,{}^1\chi_{-m}-\frac{r'}{2}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{2m^2-1}{m^2}\,{}^1\chi_m'\,{}^1\chi_{-m}';
\end{aligned}
\tag{59}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^2\chi_0'' &= \frac{r'}{2r^2}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,({}^1\chi_m\,{}^1\chi_{-m}'+{}^1\chi_m'\,{}^1\chi_{-m})\,[rr''+2\,(1+r'^2)\,(m^2-1)] \\
&-\frac{1}{2r}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{1}{m^2}\,{}^1\chi_m'\,{}^1\chi_{-m}'\,[rr''\,(2m^2-1)+2\,(1+r'^2)\,(m^2-1)^2] \\
&+\frac{1}{2r^3}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{(m^2-1)^2}{m^2}\,{}^1\chi_m\,{}^1\chi_{-m}\,[rr''\,(2m^2-1)+rr'^2\,r''\,(2m^2+1)-2r'^2\,(1+r'^2)].
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Из равенства (60), принимая во внимание, что поле (38) удовлетворяет условиям (39), получаем

$$
{}^2\chi_0''\,|_L = -\frac{1}{2r}\,\Sigma_{(m)}\,\frac{a_m^2}{m^2}\,{}^1\chi_m'\,{}^1\chi_{-m}'\,[rr''\,(2m^2-1)+2\,(1+r'^2)\,(m^2-1)^2]\,|_L,
\tag{61}
$$

откуда имеем

$$
(\delta^2 L)_0\,|_L = \frac{\sqrt{1+r'^2}}{2r}\,\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,|\,{}^1\chi_m'\,|^2\,[rr''+2\,(m^2-1)\,(1+r'^2)].
\tag{62}
$$

Подставляя выражения (62) и (54) в краевом условии (57), получаем, что вдоль параллели L выполнено равенство

$$
\Sigma_{(m)}\,a_m^2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,|\,{}^1\chi_m'\,|^2\,[rr''+(2m^2-1)\,(1+r'^2)]=0,
\tag{63}
$$

откуда следует, что

$$
{}^1\chi_m'\,|_L=0,\quad m=k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_p.
\tag{64}
$$

Но из краевых условий (39) и (64) следует, что поле (38) тривиально. Этим теорема 3 доказана.

Замечание 3. Пусть меридиан c имеет несколько точек перегиба — $u_1=u_{j_1}<u_{j_2}<\cdots<u_{j_k}$. Очевидно, что в этом случае теоремы 1 и 2 тоже имеют место, а теорема 3 имеет место, если $r''(u_2)\geqq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Кон-Фоссен. Нежесткие замкнутые поверхности. *Успехи мат. наук*, **9**, 1954, № 1, 63—81.
2. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. *Успехи мат. наук*, **3**, 1948, № 2, 47—158.
3. Н. Г. Перлова. Об одном условии жесткости 2-го порядка двухсвязной поверхности вращения. *Comment. math. Univ. Carol.*, **13**, 1972, № 1, 23—29.
4. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959.
5. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
6. Э. Г. Позняк. Соотношение между нежесткостью первого и второго порядка для поверхностей вращения. *Успехи мат. наук*, **14**, 1959, № 6, 179—184.

7. Л. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1953.
8. Н. Г. Перлова, И. Х. Сабитов. Жесткость второго порядка желобов вращения класса C^2. *Вестник Моск. ун-та. Мат. мех.*, 1975, № 5, 47—52.
9. И. Иванова-Каратопраклиева. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения при некоторых краевых условиях. *Годишник на Соф. унив., Мат. фак.*, **67**, 1972/73, 235—246.
10. В. И. Михайловский. Нескінченно малі згинання заклеенних поверхень обертання від'ємної кривизни. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. мат. та мех.*, № 4, вип. 2., 1961, 69—80.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 8. 1. 1976