Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ КЛАССАМ S_q ПРИ $0<q<2$

ГЕОРГИ Е. КАРАДЖОВ

Получены новые оценки S_q-нормы интегральных операторов, действующих в пространствах функций, суммируемых с квадратом на некотором множестве с σ-конечной мерой. Доказательства проводятся с помощью преобразования Фурье, теории интерполяционных пространств и продолжения функций. Связь задачи об оценке S_q-нормы с теорией двойных операторных интегралов (д. о. и.) Стильтьеса, установленная М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком, позволяет применить полученные результаты к теории д. о. и., в частности, к задаче об ограниченности псевдодифференциальных операторов в L^2R^n.

Введение. Будем рассматривать интегральные операторы вида

$$(Tu)(y)=\int_X f(x, y)u(x)\varrho(dx) \tag{1}$$

как операторы, действующие из пространства $L^2(\boldsymbol{X}, \varrho)$ в пространство $L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$. Меры ϱ и τ предполагаются σ-конечными.

М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк [2, 3, 4, 5] выяснили связь теории двойных операторных интегралов (д. о. и.) Стильтьеса и задачи об оценке S_q-нормы операторов (1), которая должна быть равномерной относительно всех конечных мер ϱ и τ, $\varrho(\boldsymbol{X})\leq 1$, $\tau(\boldsymbol{Y})\leq 1$. Теория д. о. и. включает некоторые проблемы анализа. Например, задача об ограниченности псевдодифференциальных операторов (п. д. о.) в L^2R^n, проблема множителей в l^q [2, 3].

В [6, 7, 8] были получены равномерные оценки S_q-нормы операторов (1) с помощью кусочно-полиномиальной аппроксимации ядра $f(x, y)$. Теория интерполяционных пространств позволила уточнить некоторые из них [9, 10]. При этом возникла гипотеза, что для ядерности операторов (1), равномерной относительно всех конечных мер ϱ, $\varrho(\boldsymbol{X})\leq 1$, достаточно требовать от ядра $f(x, y)$ „предельную гладкость" по переменной x (см. пункт 2, замечание 3).

Здесь приводится доказательство этой теоремы. Идейно оно связано с работой [4] и состоит в расщеплении оператора T в виде композиции двух операторов Гильберта-Шмидта. В [4] это сделано с помощью одной леммы Бьерлинга. Мы применяем и интерполяцию, что позволяет рассмотреть все случаи S_q, $0<q<2$.

Работа состоит из трех пунктов. В первом из них формулируются основные результаты, доказательство которых приводится во втором. В третьем пункте даны некоторые приложения.

1. Определим рассматриваемые пространства функций и операторов. Пусть $\boldsymbol{X}$ — открытая область в R^n и $G=L^2_\tau \boldsymbol{Y} L^2 \boldsymbol{X}$ — пространство функций f с нормой $N(f\mid G)=\{\int_Y\int_X|f(x, y)|^2 dx\tau(dy)\}^{1/2}$. Положим

$$\Delta_i^m(X, h)f = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+kh, x_{i+1}, \ldots, x_n, y),$$

если $(x_1, \ldots, x_i+kh, \ldots, x_n) \in X(0 \leq k \leq m)$ и $\Delta_i^m(X, h)f = 0$ — в противном случае $(1 \leq i \leq n,\ 0 < h < \infty)$. Если $X = R^n$, то будем писать $\Delta_i^m(h)$ вместо $\Delta_i^m(R^n, h)$.

Пространство $B_{qx}^{\alpha}G(\alpha>0, q>0)$ состоит из всех $f \in G$, для которых конечна квазинорма [11]: $N(f \mid B_{qx}^{\alpha}G) = N(f \mid G) + N_{qx}^{\alpha}(f \mid G)$, где

$$N_{qx}^{\alpha}(f \mid G) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\infty}[t^{-\alpha}\sup_{0<h\leq t} N(\Delta_i^m(X, h)f \mid G)]^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q},\ 0<\alpha<m. \tag{2}$$

Пусть $L^2 = L^2R^n$ — пространство функций $f(x)$ с нормой $N(f \mid L^2) = \{\int |f(x)|^2 dx\}^{1/2}$ Пространство $B_q^{\alpha}L^2(\alpha>0, q>0)$ состоит из всех $f \in L^2$, для которых конечна квазинорма $N(f \mid B_q^{\alpha}L^2) = N(f \mid L^2) + N_q^{\alpha}(f \mid L^2)$,

$$N_q^{\alpha}(f \mid L^2) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\infty}[t^{-\alpha}\sup_{0<h\leq t} N(\Delta_i^m(h)f \mid L^2)]^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q},\ 0<\alpha<m.$$

Через $\dot{B}_{qx}^{\alpha}G$ обозначается множество всех $f \in L_{\tau}^2 Y L_{\mathrm{loc}}^2 X$, для которых $N_{qx}^{\alpha}(f \mid G) < \infty$. В этом пространстве вводится полуквазинорма: $N(f \mid \dot{B}_{qx}^{\alpha}G) = N_{qx}^{\alpha}(f \mid G)$.

Далее, пространство $\dot{B}_q^{\alpha}L^2$ состоит из всех $f \in L_{\mathrm{loc}}^2$, для которых конечна полуквазинорма $N(f \mid \dot{B}_q^{\alpha}L^2) = N_q^{\alpha}(f \mid L^2)$. Пространство $b_1^{n/2}L^2$ есть подмножество в $\dot{B}_1^{n/2}L^2$, состоящее из функций, которые стремятся к нулю на бесконечности. В этом пространстве вводится индуцированная норма.

Пространство $b_{1x}^{n/2}F$, $F = L_{\tau}^2 Y L^2 R^n$ есть множество всех $f \in \dot{B}_{1x}^{n/2}F$, $f(x, y) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для почти всех (п. в.) $y \in Y$ с индуцированной нормой. Если в определени пространства $B_{qx}^{\alpha}G$ поставим F вместо G, получим пространство $B_{qx}^{\alpha}F$.

Пространство $b_{qx}^{\alpha}F$ при $\alpha < n/2$, $1<q<2$ есть совокупность всех $f \in \dot{B}_{qx}^{\alpha}F$, для которых $\int_Y [\int_{R^n} |f(x, y)|^{q'} dx]^{2/q'} \tau(dy) < \infty$, $1/q' = 1 - 1/q$ с индуцированной из $\dot{B}_{qx}^{\alpha}F$ нормой.

Наконец, пространство $b_q^{\alpha}L^2(\alpha < n/2,\ 1<q<2)$ состоит из всех $f \in \dot{B}_q^{\alpha}L^2$, для которых $\int |f(x)|^{q'} dx < \infty$, $1/q' = 1 - 1/q$ и снабжается индуцированной из $\dot{B}_q^{\alpha}L^2$ нормой.

Отметим, что все определенные выше пространства не зависят от выбора целого числа $m > \alpha$ (с точностью до эквивалентных квазинорм [12, 13]). Множество областей $X \subseteq R^{\tau}$, для которых справедлива теорема о продолжении для пространств $B_{qx}^{\alpha}G$ [14, 11] будем обозначать через $\Lambda(R^n)$. Подмножество всех ограниченных областей из $\Lambda(R^n)$ обозначим через $\Lambda_0(R^n)$.

Если H_1, H_2 — два гильбертовых пространства и S_{∞} — множество всех вполне непрерывных операторов, действующих из H_1 в H_2, то через S_q, $q>0$ обозначается пространство всех $K \in S_{\infty}$ с конечной квазинормой $N(K \mid S_q) = \{\Sigma_{n=1}^{\infty} s_n^q\}^{1/q}$, где $s_n = s_n(K)$ — сингулярные числа оператора K [15].

Теорема 1 (о ядерности). *Пусть* $X \in \Lambda(R^n)$. *Тогда*

$$N(T \mid S_1) \leq C \,.\, C(X)\,[\varrho(X)]^{1/2} N(f \mid B^{n/2}_{1x} G), \tag{3}$$

где через C *здесь и ниже будут обозначаться различные положительные константы, не зависящие от ядра* f *и от мер* ϱ *и* τ, *а через* $C(X)$ — *положительная константа, зависящая от области* X.

Если $X = R^n$, *то в правой части* (3) *можно поставить* $N(f \mid b^{n/2}_{1x} F)$.

Идея доказательства основана на хорошо известном факте, что ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда $f(x)$ может быть представлена в виде свертки двух функций g и h, суммируемых с квадратом. Если $f = g * h$, то оператор T с ядром $f(x-y)$ будет композицией двух операторов класса S_2, и, следовательно [15], $T \in S_1$. Как уже отмечалось, в [4] эта идея была использована для расщепления оператора T с ядром $f(x, y)$ из класса $L^2_\tau Y B_\omega X$ в виде композиции двух операторов из S_2. Здесь расщепление оператора основано на следующей лемме, которая, возможно, имеет и самостоятельный интерес. Она позволяет обобщить соответствующий результат [4] о ядерности операторов (1). Именно, пространство ядер $L^2_\tau Y B_\omega X$ уже, чем пространство $B_1{}^{n/2}_x G$.

Лемма 1 (о факторизации). $b^{n/2}_{1x} F \subset F * L^2$. *Точнее, если* $f \in b^{n/2}_{1x} F$, *то п. в.* $f(x, y) = \int g(s, y)\psi(x-s)ds$ *и*

$$N(g \mid F) \sim [N(f \mid b^{n/2}_{1x} F)]^{1/2} \sim N(\psi \mid L^2).$$

Через $\sim$ обозначается наличие двусторонних оценок с положительными константами.

Теорема 1' (случай разностного ядра). *Пусть* $X = R^n$, $Y \subseteq R^n$ *и оператор* T *вида* (1) *имеет ядро* $f(x-y)$. *Тогда*

$$N(T \mid S_1) \leq C[\varrho(R^n)]^{1/2}[\tau(Y)]^{1/2} N(f \mid b^{n/2}_1 L^2).$$

Отметим, что теорема 1' содержится в [4], так как в этом случае пространство $L^2_\tau \overset{\circ}{B}_\omega$ можно заменить пространством $b^{n/2}_1 L^2$.

Примеры показывают, что теорема 1 не имеет аналога при $0 < q < 1$, если область X не является ограниченной. Через $\bar{X}$ обозначим замыкание области X.

Теорема 2 (случай $0 < q < 1$). *Пусть* $X \in \Lambda_0(R^n)$, $\bar{X} \subset X_\sigma$, $X_\sigma = \{x \in R^n \mid |x_j| \leq \sigma_j (1 \leq j \leq n)\}$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. *Тогда*

$$N(T \mid S_q) \leq C_\sigma \,.\, C_\sigma(X)\,[\mathrm{mes}\, X_\sigma]^{1/q-1}[\varrho(X)]^{1/2} N(f \mid B^\alpha_{qx} G),\ \alpha/n = 1/q - 1/2.$$

Доказательство этой теоремы, опирающееся на [6], дано автором [10]. Здесь приводится другое доказательство, основанное на теореме 1 и на следующей лемме.

Лемма 2 (о факторизации). *Пусть* $B^\alpha_{0qx} F$ — *пространство всех финитных относительно* x *функций* $f(x, y) \in B^\alpha_{qx} F$ *с индуцированной квазинормой. Тогда* $B^\alpha_{0qx} F \subset B^{\alpha'}_{0q'x} F * L^2$, *где* $0 < q \leq 2/3$, $\alpha/n = 1/q - 1/2$, $\alpha' = \alpha - n/2$, $1/q' = 1/q - 1/2$. *Точнее, если* $f \in B^\alpha_{0qx} F$ *и* $\mathrm{supp} f \subset X_{\sigma'} \times Y$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся функции* $\psi_\varepsilon \in L^2$ *и* $g_\varepsilon \in B^{\alpha'}_{0q'x} F$ *с* $\mathrm{supp}\, g_\varepsilon \subset X_{\sigma'+\varepsilon} \times Y$ *так, чтобы* $f(x, y) = \int g_\varepsilon(s, y)\psi_\varepsilon(x-s)ds$ *и* $N(\psi_\varepsilon \mid L^2) \sim [N(f \mid B^\alpha_{0qx} F)]^{q/2}$, $N(g_\varepsilon \mid B^{\alpha'}_{0q'x} F) \sim [N(f \mid B^\alpha_{0qx} F)]^{1-q/2}$ *с константами, зависящими от* ε.

В теореме 1 мы установили, что „предельная гладкость" по переменной x обеспечивает ядерность операторов (1) для любой конечной меры ϱ. При этом гладкость нельзя снизить даже для случая меры Лебега [16, стр. 608]. Поэтому следует ожидать, что для абсолютно непрерывных мер ϱ „сниженная гладкость" по переменной x будет обеспечивать принадлежность операторов (1) только классам S_q при $1<q<2$. В этом случае удобнее рассматривать операторы вида

$$(4)\qquad (Ku)(y)=\int_{X} a(x)f(x, y)u(x)dx$$

как операторы из $L^2(\boldsymbol{X}, dx)$ в $L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$, где мера ϱ имеет плотность $|a(x)|^2$. Операторы $K: L^2(\boldsymbol{X}, dx)\to L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$ и $T: L^2(\boldsymbol{X}, \varrho)\to L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$ унитарно эквивалентны, и, следовательно, $N(T\mid S_q)=N(K\mid S_q)$ [15].

Теорема 3 (случай $1<q<2$). *Пусть $\boldsymbol{X}\in \Lambda(R^n)$. Тогда*

$$(5)\qquad N(T\mid S_q)\leqq C.C(\boldsymbol{X})N(a\mid L^{\lambda}\boldsymbol{X})N(f\mid B^{\alpha}_{qx}G),\ \alpha/n=1/q-1/2=1/\lambda.$$

Если $\boldsymbol{X}=R^n$, то в правой части (5) *можно поставить $N(f\mid b^{\alpha}_{qx}F)$.*

Теорема 3′ (случай разностного ядра). *Пусть $\boldsymbol{X}=R^n$, $\boldsymbol{Y}\subseteq R^n$ и K — оператор* (4) *с ядром $a(x)f(x-y)$. Тогда* $(1<q<2)$

$$(6)\qquad N(T\mid S_q)\leqq C[\tau(\boldsymbol{Y})]^{1/2}N(a\mid L^{\lambda})N(f\mid b^{\alpha}_{q}L^2),\ \alpha/n=1/q-1/2=1/\lambda.$$

Теорема 3 обобщает соответствующий результат [6, 10].

Наконец, рассмотрим один случай, когда меры ϱ и τ — абсолютно непрерывны. Пусть K — оператор вида

$$(7)\qquad (Ku)(y)=\int_{R^n} a(x)f(x-y)b(y)u(x)dx,$$

где мера ϱ имеет плотность $|a(x)|^2$, мера τ — $|b(y)|^2$. Операторы $K: L^2(R^n, dx)\to L^2(R^n, dy)$ и $T: L^2(R^n, \varrho)\to L^2(R^n, \tau)$ унитарно эквивалентны и, поэтому, $N(T\mid S_q)=N(K\mid S_q)$.

Теорема 4. $N(T\mid S_q)\leqq C.N(a\mid L^{\lambda_1})N(b\mid L^{\lambda_2})N(f\mid b^{\alpha}_{q}L^2)$, $1<q<2$, $\alpha/n=1/q-1/2=1/\lambda_1+1/\lambda_2-1/2$, $\lambda_k>2 (k=1, 2)$.

Эта теорема доказана в [8] для ядер f из пространства Соболева-Слободецкого W^{α}_{2}, которое уже, чем пространство $b^{\alpha}_{q}L^2$.

2. Приводимые ниже доказательства основаны на интерполяционных соображениях. Пусть (F_0, F_1) — совместная пара квазинормированных либо полуквазинормированных пространств [17, 18] и $K(t, a)=K(t, a; F_0, F_1)$, $a\in F_0+F_1$, $t>0$ — функция Питре [19]:

$$K(t, a)=\inf\{\|a_0\|_{F_0}+t\|a_1\|_{F_1};\ a=a_0+a_1,\ a_0\in F_0,\ a_1\in F_1\}.$$

Пространство „средних" $(F_0, F_1)_{\theta q} (0<\theta<1, q>0)$ есть множество всех $a\in F_0+F_1$, для которых конечна квазинорма

$$N(a\mid (F_0, F_1)_{\theta q})=\left\{\int_0^{\infty} t^{-\theta q}K^q(t, a)\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}.$$

Теорема A (об интерполяции [17, 13]). *Пусть (F_0, F_1) и (G_0, G_1) — совместные пары, и отображение $M: F_i\to G_i$ — линейно и непрерывно с* *квазинормой* $M_i (i=0, 1)$. *Тогда сужение* $M: (F_0, F_1)_{\theta q} \to (G_0, G_1)_{\theta q}$ *линейно и непрерывно, и* $N(Ma \mid (G_0, G_1)_{\theta q}) \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} N(a \mid (F_0, F_1)_{\theta q})$.

Пусть C_0 — множество всех функций $f(x, y) \in L_\tau^2 Y L_{1oc}^2$, которые непрерывны относительно x, и $f(x, y) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для п. в. $y \in \boldsymbol{Y}$. Пространство $\omega_x^n F$, $F = L_\tau^2 Y L^2$ состоит из всех $f \in C_0$, для которых конечна норма $N(f \mid \omega_x^n F) = \Sigma_{i=1}^n N(D_i^n f \mid F)$, где $D_i^n f$ — производная порядка n относительно переменной x_i. Через F_0 обозначим множество $F \cap C_0$ с нормой $N(f \mid F_0) = N(f \mid F)$. Пространство $C_0 \cap b_{1x}^{n/2} F$ снабдим индуцированной нормой из $b_{1x}^{n/2} F$.

Лемма 3. $C_0 \cap b_{1x}^{n/2} F = (F_0, \omega_x^n F)_{1/2, 1}$.

Доказательство. Очевидно достаточно доказать формулу

$$K(t^n, f; F_0, \omega_x^n F) \sim \sum_{i=1}^{n} \sup_{0<h\leq t} N(\Delta_i^n(h) f \mid F), \; f \in C_0. \tag{8}$$

Если $f = f_0 + f_1, f_0 \in F_0, f_1 \in \omega_x^n F$ — произвольное разложение, то

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{0<h\leq t} N(\Delta_i^n(h) f \mid F) \leq n \,.\, 2^n N(f_0 \mid F) + t^n N(f_1 \mid \omega_x^n F),$$

откуда следует (8) в одну сторону. Обратно, исходим из алгебраического тождества

$$\prod_{i=1}^{n} [(x_i - 1)^n + (-1)^{n+1}] = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{(i-1)(n+1)} (x_i - 1)^n \prod_{k=i+1}^{n} [(x_k - 1)^n + (-1)^{n+1}]$$
$$+ (-1)^{(n-1)(n+1)} \,.\, (x_n - 1)^n.$$

Чтобы избежать громоздких обозначений, рассмотрим только случай $n=2$ Введем операторы $T_i(h) f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n, y)$. Тогда

$$I = -\Delta_1^2(h_1)\Delta_2^2(h_2) + \Delta_1^2(h_1) + \Delta_2^2(h_2) + T_1^2(h_1) T_2^2(h_2)$$
$$-2 T_1^2(h_1) T_2(h_2) - 2 T_1(h_1) T_2^2(h_2) + 4 T_1(h_1) T_2(h_2).$$

Положим

$$f_{0t}(x, y) = t^{-4} \int_0^t \cdots \int_0^t [\Delta_1^2(\xi_1 + \xi_2) + \Delta_2^2(\eta_1 + \eta_2) - \Delta_1^2(\xi_1 + \xi_2)\Delta_2^2(\eta_1 + \eta_2)] f d\xi_1 \cdots d\eta_2,$$

$$f_{1t}(x, y) = t^{-4} \int_0^t \cdots \int_0^t [T_1^2(\xi_1 + \xi_2) T_2^2(\eta_1 + \eta_2) - 2 T_1^2(\xi_1 + \xi_2) T_2(\eta_1 + \eta_2)$$
$$-2 T_1(\xi_1 + \xi_2) T_2^2(\eta_1 + \eta_2) + 4 T_1(\xi_1 + \xi_2) T_2(\eta_1 + \eta_2)] f(x, y) d\xi_1 \cdots d\eta_2.$$

Тогда $f(x, y) = f_{0t}(x, y) + f_{1t}(x, y)$ и $f_{0t} \in \boldsymbol{F_0}$. Так как

$$\Delta_i^2(2h) = \Delta_i^2(h) [T_i(h) + I]^2, \text{ то } N(f_{0t} \mid F_0) \leq C \Sigma_{i=1}^2 \sup\nolimits_{0<h\leq t} N(\Delta_i^2(h) f \mid F).$$

Далее, $f_{1t} \in C_0$ и, например,

$$D_1^2 f_{1t}(x, y) = t^{-4} \int_0^t \int_0^t [\Delta_1^2(2t) T_2^2(\eta_1 + \eta_2) - 2\Delta_1^2(2t) T_2(\eta_1 + \eta_2)$$

$$-2\Delta_1^2(t)T_2^2(\eta_1+\eta_2)+4\Delta_1^2(t)T_2(\eta_1+\eta_2)]f(x,y)d\eta_1 d\eta_2,$$

откуда $N(D_1^2 f_{1t}\mid F)\leq Ct^{-2}\sup_{0<h\leq t}N(\Delta_1^2(h)f\mid F)$. Следовательно, $f_{1t}\in\omega_x^2 F$ и $N(f_{1t}\mid\omega_x^2 F)\leq C\Sigma_{i=1}^2\sup N(\Delta_i^2(h)f|F)$. Поэтому $K(t^2,f)\leq C\Sigma_{i=1}^2\sup_{0<h\leq t}N(\Delta_i^2(h)f|F)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{B}_{\theta q}(0<\theta<1,\ 0<q<2)$ есть множество всех положительных неубывающих функций $\varphi(t)$, $0<t<\infty$, для которых

$$(9)\qquad P_{\theta q}(\varphi)=\left\{\int_0^\infty\left[\frac{t^\theta}{\varphi(t)}\right]^{2q/(2-q)}\frac{dt}{t}\right\}^{(2-q)\ 2q}<\infty;$$

$F_{0,\varphi,m}$ — пространство измеримых функций с нормой

$$N(g\mid F_{0,\varphi,m})=\{\int_Y\int_{R^n}|g(\xi,y)|^2\varphi^2(|\xi|^m)d\xi\tau(dy)\}^{1/2}$$

и $b_{m\theta,q}F$ — множество всех g, принадлежащих некоторому $F_{0,\varphi,m}$ при $\varphi\in\mathcal{B}_{\theta q}$. Пространство $b_{m\theta,q}F$ снабжается квазинормой

$$(10)\qquad N(g\mid b_{m\theta,q}F)=\inf\{P_{\theta q}(\varphi)N(g\mid F_{0,\varphi,m});\ \varphi\in\mathcal{B}_{\theta q},\ g\in F_{0,\varphi,m}\}.$$

Положим $F_{0m}=F_{0,\varphi,m}$ при $\varphi(t)\equiv t$. Имеет место

Теорема В ([19, 20]). $(F, F_{0m})_{\theta q}=b_{m\theta,q}F(0<\theta<1,\ 0<q<2)$.

Верна следующая лемма.

Лемма 4. $b_{m\theta,q}F\subset L_\tau^2 YL^qR^n$, *если* $\theta m=n/q-n/2$, $0<q<2$, $0<\theta<1$.

Действительно, с помощью неравенства Гельдера с показателем $2/q$ получаем $N(g\mid L_\tau^2 YL^qR^n)\leq[\varkappa_n/m]^{1/q-1/2}N(g\mid F_{0,\varphi,m})P_{\theta q}(\varphi)$, где $\varkappa_n$ — мера единичной сферы в R^n. Отсюда и из определения пространства $b_{m\theta,q}F$ следует лемма 4.

Пусть F_1 есть множество $F\cap L_\tau^2 YL^1R^n$ с индуцированной нормой из F и F_{0n1} — множество $F_{0n}\cap L_\tau^2 YL^1R^n$ с индуцированной нормой из F_{0n}.

Лемма 5. $(F_1, F_{0n1})_{1/2,1}=(F,F_{0n})_{1/2,1}=b_{n/2,1}F$.

Доказательство. Второе равенство следует из теоремы В. Согласно лемме 4 достаточно доказать формулу (11) для функций $g\in L_\tau^2 YL^1R^n$:

$$(11)\qquad K^2(t,g;F,F_{0n})\sim\int\int|g(\xi,y)|^2\min(1,t^2|\xi|^{2n})d\xi\tau(dy)\sim K^2(t,g;F_1,F_{0n1}).$$

Если $g=g_0+g_1$, то $A^2=\int\int|g(\xi,y)|^2\min(1,t^2|\xi|^{2n})d\xi\tau(dy)\leq N^2(g_0\mid F)+t^2\int\int|g_1(\xi,y)|^2|\xi|^{2n}d\xi\tau(dy)$ и, следовательно, $A\leq K(t,g;F,F_{0n})$, $A\leq K(t,g;F_1,F_{0n1})$. Обратно, пусть $R_t^n=\{\xi\in R^n;\ |\xi|^n t\geq 1\}$ и $g_{0t}(\xi,y)=g(\xi,y)\chi_{R_t^n}(\xi)$, $g_{1t}(\xi,y)=g[1-\chi_{R_t^n}(\xi)]$, где $\chi_{\mathcal{O}}(\xi)$ — характеристическая функция множества $\mathcal{O}$. Тогда $g=g_{0t}+g_{1t}$, $g_{0t}\in F_1$, $g_{1t}\in F_{0n1}$ и

$$N^2(g_{0t}\mid F)=\int_Y\int_{R_t^n}|g|^2\min(1,t^2|\xi|^{2n})d\xi d\tau\leq A^2,\quad t^2N^2(g_{1t}\mid F_{0n})\leq A^2.$$

Следовательно, $K(t,g;F_1,F_{0n1})\leq 2A$, $K(t,g;F,F_{0n})\leq 2A$. Лемма доказана.

Пусть Ω есть преобразование Фурье по переменной ξ функции $g(\xi,y)$, $(\Omega g)(x,y)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{i\xi x}g(\xi,y)d\xi$, $\xi x=\Sigma_{k=1}^n\xi_k x_k$.

Лемма 6. *Образ пространства* $b_{n/2,1}F$ *при преобразовании Фурье* Ω *совпадает с* $C_0\cap b_{1x}^{n/2}F$, *короче* $\Omega b_{n/2,1}F=C_0\cap b_{1x}^{n/2}F$. *При этом*

$$N(\Omega g\mid b_{1x}^{n/2}F)\sim N(g\mid b_{n/2,1}F).$$

Доказательство. При $F=L^2R^1$ лемма 6 доказана Бьерлингом [21]. Вложение $C_0\cap b^{n/2}_{1x}F\subset \Omega b_{n/2,1}F$ будем доказывать по Бьерлингу (см. также [4]), где методом Бьерлинга показано, что $\overset{\circ}{B}_{\omega}R^n\subset \Omega L^1R^n$), а обратное — с помощью интерполяции. Отметим, что в [19] с помощью интерполяции доказывается эквивалентность: $f\in \dot{B}^{\alpha}_1L^2\Leftrightarrow \Omega f\in b_{\alpha,1}L^2$, где преобразование Фурье Ω понимается уже в обобщенном смысле.

Пусть $f\in b^{n/2}_{1x}F$ и $f\neq 0$. Положим

$$\Delta^m(h)f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh,y),\quad h=(h_1,\ldots,h_n).$$

Так как $\Delta^m(h)=(\Pi^n_{i=1}T_i(h_i)-I)^m$, то легко видеть, что $\Delta^m(h)f(x,y)\in F$, если $m\geq n^2$ и $h\neq 0$. При этом

$$\sup_{|h|=t}N(\Delta^m(h)f\mid F)\leq C\omega(|h|),\quad \omega(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}\sup_{0<h\leq t}N(\Delta^n_i(h)f\mid F). \tag{12}$$

С помощью теоремы Планшереля можно определить функцию $g_h(\xi,y)$ при $h\neq 0$ равенством

$$(e^{i\xi h}-1)^m g_h(\xi,y)=\Omega^{-1}[\Delta^m(h)f(x,y)]. \tag{13}$$

Функция $g_h(\xi,y)$ не зависит от h, поскольку $\Delta^m(h)\Delta^m(h')f(x,y)=\Delta^m(h')\Delta^m(h)f(x,y)$ и, следовательно, $(e^{i\xi h}-1)^m(e^{i\xi h'}-1)^m g_{h'}(\xi,y)=(e^{i\xi h'}-1)^m(e^{i\xi h}-1)^m g_h(\xi,y)$, т. е. $g_h(\xi,y)=g_{h'}(\xi,y)$ п. в. при $h\neq 0$, $h'\neq 0$. Положим $g(\xi,y)=g_h(\xi,y)$. Из (13) и равенства Парсеваля получаем

$$4^m\int|g(\xi,y)^2|\sin(\xi h/2)|^{2m}d\xi=\int|\Delta^m(h)f(x,y)|^2dx. \tag{14}$$

Пусть

$$\mu^2(\xi)=4^m\int|\sin(\xi h/2)|^{2m}|h|^{-3n/2}[\omega(|h|)]^{-1}dh. \tag{15}$$

Из (12), (14), (15) имеем

$$\int\int|g(\xi,y)|^2\mu^2(\xi)d\xi\leq CN(f\mid b^{n/2}_{1x}F). \tag{16}$$

Рассмотрим интеграл

$$B=\int_{|h||\xi|\leq 1}|h|^{-n}|\sin(\xi h/2)|^m dh=\int_0^1\int_{|\theta|=1}|\sin(t\theta\nu/2)|^m d\theta\frac{dt}{t},$$

где $\xi=|\xi|\nu$, $h=|h|\theta=t\theta$. Очевидно последний интеграл не зависит от ν, поэтому B есть положительная константа. По неравенству Шварца $B^2\leq\int_{|h||\xi|\leq 1}|h|^{-n/2}\omega(|h|)dh\,.\,4^{-m}\mu^2(\xi)$, откуда

$$\mu^2(\xi)\geq\varphi^2(|\xi|^n),\quad \varphi^{-2}(t^n)=4^{-m}B^{-2}\varkappa_n\int_0^{1/t}s^{n/2}\omega(s)\frac{ds}{s}. \tag{17}$$

Из (16), (17) получаем

$$N(g\mid F_{0,\varphi,n})\leq C[N(f\mid b^{n/2}_{1x}F)]^{1/2},\quad P_{1/2,1}(\varphi)\leq\frac{\sqrt{\varkappa_n/n}}{2^mB}[N(f\mid b^{n/2}_{1x}F)]^{1/2}. \tag{18}$$

Следовательно, $g\in b_{n/2,1}F$ и

$$N(g \mid b_{n/2,1}F) \leq CN(f \mid b_{1x}^{n/2}F). \tag{19}$$

Далее, из (13) с помощью леммы 4, получаем равенство $\Delta^m(h)f(x, y) = \Omega[(e^{i\xi h}-1)^m g(\xi, y)]$, откуда по теореме Римана-Лебега имеем при $|h| \to \infty$, $f = \Omega g$. Отсюда и (19) следует, что $C_0 \cap b_{1x}^{n/2}F \subset \Omega b_{n/2,1}F$.

Теперь докажем обратное вложение. Очевидно, $\Omega : F_1 \to F_0$ и $\Omega : F_{0n1} \to \omega_x^n F$. Отсюда с помощью теоремы A, леммы 5 и леммы 3 получаем, что

$$\Omega : b_{n/2,1}F \to C_0 \cap b_{1x}^{n/2}F, \quad N(\Omega g \mid b_{1x}^{n/2}F) \leq CN(g \mid b_{n/2,1}F).$$

Лемма 6 доказана.

З а м е ч а н и е 1. При доказательстве леммы 6 попутно мы установили, что функции из $b_{1x}^{n/2}F$ после изменения на множестве нулевой меры становятся непрерывными, следовательно, $b_{1x}^{n/2}F = \Omega b_{n/2,1}F$ в смысле равенства п. в. При этом $N(\Omega g \mid b_{1x}^{n/2}F) \sim N(g \mid b_{n/2,1}F)$.

З а м е ч а н и е 2. Для того чтобы оценка (3) имела смысл для произвольной меры ϱ, необходимо, чтобы ядро $f(x, y)$ интегрального оператора (1) было непрерывно относительно x. Согласно замечанию 1 функцию $f \in b_{1x}^{n/2}F$ можно считать непрерывной.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. Пусть $f \in b_{1x}^{n/2}F$ и $f = \Omega h$, $h \in b_{n/2,1}F$. Согласно теореме B $h \in (F, F_{0n})_{1/2,1}$. Положим

$$K(t, h) = K(t, h; F, F_{0n}), \quad \varphi^2(\lambda) = \int_0^\infty t^{-1/2}K^{-1}(t, h) \min(1, \lambda^2 t^2)\frac{dt}{t}.$$

Используя неравенства

$$\min(1, t\lambda)K(1/\lambda, h) \leq K(t, h) \leq \max(1, t\lambda)K(1/\lambda, h) \tag{20}$$

получаем $\varphi^2(\lambda) \sim \lambda^{1/2}K^{-1}(1/\lambda, h)$ и, следовательно, $\varphi \in \mathscr{B}_{1/2,1}$. При этом

$$\int \varphi^{-2}(|\xi|^n)d\xi = \varkappa_n P_{1/2,1}^2(\varphi)/n \sim N(f \mid b_{1x}^{n/2}F). \tag{21}$$

Из определения функции $\varphi(\lambda)$ и формулы (11) получаем

$$N(h \mid F_{0,\varphi,n}) \sim [N(f \mid b_{1x}^{n/2}F)]^{1/2}. \tag{22}$$

Положим $\psi(x) = \Omega[\varphi(|\xi|^n)]^{-1}$, $g(x, y) = \Omega[h(\xi, y)\varphi(|\xi|^n)]$. Тогда $\psi \in L^2$, $g \in F$, $g * \psi = \Omega h$ и, следовательно,

$$f(x, y) = \int g(s, y)\psi(x-s)ds. \tag{23}$$

Лемма 1 следует из (21)—(23).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть сначала $X = R^n$. Тогда можно использовать преобразование Фурье Ω. Если $f(x, y) \in b_{1x}^{n/2}F$, то по лемме 1 имеет место (21)—(23). Рассмотрим операторы $T_1 : L^2(R^n, \varrho) \to L^2(R^n, ds)$ и $T_2 : L^2(R^n, ds) \to L^2(Y, \tau)$ с ядрами $\psi(x-s)$ и $g(s, y)$ соответственно. Тогда из (23) следует, что $T = T_2 \circ T_1$, а из (21) и (22) — что

$$N(T_1 \mid S_2) \sim [\varrho(R^n)]^{1/2}[N(f \mid b_{1x}^{n/2}F)]^{1/2}, \quad N(T_2 \mid S_2) \sim [N(f \mid b_{1x}^{n/2}F)]^{1/2}.$$

Поэтому $T \in S_1$ и $N(T \mid S_1) \leq C[\varrho(R^n)]^{1/2}N(f \mid b_{1x}^{n/2}F)$. Аналогично (срв. доказательство леммы 2)

(24) $$N(T \mid S_1) \leqq C[\varrho(R^n)]^{1/2} N(f \mid B_{1x}^{n/2} F).$$

Если $X \in \Lambda(R^n)$ и $f(x, y) \in B_{1x}^{n/2} G$, то существует продолжение $f_2(x, y)$ функции $f(x, y)$ на всем пространстве $R^n \times Y$ и

(25) $$N(f_2 \mid B_{1x}^{n/2} F) \leqq C(X) N(f \mid B_{1x}^{n/2} G).$$

Рассмотрим операторы $K_1 : L^2(X, \varrho) \to L^2(R^n, \varrho')$ и $K_2 : L^2(R^n, \varrho') \to L^2(Y, \tau)$, где $(K_1 u)(x) = u(x)$, если $x \in X$, и $(K_1 u)(x) = 0$, если $x \in R^n \setminus X$, K_2 имеет ядро $_2(x, y)$ и ϱ' — мера, непрерывная относительно ϱ с плотностью $\chi_X(x)$. Очевидно, $T = K_2 \circ K_1$, K_1 — ограниченный оператор и $K_2 \in S_1$. Следовательно, $T \in S_1$ и, учитывая (24), (25), получаем $N(T \mid S_1) \leqq C \cdot C(X) [\varrho(X)]^{1/2} N(f \mid B_{1x}^{n/2} G)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 1′ проводится по схеме, указанной при выводе теоремы 1. Нужно лишь заметить, что для пространства $b_1^{n/2} L^2$ имеет место лемма, аналогичная лемме 1. Отметим, что такая лемма имеет место и для пространства $B_1^{n/2} L^2$.

Замечание 3. Рассмотрим пространство $B_1^{n/2} L^2$. После изменения на множестве нулевой меры любая функция этого пространства становится непрерывной. Однако для пространств $B_q^\alpha L^2 (\alpha < n/2, q > 0)$ это уже не верно. Действительно, $B_2^{n/2} L^2 \subset B_q^\alpha L^2 (\alpha < n/2, q > 0)$. Пусть $n = 2$. Определим функцию $f(x, y)$ следующим образом: $f(x, y) = \ln \ln r^{-1}$ при $0 < r \leqq 1/2$, $r^2 = x^2 + y^2$; $f(x, y) = 2(1 - r) \ln \ln 2$ при $1/2 \leqq r \leqq 1$ и $f(x, y) \equiv 0$ при $r \geqq 1$. Хорошо известно, что функция $f \in B_2^1 L^2$, но, очевидно, она не может быть доопределена в нуле по непрерывности.

Следовательно, элементы класса $B_1^{n/2} L^2$ обладают „предельной гладкостью“, которая обеспечивает их непрерывность. Элементы класса $B_q^\alpha L^2 (\alpha < n/2)$ имеют „сниженную гладкость“, которая уже не обеспечивает их непрерывности.

Ясно, что аналогичные замечания справедливы и для классов $b_1^{n/2} L^2$, $b_{1x}^{n/2} F$.

Доказательство леммы 2. Пусть $f \in B_{0qx}^\alpha F$, $\alpha/n = 1/q - 1/2$, $0 < q \leqq 2/3$, $\operatorname{supp} f \subset X_{\sigma'} \times Y$, $f \not\equiv 0$ и $0 < \alpha < m' < 2m' \leqq m$. Введем пространство $W_x^m F$ с нормой $N(f \mid W_x^m F) = N(f \mid F) + \Sigma_{i=1}^n N(D_i^n f \mid F)$. Аналогично (8) имеет место формула

$$K(t^m, f;\, F, W_x^m F) \sim \begin{cases} N(f \mid F), & t \geqq 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{0 < h \leqq t} N(\Delta_i^m(h) f \mid F) + t^m N(f \mid F), & 0 < t \leqq 1, \end{cases}$$

откуда вытекает

(26) $$(F, W_x^m F)_{\alpha/m,\, q} = B_{qx}^\alpha F \, (0 < \alpha < m,\ q > 0).$$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{B}_{\theta q} (0 < \theta < 1, 0 < q < 2)$ и $F_{\varphi, m}$ — пространство измеримых функций с нормой

$$N(g \mid F_{\varphi, m}) = \{\int\limits_{Y} \int\limits_{R^n} |g(\xi, y)|^2 \varphi^2(\omega_m(|\xi|)) d\xi \tau(dy)\}^{1/2},$$

где $\omega(t)=(1+t^2)^{1/2}$, $\omega_m(t)=[\omega(t)]^m$; $B_{m\theta,q}F$ — множество всех функций $g\in F$, принадлежащих некоторому $F_{\varphi,m}$ при $\varphi\in\mathcal{B}_{\theta q}$ с квазинормой

$$N(g\mid B_{m\theta,q}F)=\inf\{P_{\theta q}(\varphi)N(g\mid F_{\varphi,m});\ \varphi\in\mathcal{B}_{\theta q},\ g\in F_{\varphi,m}\}. \tag{27}$$

Положим $F_m=F_{\varphi,m}$ при $\varphi(t)\equiv t$. Имеет место

Теорема B′ ([19, 20]). $(F, F_m)_{\theta q}=B_{m\theta,q}F\,(0<\theta<1,\ 0<q<2)$.

Так как преобразование Фурье Ω осуществляет изоморфизм $\Omega: F\to F$ и $\Omega: F_m\to W^m_x F$, то согласно (26) имеем изоморфизм

$$\Omega: (F, F_m)_{\alpha/m,q}\to B^\alpha_{qx}F. \tag{28}$$

Положим $\Omega^{-1}(f)=\hat f$, $K(\lambda,\hat f)=K(\lambda,\hat f;\ F, F_m)$. Аналогично (11)

$$K^2(\lambda,\hat f)\sim\int_Y\int_{R^n}|\hat f(\xi,y)|^2\min(1,\lambda^2\omega^{2m}(|\xi|))d\xi\tau(dy) \tag{29}$$

Пусть

$$\varphi_0^2(\lambda)=\int_0^\infty t^{-\alpha q/m}K^{q-2}(t,\hat f)\min(1,\lambda^2t^2)\frac{dt}{t}. \tag{30}$$

С помощью (20) получаем

$$\varphi_0^2(\lambda)\sim\lambda^{\alpha\cdot q/m}K^{q-2}(1/\lambda,\hat f). \tag{31}$$

Если

$$\varphi_0^2(\lambda)=\lambda^{(n-\alpha q)/m}K^{-q}(1/\lambda,\hat f),\quad \psi_1^2(\lambda)=\lambda^{(2\alpha q-n)/m}K^{2q-2}(1/\lambda,\hat f), \tag{32}$$

то

$$\varphi_0(\lambda)\sim\psi_0(\lambda)\psi_1(\lambda). \tag{33}$$

Пусть $\varepsilon>0$, $\Delta_\varepsilon(t)=[\sin(\varepsilon t/2m)]^{2m}$. Определим функцию

$$\varphi_\varepsilon(t)=\int_1^\infty\psi_0(\lambda^m)\Delta_\varepsilon(t/\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda},\ -\infty<t<\infty. \tag{34}$$

Докажем, что

$$\varphi_\varepsilon(t)\sim\psi_0(t^m)\ \text{при}\ t\geqq 1. \tag{35}$$

Действительно, с помощью неравенства (20) получаем

$$\varphi_\varepsilon(t)\leqq C_1(\varepsilon)\psi_0(t^m),\ C_1(\varepsilon)=\int_0^\infty u^{(\alpha q-n)/2}\min(1,u^m)^{-q/2}\Delta_\varepsilon(u)\frac{du}{u},$$

где $\beta=(n-\alpha q)/2+qm/2=nq/4+qm/2<qm<m$, $(\alpha q-n)/2=-nq/4$. Наоборот, так как $\psi_0(\lambda^m)$ — неубывающая функция, то $\varphi_\varepsilon(t)\geqq C_2(\varepsilon)\psi_0(t^m)$ при $t\geqq 1$, где $C_2(\varepsilon)=\int_0^1u^{-1}\Delta_\varepsilon(u)du$.

Функция $\varphi_\varepsilon(t)$ является четной целой, экспоненциального типа $\leqq\varepsilon$ [22]. Действительно, $|\varphi_\varepsilon^{(k)}(t)|\leqq M\,.\,\varepsilon^k$ при $k\geqq 2m$, $M=K^{-q}(1,\hat f)/(2m-\beta)$ и $\varphi_\varepsilon^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots,2m-1,2s+1$ при $s\geqq m$. Следовательно, $\varphi_\varepsilon(t)=\Sigma_{s\geqq m}C_{2s}t^{2s}$, где $|C_{2s}|\leqq M\,.\,\varepsilon^{2s}/(2s)!$ при $s\geqq m$.

Положим $g_\varepsilon(x, y) = \Omega \hat{g}_\varepsilon(\xi, y)$, $\psi_\varepsilon(x) = \Omega \hat{\psi}_\varepsilon(\xi)$, где

$$\hat{g}_\varepsilon(\xi, y) = \hat{f}(\xi, y)\varphi_\varepsilon(\omega(|\xi|)), \quad \hat{\psi}_\varepsilon(\xi) = 1/\varphi_\varepsilon(\omega(|\xi|)). \tag{36}$$

Функция $\hat{g}_\varepsilon(\xi, y)$ при п. в. $y \in \boldsymbol{Y}$ является целой, экспоненциального типа $\leqq \sigma' + \varepsilon$ [22]. Очевидно

$$\hat{f}(\xi, y) = \hat{g}_\varepsilon(\xi, y)\hat{\psi}_\varepsilon(\xi). \tag{37}$$

Далее

$$N(\hat{\psi}_\varepsilon \mid L^2) \sim [N(f \mid B^\alpha_{qx}F)]^{q/2}. \tag{38}$$

Докажем (38). Сначала заметим, что $K(t, \hat{f}) = N(\hat{f} \mid F)$ при $t \geqq 1$ и, следовательно, учитывая (28), имеем

$$N(f \mid B^\alpha_{qx}F) \sim \left\{\int_0^1 t^{-\alpha q/m} K^q(t, \hat{f}) \frac{dt}{t}\right\}^{1/q} + N(\hat{f} \mid F). \tag{39}$$

Из (35), (32), (28) вытекает

$$\int \hat{\psi}_\varepsilon^2(\xi) d\xi \sim \int_0^\infty t^n \psi_0^{-2}(\omega_m(t)) \frac{dt}{t}, \quad \int_0^\infty t^n \psi_0^{-2}(t^m) \frac{dt}{t} \sim [N(f \mid B^\alpha_{qx}F)]^q. \tag{40}$$

Так как $\omega(t) > t$, то из (40) следует оценка (38) сверху. Наоборот,

$$\int_0^1 t^n \psi_0^{-2}(\omega_m(t)) \frac{dt}{t} \geqq C[N(\hat{f} \mid F)]^q, \int_1^\infty t^n \psi_0^{-2}(\omega_m(t)) \frac{dt}{t} \geqq C \int_0^1 t^{-\alpha q/m} K^q(t, \hat{f}) \frac{dt}{t}.$$

Отсюда, из (40), (39) находим оценку (38) снизу. Рассмотрим функцию $\widetilde{\psi}(t) = \psi_1(t^{m/m'})$. Из (32) имеем

$$\int_0^\infty \left[\frac{t^{\alpha'/m'}}{\widetilde{\psi}(t)}\right]^{2q'/(2-q')} \frac{dt}{t} = \frac{m}{m'} \int_0^\infty t^{-\alpha q/m} K^q(t, \hat{f}) \frac{dt}{t}.$$

Напомним, что $0 < q \leqq 2/3$, $\alpha/n = 1/q - 1/2$, $\alpha' = \alpha - n/2$, $1/q' = 1/q - 1/2$. Отсюда и из (28) вытекает

$$\widetilde{\psi} \in \mathcal{B}_{\alpha'/m',\, q'}, \quad P_{\alpha'/m',\, q'}(\widetilde{\psi}) \sim [N(f \mid B^\alpha_{qx}F)]^{1-q}. \tag{41}$$

С другой стороны, $\hat{g}_\varepsilon(\xi, y)\widetilde{\psi}(\omega_{m'}(|\xi|)) = \hat{f}(\xi, y)\varphi_\varepsilon(\omega(|\xi|))\psi_1(\omega_m(|\xi|))$, поэтому согласно (35), (33), (30), (28) имеем

$$N(\hat{g}_\varepsilon \mid F_{\widetilde{\psi},\, m'}) \sim [N(f \mid B^\alpha_{qx}F)]^{q/2}. \tag{42}$$

Из (41), (42) с помощью теоремы B' получаем, что $\hat{g}_\varepsilon \in (F, F_{m'})_{\alpha'/m',\, q'}$ и $N(\hat{g}_\varepsilon \mid (F, F_{m'})_{\alpha'/m',\, q'}) \leqq C[N(f \mid B^\alpha_{qx}F)]^{1-q/2}$. Отсюда и (28), (36) находим

$$N(g_\varepsilon \mid B^{\alpha'}_{q'x}F) \leqq C[N(f \mid B^\alpha_{qx}F)]^{1-q/2}. \tag{43}$$

Теперь докажем обратную оценку. Пусть

$$\gamma_\varepsilon^2(\lambda) = \int_0^\infty t^{-\alpha' q'/m'} K^{q'-2}(t, \hat{g}_\varepsilon) \min(1, t^2\lambda^2) \frac{dt}{t}, \tag{44}$$

где $K(t, \hat{g}_\varepsilon) = K(t, \hat{g}_\varepsilon; F, F_{m'})$. Тогда $\gamma_\varepsilon^2(\lambda) \sim \lambda^{\alpha' q'/m'} K^{q'-2}(1/\lambda, \hat{g}_\varepsilon)$ и, следовательно,

(45) $$P_{\alpha'/m', q'}(\gamma_\varepsilon) \sim [N(g_\varepsilon \mid B_{q'x}^{\alpha'} F)]^{1-q'/2}.$$

Далее, из (44), (28) имеем

(46) $$N(\hat{g}_\varepsilon \mid F_{\gamma_\varepsilon, m'}) \sim [N(g_\varepsilon \mid B_{q'x}^{\alpha'} F)]^{q'/2}.$$

Докажем, что

(47) $$I \equiv \int_0^\infty \psi_0^2(t^{-m}) \gamma_\varepsilon^2(t^{-m'}) \min(1, s^{2m} t^{2m}) \frac{dt}{t} \sim \psi_0^2(s^m) \gamma_\varepsilon^2(s^{m'}).$$

Действительно, из (32), (44), (20) получаем $I \leqq C_1 \psi_0^2(s^m) \gamma_\varepsilon^2(s^{m'})$, $C_1 = \int_0^\infty u^a \min(1, u^b) u^{b-1} du$, где $a = \alpha q - n - \alpha' q'$, $b = -qm + q'm' - 2m' + 2m$. Интеграл сходится, так как $\alpha q - n - mq + m \geqq (m-\alpha)/3 + \alpha - n > 0$, $(m' - \alpha')q' + m - 2m' > 0$, $a < 0$. Аналогично $I \geqq C_2 \psi_0^2(s^m) \gamma_\varepsilon^2(s^{m'})$,

$$C_2 = \int_0^\infty u^a \min(1, u^{2m}) \max(1, u^{b-2m}) \frac{du}{u}.$$

Далее из (28), (29) с помощью неравенства Гельдера с показателем $2/q$ получаем

(48) $$N(f \mid B_{qx}^\alpha F) \leqq C . A_\varepsilon . B_\varepsilon,$$

где $A_\varepsilon = \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{t^{-\alpha}}{\psi_0(t^{-m}) \gamma_\varepsilon(t^{-m'})} \right]^{2q/(2-q)} \frac{dt}{t} \right\}^{(2-q)/2q}$,

$$B_\varepsilon = \left\{ \int_0^\infty \psi_0^2(t^{-m}) \gamma_\varepsilon^2(t^{-m'}) \int_Y \int_{R^n} |\hat{f}(\xi, y)|^2 \min(1, t^{2m} \omega^{2m}(|\xi|)) d\xi d\tau \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

По неравенству Гельдера с показателем $2/q - 1$ имеем, учитывая (40), (45),

(49) $$A_\varepsilon \leqq C [N(f \mid B_{qx}^\alpha F)]^{q/2} [N(g_\varepsilon \mid B_{q'x}^{\alpha'} F)]^{1-q'/2}.$$

С другой стороны, с помощью (47), (45) получаем

(50) $$B_\varepsilon \sim [N(g_\varepsilon \mid B_{q'x}^{\alpha'} F)]^{q'/2}.$$

Из (48) — (50) следует оценка, обратная оценке (43).

Функция $\hat{g}_\varepsilon(\xi, y) \in L^2$ при п. в. $y \in \boldsymbol{Y}$ и является экспоненциальной, типа $\leqq \sigma' + \varepsilon$. По теореме Пэли-Винера [22], $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset \boldsymbol{X}_{\sigma'+\varepsilon} \times \boldsymbol{Y}$. Следовательно, $g_\varepsilon \in B_{0q'x}^{\alpha'} F$ и лемма 2 вытекает из (37), (38), (43).

Доказательство теоремы 2.

Лемма 7. *В условиях теоремы* 2

$$N(T \mid S_{2/k}) \leqq C_\sigma . C_\sigma(\boldsymbol{X}) [\operatorname{mes} \boldsymbol{X}_\sigma]^{k/2-1} [\varrho(\boldsymbol{X})]^{1/2} N(f \mid B_{2/k, x}^{(k-1)n/2} G)$$

для всех целых чисел $k \geqq 2$.

Доказательство. По теореме о продолжении для пространств $B_{qx}^\alpha G$ [14, 11] функцию $f(x, y) \in B_{qx}^\alpha G$ можно продолжить до функции $f_2(x, y)$ на всем пространстве $R^n \times \boldsymbol{Y}$ с выполнением оценки

(51) $$N(f_2 \mid B^{\alpha}_{qx}F) \leq C_{\sigma}(\boldsymbol{X})N(f \mid B^{\alpha}_{qx}G).$$

При этом можно считать, что f_2 — финитная относительно x функция и $\operatorname{supp} f_2 \subset \boldsymbol{X}_{\sigma'} \times \boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{X}_{\sigma} \times \boldsymbol{Y}$. Рассмотрим операторы

$$T_1 : L^2(\boldsymbol{X}, \varrho) \to L^2(R^n, \varrho') \text{ и } T_2 : L^2(R^n, \varrho') \to L^2(\boldsymbol{Y}, \tau),$$

где $(T_1 u)(x) = u(x)$, если $x \in \boldsymbol{X}$, и $(T_1 u)(x) = 0$, если $x \in R^n \setminus \boldsymbol{X}$, T_2 имеет ядро $f_2(x, y)$ и $\varrho'(dx) = \chi_{\boldsymbol{X}}(x)\varrho(dx)$. Очевидно $T = T_2 \circ T_1$ и

(52) $$N(T \mid S_q) \leq N(T_2 \mid S_q).$$

Из (51), (52) и теоремы 1 получаем оценку леммы 7 при $k=2$. Дальше используем индукцию по k. Предположим, что лемма 7 верна при некотором $k>2$ и пусть $f \in B^{kn/2}_{2/(k+1),\,x}G$. Тогда будет выполняться (51) при $\alpha = kn/2$, $q = 2/(k+1)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\boldsymbol{X}_{\sigma'+\varepsilon} \subset \boldsymbol{X}_{\sigma}$ и фиксируем ε. Согласно лемме 2

$$f_2(x, y) = \int g_{\varepsilon}(s, y)\psi_{\varepsilon}(x-s)ds, \quad \operatorname{supp} g_{\varepsilon} \subset \boldsymbol{X}_{\sigma'+\varepsilon} \times \boldsymbol{Y},$$

(53) $$N(\psi_{\varepsilon} \mid L^2) \sim [N(f_2 \mid B^{kn/2}_{2/(k+1),x}F)]^{1/(k+1)},\ N(g_{\varepsilon} \mid B^{(k-1)n/2}_{2/k,\,x}F) \sim [N(f_2 \mid B^{kn/2}_{2/(k+1),x}F)]^{k/(k+1)}.$$

Рассмотрим операторы $K_{1\varepsilon} : L^2(R^n, \varrho') \to L^2(\boldsymbol{X}_{\sigma'+\varepsilon}, ds)$ и $K_{2\varepsilon} : L^2(\boldsymbol{X}_{\sigma'+\varepsilon}, ds) \to L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$ с ядрами $\psi_{\varepsilon}(x-s)$ и $g_{\varepsilon}(s, y)$ соответственно. Тогда $T_2 = K_{2\varepsilon} \circ K_{1\varepsilon}$,

$$N(K_{1\varepsilon} \mid S_2) \leq [\varrho(\boldsymbol{X})]^{1/2} N(\psi_{\varepsilon} \mid L^2)$$

и, по предположению индукции,

$$N(K_{2\varepsilon} \mid S_{2/k}) \leq C_{\sigma}[\operatorname{mes} \boldsymbol{X}_{\sigma}]^{(k+1)/2-1} N(g_{\varepsilon} \mid B^{(k-1)n/2}_{2/k,\,x}F).$$

Следовательно, [15], $T_2 \in S_{2/(k+1)}$ и, ввиду (51), (52), (53) получаем оценку

$$N(T_2 \mid S_{2/(k+1)}) \leq C_{\sigma}C_{\sigma}(\boldsymbol{X})[\operatorname{mes} \boldsymbol{X}_{\sigma}]^{(k+1)/2-1}[\varrho(\boldsymbol{X})]^{1/2} N(f \mid B^{kn/2}_{2/(k+1),x}G).$$

Лемма 7 доказана.

Теперь теорему 2 можно доказать с помощью интерполяции. Базой для интерполяции является лемма 7, которая исчерпывает случаи $q = 2/k$, $k \geq 2$ — целое. Пусть $0<q<1$ и $2/(k+1)<q<2/k$, $k \geq 2$. Положим $\theta = 2/q - k$. Тогда $1/q = (1-\theta)k/2 + \theta(k+1)/2$ и $\alpha/n = (1-\theta)(k-1)/2 + \theta k/2$. Рассмотрим отображение $\mathfrak{T}$, которое сопоставляет элементу f оператор T с ядром $f(x, y)$, $\mathfrak{T}(f) = T$. Согласно лемме 7 отображение $\mathfrak{T}$ действует линейно и непрерывно в парах пространств:

(54) $$\mathfrak{T} : B^{\alpha}_{qx}G \to S_q,\ \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2},\ \frac{1}{q} = \frac{k}{2} \text{ либо } \frac{k+1}{2}.$$

С другой стороны, из (26) с помощью теоремы о продолжении для пространств $B^{\alpha}_{qx}G$ и теоремы о реитерации [12, 13] имеем

(55) $$(B^{(k-1)n/2}_{2/k,\,x}G,\ B^{kn/2}_{2/(k+1),x}G)_{\theta q} = B^{\alpha}_{qx}G.$$

Далее, в [9] доказано, что

(56) $$(S_{q_1},\ S_{q_2})_{\theta q} = S_q,\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2},\quad q_1 > 0,\ q_2 > 0.$$

Очевидно теорема 2 следует из (54) — (56) и теоремы А.

Доказательство теоремы 3 опирается на комплексный интерполяционный метод Кальдерона [23]. Пусть (F_0, F_1) — совместная пара банаховых пространств и $\mathcal{H}(F_0, F_1)$ — множество всех F_0+F_1-значных функций, определенных в полосе $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$, которые ограничены и непрерывны в замкнутой полосе и аналитичны в открытой полосе, а на границе $\operatorname{Re} z = k$ непрерывны и ограничены со значениями в пространстве $F_k (k=0, 1)$.

Пространство Кальдерона $[F_0, F_1]_\theta$, $0<\theta<1$ есть множество всех $a \in F_0+F_1$ таких, что $a=f(\theta)$ для некоторого $f \in \mathcal{H}(F_0, F_1)$. Это банахово пространство с нормой

$$N(a \mid [F_0, F_1]_\theta) = \inf\{\max_{k=0,1} \sup_t N(f(k+it) \mid F_k)\,;\ f \in \mathcal{H}, f(\theta)=a\}.$$

Пусть

$$\tilde{N}(a \mid [F_0, F_1]_\theta) = \inf\{\sup_t [N(f(it) \mid F_0)]^{1-\theta}[N(f(1+it) \mid F_1)]^\theta\,;\ f \in \mathcal{H}, f(\theta)=a\}. \tag{57}$$

Очевидно $\tilde{N}(a \mid [F_0, F_1]_\theta) \leqq N(a \mid [F_0, F_1]_\theta]$. Наоборот, если $a=f(\theta)$, $f \in \mathcal{H}$ и $b=\sup_t N(f(it) \mid F_0)$, $C=\sup_t N(f(1+it) \mid F_1)$, то $a=g(\theta)$, где $g(z)=(b/c)^{z-\theta}f(z)$. Следовательно, $N(a \mid [F_0, F_1]_\theta) \leqq b^{1-\theta}C^\theta$. Поэтому

$$N(a \mid [F_0, F_1]_\theta) = \tilde{N}(a \mid [F_0, F_1]_\theta). \tag{58}$$

Теорема A′ (об интерполяции) [23]. *Пусть* (F_0, F_1) *и* (G_0, G_1) *совместные пары банаховых пространств и отображение* $M: F_i \to G_i$ *— линейно и непрерывно с нормой* $M_i (i=0,1)$. *Тогда сужение* $M: [F_0, F_1]_\theta \to [G_0, G_1]_\theta$ *линейно и непрерывно и* $N(Ma \mid [G_0, G_1]_\theta) \leqq M_0^{1-\theta} M_1^\theta N(a \mid [F_0, F_1]_\theta)$.

Лемма 8.

$$b_{qx}^\alpha F \subset [b_{1x}^{n/2} F, F]_\theta,\ \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2},\ \frac{1}{q} = 1 - \frac{\theta}{2},\ 0<\theta<1.$$

Доказательство. Будем использовать преобразование Фурье Ω по переменной x. Согласно замечанию 1 и теореме A′ имеем

$$\Omega: [b_{n/2,1} F, F]_\theta \to [b_{1x}^{n/2} F, F]_\theta. \tag{59}$$

Докажем, что

$$b_{\alpha q} F \subset [b_{n/2,1} F, F]_\theta,\ \alpha = n/q - n/2 = n(1-\theta)/2. \tag{60}$$

Действительно, если $g \in b_{n\theta', q} F$, $\theta' = (1-\theta)/2$, то по теореме B для любого $\varepsilon>0$ можно найти $\varphi \in \mathcal{B}_{\theta' q}$ так, чтобы $g \in F_{0,\varphi,n}$ и

$$P_{\theta' q}(\varphi) N(g \mid F_{0,\varphi,n}) \leqq (1+\varepsilon) N(g \mid b_{n\theta', q} F). \tag{61}$$

Положим $\varphi = \psi^{1-\theta}$. Тогда $\psi \in \mathcal{B}_{1/2, 1}$ и

$$[P_{1/2, 1}(\psi)]^{1-\theta} = P_{\theta' q}(\varphi). \tag{62}$$

Так как [23] $F_{0,\varphi,n} = [F_{0,\psi,n}, F]_\theta$, то $g \in [F_{0,\psi,n}, F]_\theta$ и, следовательно, найдется $G \in \mathcal{H}(F_{0,\psi,n}, F)$, такая, что $G(\theta) = g$ и согласно (57), (58)

$$\sup_t [N(G(it) \mid F_{0,\psi,n})]^{1-\theta}[N(G(1+it) \mid F)]^\theta \leqq (1+\varepsilon) N(g \mid F_{0,\varphi,n}). \tag{63}$$

Далее $b_{n/2,\,1}F\supset F_{0,\psi,n}$, поэтому $G\in\mathcal{H}(b_{n/2,\,1}F, F)$. Умножая (63) на (62) и учитывая (61), (57), (58), получаем $N(g\,|\,[b_{n/2,\,1}F, F]_\theta)\leqq(1+\varepsilon)^2N(g\,|\,b_{\alpha q}F)$, откуда следует (60).

Очевидно лемма 8 будет вытекать из (59), (60) и из следующей леммы.

Лемма 9. $b^\alpha_{qx}F=\Omega b_{\alpha q}F$, $\alpha/n=1/q-1/2$, $1<q<2$.

Доказательство. Пусть $F_q=F\cap L^2_\tau \boldsymbol{Y}L^qR^n$ — пространство с нормой, индуцированной из F, аналогично $F_{0nq}=F_{0n}\cap L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^qR^n$. Тогда

$$(64)\qquad (F_q, F_{0nq})_{\alpha/n,\,q}=(F, F_{0n})_{\alpha/n,\,q}\subset L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^qR^n,\ \frac{\alpha}{n}=\frac{1}{q}-\frac{1}{2},\ 1<q<2.$$

Вложение в (64) следует из теоремы B и леммы 4. Теперь равенство в (64) вытекает из формулы $K(t, g;\, F, F_{0n})\sim K(t, g;\, F_q, F_{0nq}), g\in L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^qR^n$, которая устанавливается аналогично формуле (11).

По теореме Пэли $\Omega\colon L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^qR^n\to L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^{q'}R^n$, $1/q'=1-1/q$ и $\Omega\colon F_q\to F$, $\Omega\colon F_{0nq}\to \dot{W}^n_xF$, где $\dot{W}^n_xF$ состоит из всех $f(x, y)\in L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^2_{\mathrm{loc}}R^n$ и имеет полунорму $\sum_{i=1}^nN(D^n_if\,|\,F)$. Следовательно,

$$(65)\qquad \Omega\colon (F_q, F_{0nq})_{\alpha/n,\,q}\to(F, \dot{W}^n_xF)_{\alpha/n,\,q}\cap L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^{q'}R^n.$$

Далее с помощью формулы, аналогичной (8), получаем

$$(66)\qquad (F, \dot{W}^n_xF)_{\alpha/n,q}=\dot{B}^\alpha_{qx}F.$$

Из (64) — (66) и теоремы B следует, что $\Omega b_{\alpha q}F\subset b^\alpha_{qx}F$.

Наоборот, имеет место формула $b^{n/2}_{1x}F=(F, \omega^n_xF)_{1/2,\,1}$, которая доказывается аналогично лемме 3. Достаточно заметить, что формула (8) сохраняется при $f\in F+C_0$, так как и в этом случае $f_{1t}\in\omega^n_xF$. По теореме о реитерации [12, 13] отсюда получаем

$$(67)\qquad (F, b^{n/2}_{1x}F)_{2\alpha/n,q}=(F, (F, \omega^n_xF)_{1/2,1})_{2\alpha/n,q}=(F, \omega^n_xF)_{\alpha/n,q}\ (2\alpha<n).$$

Докажем, что

$$(68)\qquad (F, \omega^n_xF)_{\alpha/n,q}=b^\alpha_{qx}F,\ \frac{\alpha}{n}=\frac{1}{q}-\frac{1}{2},\ 1<q<2.$$

Действительно, из лемм 4, 6 имеем $b^{n/2}_{1x}F\subset L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^\infty R^n$ и тогда по теореме Рисса [12]

$$(F, b^{n/2}_{1x}F)_{2\alpha/n,q}\subset(F, L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^\infty R^n)_{2\alpha/n,q}\subset L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^{q'}R^n,$$

$1/q'=1-1/q=1/2-\alpha/n$. Поэтому (68) будет следовать из формулы

$$K(t^n, f;\, F, \omega^n_xF)\sim\sum_{i=1}^n\sup_{0<h\leqq t}N(\Delta^n_i(h)f\,|\,F),\quad f\in L^2_\tau\boldsymbol{Y}L^{q'}R^n,$$

которая доказывается аналогично (8). Отметим лишь, что $f_{1t}\in\omega^n_xF$.

Из (67, (68) получаем

$$(69)\qquad b^\alpha_{qx}F=(F, b^{n/2}_{1x}F)_{2\alpha/n,q}.$$

Пусть $f\in F+b^{n/2}_{1x}F$ и $f=f_0+f_1$, $f_0\in F$, $f_1\in b^{n/2}_{1x}F$. Согласно замечанию 1 $f_1=\Omega g_1$, $g_1\in b_{n/2,1}F, f_0=\Omega g_0$, $g_0\in F$ и $N(g_0\,|\,F)=N(f_0\,|\,F)$, $N(g_1\,|\,b_{n/2,1}F)\leqq CN(f_1\,|\,b^{n/2}_{1x}F)$.

Функция g_0+g_1 зависит только от f. Действительно, если $f=f_0'+f_1'=\Omega g_0'+\Omega g_1'$, то $\Omega(g_0-g_0')=\Omega(g_1'-g_1)\in F\cap C_0$, поэтому $g_0+g_1=g_0'+g_1'$. Положим $g=g_0+g_1$. Тогда $g=\Omega f$ и $K(t,g;F,b_{n/2,1}F)\leqq CK(t,f;F,b_{1x}^{n/2}F)$. Следовательно, $g\in(F, b_{n/2,1}F)_{2\alpha/n,q}$ и, по (69),

$$N(g\mid(F,b_{n/2,1}F)_{2\alpha/n,q})\leqq CN(f\mid b_{qx}^{\alpha}F).$$

Из теоремы B и свойства реитерации получаем, что $(F,b_{n/2,1}F)_{2\alpha/n,q}=b_{\alpha q}F$. Таким образом, если $f\in b_{qx}^{\alpha}F$, то найдется $g\in b_{\alpha q}F$, такая, что $\Omega g=f$ и

$$N(g\mid b_{\alpha q}F)\leqq CN(f\mid b_{qx}^{\alpha}F),\ \text{т. е. }\ b_{qx}^{\alpha}F\subset\Omega b_{\alpha q}F.$$

Лемма 9 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 3. Пусть K — оператор вида (4) с ядром $a(x)f(x,y)$. По теореме о продолжении для пространств $B_{qx}^{\alpha}G$ функцию $f\in B_{qx}^{\alpha}G$ можно продолжить до функции $f_2\in B_{qx}^{\alpha}F$, при этом

$$N(f_2\mid B_{qx}^{\alpha}F)\leqq C(\boldsymbol{X})N(f\mid B_{qx}^{\alpha}G). \tag{70}$$

Из (28), леммы 4 и теоремы Пэли следует, что $B_{qx}^{\alpha}F\subset L_\tau^2\boldsymbol{Y}L^{q'}R^n$, если $\alpha/n=1/q-1/2$, $1<q<2$, $1/q'=1-1/q$. Поэтому $B_{qx}^{\alpha}F\subset b_{qx}^{\alpha}F$. Отсюда и (70) получаем

$$N(f_2\mid b_{qx}^{\alpha}F)\leqq C(\boldsymbol{X})N(f\mid B_{qx}^{\alpha}G). \tag{71}$$

Рассмотрим операторы $K_1: L^2(\boldsymbol{X},dx)\to L^2(R^n,dx)$ и $K_2: L^2(R^n,dx)\to L^2(\boldsymbol{Y},\tau)$, где $(K_1u)(x)=u(x)$, если $x\in\boldsymbol{X}$, $(K_1u)(x)=0$, если $x\in R^n\setminus\boldsymbol{X}$. K_2 — оператор вида (4) с ядром $\tilde{a}(x)f_2(x,y)$, где $\tilde{a}(x)=a(x)$ при $x\in\boldsymbol{X}$ и $\tilde{a}(x)=0$ при $x\in R^n\setminus\boldsymbol{X}$. Тогда $K=K_2\circ K_1$ и

$$N(K\mid S_q)\leqq N(K_2\mid S_q). \tag{72}$$

Пусть $\mathfrak{T}$ — отображение, действующее по формуле $\mathfrak{T}(b,g)=K$, где K — оператор вида (4) с ядром $b(x)g(x,y)$. Согласно теореме 1 это билинейное отображение действует непрерывно:

$$\mathfrak{T}: L^2\times b_{1x}^{n/2}F\to S_1. \tag{73}$$

Очевидно

$$\mathfrak{T}: L^\infty\times F\to S_2. \tag{74}$$

Будем проводить комплексную интерполяцию между (73) и (74). Согласно [23] $[L^2,L^\infty]_\theta=L^\lambda$, $1/\lambda=(1-\theta)/2$. С другой стороны, используя теорему о кочующих оператор-функциях [15], можно доказать, что $[S_1,S_2]_\theta=S_q$, $1/q=1-\theta/2$. Отсюда, из (73), (74) с помощью комплексной интерполяции [23] и леммы 8, получаем

$$N(\mathfrak{T}(b,g)\mid S_q)\leqq CN(b\mid L^\lambda)N(g\mid b_{qx}^{\alpha}F),\ b\in L^2\cap L^\infty, \tag{75}$$

$$\alpha/n=1/q-1/2=1/\lambda,\quad 1<q<2.$$

Так как пространство $L^2\cap L^\infty$ плотно в L^λ, то оценка (75) позволяет перейти к пределу и продолжить по непрерывности отображение $\mathfrak{T}$ до отображения

$\mathfrak{T}_0$ на всем пространстве $L^\lambda \times b^\alpha_{qx}F$, с сохранением оценки (75). Покажем, что $\mathfrak{T}_0(b, g) = K$. Пусть $b_m \in L^2 \cap L^\infty$ и $b_m \to b$ в L^λ. По определению $\mathfrak{T}(b_m, g) \to \mathfrak{T}_0(b, g)$ в S_q и, тем более, $\mathfrak{T}(b_m, g)u \to \mathfrak{T}_0(b, g)u$ в $L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$, где $u \in L^2$. С другой стороны, так как $1/q' + 1/\lambda + 1/2 = 1 (1/q' = 1 - 1/q)$, то по неравенству Гельдера

$$N(Ku \mid L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)) \leqq N(g \mid L^2_\tau \boldsymbol{Y} L^{q'} R^n) N(b \mid L^\lambda) N(u \mid L^2).$$

Поэтому $\mathfrak{T}(b_m, g)u \to Ku$ в $L^2(\boldsymbol{Y}, \tau)$. Следовательно, $\mathfrak{T}_0(b, g) = K$. Из (71), (72), (75) получаем

$$N(K \mid S_q) \leqq C \,.\, C(\boldsymbol{X}) N(a \mid L^\lambda \boldsymbol{X}) N(f \mid B^\alpha_{qx} G).$$

Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается теорема 3'. Достаточно применить теорему 1' и следующую лемму.

Лемма 10. $b^\alpha_q L^2 \subset [b^{n/2}_1 L^2, L^2]_\theta$, $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\theta}{2}$, $0 < \theta < 1$.

Эта лемма устанавливается так же, как и лемма 8.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим отображение $\mathfrak{T}$, действующее по формуле $\mathfrak{T}(a, f, b) = K$, где K — оператор (7). По теореме 1'

$$\mathfrak{T} : L^2 \times b^{n/2}_1 L^2 \times L^2 \to S_1. \tag{76}$$

Положим $2/\mu_2 = (1/2 - 1/\lambda_1)(1 - 1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)^{-1}$. Так как $\lambda_j > 2$ $(j = 1, 2)$, то $\mu_2 > 2$. Пусть $1/\mu_1 + 1/\mu_2 = 1/2$ и $\theta = (1/2 - 1/\lambda_2)(1/2 - 1/\mu_2)^{-1}$. Тогда $1/\lambda_1 = (1-\theta)/2 + \theta/\mu_1$,

$$1/\lambda_2 = (1-\theta)/2 + \theta/\mu_2, \quad 1/q = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 = 1 - \theta/2, \quad \alpha/n = 1/q - 1/2 = (1-\theta)/2.$$

Можно доказать [8], что

$$\mathfrak{T} : L^{\mu_1} \times L^2 \times L^{\mu_2} \to S_2, \ \ 1/\mu_1 + 1/\mu_2 = 1/2. \tag{77}$$

Из (76), (77) с помощью комплексной интерполяции [23] и леммы 10, учитывая равенства $[L^2, L^{\mu_1}]_\theta = L^{\lambda_1}$, $[L^2, L^{\mu_2}]_\theta = L^{\lambda_2}$ получаем, как и при доказательстве теоремы 3, что $\mathfrak{T} : L^{\lambda_1} \times b^\alpha_q L^2 \times L^{\lambda_2} \to S_q$. Теорема доказана.

3. Полученные оценки S_q-нормы операторов (1) применимы к теории д. о. и. Стильтьеса, в частности, к теории п. д. о. в L^2 [2, 3, 4, 5].

Начнем с теории д. о. и. Напомним постановку задачи [2, 3, 4, 5]. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ — ортогональные спектральные меры в H, определенные на некоторых измеримых пространствах $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ соответственно. Пусть P — ограниченный оператор в H и φ — комплекснозначная функция, определенная на $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Ищутся условия на функцию φ, при которых трансформатор Φ, определенный интегралами вида 2

$$\Phi P = \int_{\boldsymbol{X}} \int_{\boldsymbol{Y}} \varphi(x, y) V(dy) P U(dx) \tag{78}$$

действует непрерывно в пространстве S_q, т. е. $\Phi : S_q \to S_q$. Положим $\|\Phi\|_q = \sup\{N(\Phi P \mid S_q);\ N(P \mid S_q) \leq 1\}$. Отметим, что $\Phi : S_1 \to S_1 \Leftrightarrow \Phi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — пространство всех ограниченных линейных операторов в H. При этом $\|\Phi\|_1 = \|\Phi\|_{\mathfrak{B}}$.

Теорема С [4, 5]. *Трансформатор Φ действует непрерывно из S_1 в S_1 тогда и только тогда, когда для всех мер ϱ, τ, $\varrho(\boldsymbol{X}) = 1$, $\tau(\boldsymbol{Y}) = 1$, подчиненных соответственно мерам U, V, имеет место оценка $N(T \mid S_1) \leq C_\varphi$,* *где T — все операторы вида (1) с ядром $\varphi(x, y)$ и константа C_φ не зависит от мер ϱ и τ. При этом $\|\Phi\|_1 \leqq C_\varphi$. Если $\Phi: S_1 \to S_1$, то $\Phi: S_q \to S_q$ при $q \geqq 1$ и $\|\Phi\|_q \leqq C_q \|\Phi\|_1$.*

Теорема C′ [2,25]. *Пусть $0<q<1$. Если для всех мер $\varrho, \tau, \varrho(\boldsymbol{X})=1$, $\tau(\boldsymbol{Y})=1$, подчиненных соответственно мерам U, V, имеет место оценка $N(T \mid S_q) \leqq C_\varphi$, где T — все операторы вида (1) с ядром $\varphi(x, y)$ и константа C_φ не зависит от мер ϱ и τ, то $\Phi: S_q \to S_q$ и $\|\Phi\|_q \leqq C_\varphi$.*

Из теорем 1, С и теорем 2, С′ вытекают соответственно следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть $\boldsymbol{X} \in \Lambda(R^n)$. Тогда $\|\Phi\|_q \leqq CN(\varphi \mid B_{1x}^{n/2} H)$ при $q \geqq 1$, где пространство H имеет норму $(V) - \sup_{\boldsymbol{Y}}\{\int_{\boldsymbol{X}} |f(x, y)|^2 dx\}^{1/2}$. Если $\boldsymbol{X}=R^n$, то пространство $B_{1x}^{n/2} H$ можно заменить на $b_{1x}^{n/2} H$.*

Предложение 2. *В условиях теоремы 2, $\Phi: S_q \to S_q$ и*

$$\|\Phi\|_q \leqq C_\sigma \,.\, C_\sigma(\boldsymbol{X})\,[\operatorname{mes} \boldsymbol{X}_\sigma]^{1/q-1} N(\varphi \mid B_{qx}^\alpha H),\ 0<q<1, \frac{\alpha}{n}=\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\,.$$

М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк [3, 4, 7] выяснили связь теории п. д. о. с теорией трансформаторов вида (78). Именно, пусть P — ограниченный в L^2 п. д. о. с символом $p(\xi, y)$:

$$(Pu)(y)=(2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-i\xi y} p(\xi, y) \widetilde{u}(\xi) d\xi, \tag{79}$$

где $\widetilde{u}(\xi)=\Omega u(x)$ преобразование Фурье функции $u(x)$. Рассмотрим трансформатор Φ вида (78), где $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}=R^n$, $H=L^2$, проектор $V(\delta)$, $\delta \subset R^n$ определяется как оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_\delta(x)$ борелевского множества δ и спектральная мера U получается из V преобразованием Фурье: $\widetilde{U(\delta)}u(\xi)=\chi_\delta(\xi)\widetilde{u}(\xi)$. Тогда, если $\Phi: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, то ограниченный в L^2 оператор ΦP может быть записан в виде

$$(\Phi Pu)(y)=(2\pi)^{-n2} \int_{Rn} e^{-i\xi y} \varphi(\xi, y) p(\xi, y) \widetilde{u}(\xi) d\xi$$

и, следовательно, является п. д. о. с символом $\varphi(\xi, y)\, p(\xi, y)$.

Из предложения 1 получаем

Следствие. *Если $p(\xi, y)$ — символ ограниченного в L^2 п. д. о. вида (79) и $\varphi(\xi, y) \in b_{1\xi}^{n/2} L_y^\infty R^n L_\xi^2 R^n$, то п. д. о. Q с символом $p(\xi, y)\varphi(\xi, y)$ ограничен в L^2 и $\|Q\| \leqq CN(\varphi \mid b_{1\xi}^{n/2} L_y^\infty R^n L_\xi^2 R^n)\|P\|$. В частности, ограничен п. д. о. с символом $\varphi(\xi, y)$. Результат сохранится, если поменять ролями переменные ξ и y.*

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Халмош. Теория меры. Москва, 1951.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Двойные операторные интегралы Стильтьеса. Проблемы математической физики, Ленинград, 1966, 33—67.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Двойные операторные интегралы Стильтьеса. II. Проблемы математической физики, Ленинград, 1967, 26—59.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Замечание о ядерности интегральных операторов и об ограниченности псевдодифференциальных операторов. *Известия высш. учебн. заведений. Математика*, 9, 1969, 11—17.

5. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Двойные операторные интегралы Стильтьеса. III. Предельный переход под знаком интеграла. Проблемы математической физики, Ленинград, 1973, 27—53.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Об оценке сингулярных чисел интегральных операторов I. *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1967, 7, 43—53.
7. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Об оценке сингулярных чисел интегральных операторов II. *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1967, 13, 21—28.
8. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Об оценке сингулярных чисел интегральных операторов III. Операторы в неограниченных областях. *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1969, 1, 35—48.
9. Г. Е. Караджов. О применении теории интерполяционных пространств к оценкам сингулярных чисел интегральных операторов. Проблемы математического анализа, Ленинград, 1973, 37—45.
10. Г. Е. Караджов. Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов. *Годишник на ВТУЗ, Математика*, 11, 1975, № 2.
11. Г. Е. Караджов. О продолжении функций пространств Бесова. *Доклады БАН*, 27, 1974, № 5, 603—606.
12. I. L. Lions, I. Peetre. Sur une classe d'éspaces d'interpolation. *Publ. Math. de l'IHES* 19, 1964, 5—68.
13. Г. Е. Караджов. Об интерполяционном методе „средних" для квазинормированных пространств. *Известия Мат. инст. БАН*, 15, 1974, 192—207.
14. О. В. Бесов. Оценки на областях модулей гладкости функций и теоремы вложения. *Труды Мат. ин-та АН СССР*, 117, 1972, 22—46.
15. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Москва, 1965.
16. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
17. P. Krée. Interpolation d'éspaces vectoriels, qui ne sont ni normès, ni complets ; applications. *Ann. Inst. Fourier*, 17, 1968, No. 2, 137—174.
18. Г. Е. Караджов. О квазинормированных и p-нормированных решетках измеримых функций. *Годишник на ВТУЗ, Математика*, 9, 1973, № 4, 31—41.
19. I. Peetre. On interpolation of L_p spaces with weight functions. *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), 28, 1967, No 1, 61—70.
20. I. Gilbèrt. Interpolation between weighted L_p-spaces. *Ark. Mat.*, 10, 1972, No 2, 235—249.
21. A. Beurling. Construction and analysis of some convolution algebras. *Ann. Inst. Foureir*, 14, 1964, № 2, 1—32.
22. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, 1969.
23. А. П. Кальдерон. Промежуточные пространства и интерполяция. Комплексный метод. *Сб. переводы Математика*, 9, 1965, 3, 56—129.
24. T. Holmstedt. Interpolation of quasi-normed spaces. *Math. Scand.*, 26, 1970, 177—199.
25. С. Ю. Ротфельд. О сингулярных числах суммы вполне непрерывных операторов. Проблемы математической физики, Ленинград, 1968, 81—87.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 19. 1. 1976; в переработанном виде 10. 12. 1976