Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ПОЛНЫХ 6-ДУГАХ В ДЕЗАРГОВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

НИКОЛА Й. МАРТИНОВ, ЧАВДАР Г. ЛОЗАНОВ

Рассматриваются полные 6-дуги в дезарговых проективных плоскостях. Синтетическими методами найдены все такие дуги. Если изоморфные дуги считать тождественными, то в проективной плоскости порядка 7 существуют две, а в проективных плоскостях порядка 8 и 9 одна полная дуга.

Понятие k-дуги является обобщением понятия кривой второй степени в конечной проективной плоскости. Некоторые общие свойства k-дуг описаны в [1 — 4]. Особенно интересным является вопрос о характеризации полных k-дуг, который решен только в некоторых изолированных случаях.

В настоящей работе описаны некоторые общие свойства полных 6-дуг в произвольной проективной плоскости. Синтетическими методами получены все такие дуги в случае дезарговой плоскости. Здесь даны полные доказательства результатов из [6].

Пусть π_n конечная проективная плоскость порядка n. Совокупность $C_{k,n}$ k-точек $(3\leq k\leq n+2)$, никакие три из которых не коллинеарны, называется k-дугой в π_n. Прямые, которые содержат 2, 1 и 0 точек $C_{k,n}$, называются, соответственно, секущими, касательными и внешними прямыми $C_{k,n}$. Если $C_{k,n}$ не содержится в никакой $(k+1)$-дуге, она называется полной k-дугой. Очевидно $C_{k,n}$ полная тогда и только тогда, когда через каждую точку π_n проходит секущая $C_{k,n}$. Если две дуги соответственны при коллинеации, их будем называть изоморфными, а если они соответственные при проективной коллинеации (коллинеация, которая является произведением гомологий), будем называть их эквивалентными. Здесь будем искать неэквивалентные полные 6 дуги.

Пусть M точка π_n и $M\notin C_{k,n}$. Через $s(M)$ обозначим число секущих через M. Обозначим еще:

$$S_i=S_i(C_{k,n})=\{M:M\notin C_{k,n},\ s(M)=i\},\ \ s_i=s_i(C_{k,n})=|S_i|.$$

Числа $s_i(C_{6,n})$ можно легко получить, пользуясь формулами [3, 3.2 (29)], но здесь мы получим их непосредственно при помощи метода, который понадобится в дальнейшем.

Имея в виду, что $0\leq s(M)\leq[k/2]$, получаем, что $s_i=0$, когда $i>m=[k/2]$ и

$$\sum_0^m s_i=n^2+n+1-k. \tag{1}$$

Очевидно для совокупности L_k секущих $C_{k,n}$ имеем

$$|L_k|=k(k-1)/2. \tag{2}$$

0.1. Пусть $k=4$. Тогда $|L_k|=6$ и $m=2$. $S_2(C_{4,n})$ состоит из диагональных точек четырехугольника $C_{4,n}$, откуда $s_2(C_{4,n})=3$. Каждая прямая из L_4 содержит две точки из $C_{4,n}$ и одну из $S_2(C_{4,n})$. Следовательно $s_1(C_{4,n})=6(n-2)$. Отсюда и (1) получаем $s_0(C_{4,n})=n^2-5n+6$.

0.2. Пусть $k=5$. Тогда $|L_k|=10$ и $m=2$. Пусть $M\in C_{5,n}$ и $C_{4,n}=C_{5,n}\setminus\{M\}$. Тогда $S_2(C_{5,n})=S_2(C_{4,n})+S'$, где S' совокупность точек пересечения секущих $C_{5,n}$ через M с секущими $C_{4,n}$. Если $N\in C_{4,n}$, три секущие $C_{4,n}$ (которые не проходят через N) пересекают MN в трех различных точках $(m=2)$. Так получаем $|S'|=12$, откуда

(3)
$$s_2(C_{5,n})=3+12=15.$$

На произвольной секущей $C_{5,n}$ (как на MN) лежат три точки из $S_2(C_{5,n})$ и две точки из $C_{5,n}$. Следовательно

(4)
$$s_1(C_{5,n})=10\,(n-4).$$

Отсюда и из (1), (2), (3) получаем

(5)
$$s_0(C_{5,n})=n^2-9n+21.$$

Так как $n^2-9n+21>0$ для каждого $n\geq 2$, то $S_0(C_{5,n})\neq\varnothing$, и получаем известный результат, что не существуют полные 5-дуги.

0.3. Пусть $k=6$. Из (1) и (2) получаем $m=3$ $|L_6|=15$. Пусть $M\in C_{6,n}$ и $C_{5,n}=C_{6,n}\setminus\{M\}$. Обозначим через A_i $(i=1,\ldots,5)$ остальные точки $C_{6,n}$ и еще $l_i=MA_i$ $(i=1,\ldots,5)$

$$p_i=|S_2(C_{5,n})\cap l_i|,\ q_i=|S_1(C_{5,n})\cap l_i|,\ r_i=|S_0(C_{5,n})\cap l_i|.$$

Тогда выполняются

(6)
$$\begin{aligned} s_3(C_{6,n})&=\sum_1^5 p_i\\ s_2(C_{6,n})&=s_2(C_{5,n})+\sum_1^5 q_i+\sum_1^5 p_i\\ s_1(C_{6,n})&=s_1(C_{5,n})+\sum_1^5 r_i+\sum_1^5 q_i.\end{aligned}$$

С другой стороны, имея в виду, что на l_i есть $(n-1)$ точек, которые не принадлежат $C_{6,n}$, и что стороны четырехугольника $C_{6,n}\setminus\{M,A_i\}$ пересекают прямую l_i в двух точках из $S_2(C_{5,n})$ и в одной из $S_1(C_{5,n})$, получаем $p_i+q_i+r_i=n-1$, $2p_i+q_i=6$. Отсюда находим

(7)
$$s_3=\sum_1^5 p_i\leq 15,\ \sum_1^5 q_i=30-2\sum_1^5 p_i,\ \sum_1^5 r_i=5n-35+\sum_1^5 p_i$$

и имея в виду (6), получаем $s_1(C_{6,n})=15n-105+3s_3(C_{6,n})$, $s_2(C_{6,n})=45-3s_3(C_{6,n})$. Из этих равенств и (1) получаем

(8)
$$s_3(C_{6,n})=n^2-14n+55-s_0(C_{6,n}).$$

Совокупность пяти чисел p_i для точки M обозначим через P_M и $p_M=\Sigma_1^5 p_i$. Из (8) получаем

Теорема 1. *Для каждой 6-дуги $C_{6,n}$ и точки $M\in C_{6,n}$*

$$s_3(C_{6,n})=p_M\leq n^2-14n+55,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $C_{6,n}$ полная дуга.

Из этой теоремы и из (7) получаем, что когда $n>10$, в π_n не существуют полные 6-дуги, что известно из [1]. Следовательно полные 6-дуги могут существовать только в проективной плоскости π_n, для которой $4\leq n\leq 10$.

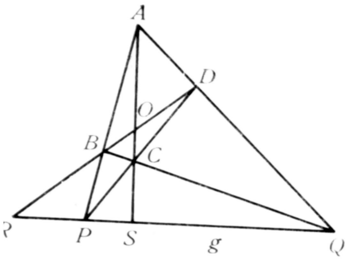

Рис. 1

Для чисел $p_i \in P_M$ имеем $0\leq p_i\leq 3$. Когда $p_i\geq 2$, секущую l_i называем диаметром $C_{6,n}$. Если $C_{6,n}$ полная дуга, так как $p_M=(n-7)^2+6\geq 6$, по крайней мере одно из чисел P_M больше 1, откуда получаем

Следствие 1. *Через каждую точку полной 6-дуги проходит по крайней мере один диаметр.*

Как известно [3], не существует проективной плоскости порядка $n=6$, а если $n=4$, 5, 7, 8, плоскость дезаргова.

Пусть $n=4$ или $n=5$. Так как каждая 5-дуга неполная, а в рассматриваемых случаях ввиду (5) $s_0(C_{5,n})=1$, то $C_{5,n}$ можно единственным образом расширить до 6-дуги, и эта дуга полная. Так получаем известный результат, что в π_4 и π_5 каждая 6-дуга полная и других полных дуг нет.

Далее рассмотрим существенные случаи, когда $n>5$.

1. *Пусть $n=7$.*

Пусть C_6 полная в π_7. Из теоремы 1 получаем $s_3(C_{6,7})=p_M=6$.

Так как в π_7 диагональные точки каждого четырехугольника не коллинеарны, то для каждой $M\in C_6$, $3\notin P_M$ и, следовательно, имеем следующие возможности:

а) $P_M=\{1, 1, 1, 1, 2\}$; б) $P_M=\{0, 0, 2, 2, 2\}$; в) $P_M=\{0, 1, 1, 2, 2\}$.

Будем говорить, что точка M соответственно типа а), б) или в).

Пусть $C_6=\{A, B, C, D, M, N\}$ и $g=MN$ диаметр. Тогда g диагональная прямая четырехугольника $ABCD$. Так как π_7 — дезаргова, существует проективная коллинеация, отображающая произвольный четырехугольник и его диагональную прямую в $ABCD$ и g. Имея в виду следствие 1, получаем, что для каждой полной 6-дуги C_6^* в π_7 существует проективная коллинеация ω такая, что $(C_6^*)\omega$ содержит $ABCD$ и g ее диаметр. Следовательно в π_7 каждая полная 6-дуга эквивалентна полной 6-дуге, проходящей через точки A, B, C, D, для которой g — диаметр.

Фиксируем в плоскости π_7 четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не коллинеарны. Обозначим $P=AB\cap CD$, $Q=CB\cap DA$, $g=PQ$, $O=AC\cap BD$, $R=BD\cap g$, $S=AC\cap g$ (рис. 1). Рассмотрим гомологии:

$$\varphi:\begin{cases}\text{центр } P\\ \text{ось } OQ,\\ A\to B\end{cases}\quad \varphi_1:\begin{cases}\text{центр } S\\ \text{ось } BD,\\ A\to C\end{cases}\quad \overline{\varphi}_1:\begin{cases}\text{центр } R\\ \text{ось } AC\\ B\to D\end{cases}$$

и проективную коллинеацию $\varphi_2=\varphi\varphi_1$. Эти коллинеации отображают четверку $\{A, B, C, D\}$ в себя и трансформируют различным образом точки g вне четырехугольника $ABCD$. Если $M\in g$ и $M\neq P, Q, R, S$, то остальные четыре точки на g будут M, $M'=(M)_\varphi$, $M_1=(M)_{\varphi_1}$, $M_2=(M)_{\varphi_2}$. Следовательно, если в π_7 существуют полные 6-дуги, они эквиваленты с некоторой из следующих 6 дуг

$$C=\{A, B, \ldots, M, M'\},\ C^1=\{A, B, \ldots, M, M_1\},\ C^2=\{A, B, \ldots, M, M_2\}.$$

Пусть C_0 коническое сечение, которое содержит A, B, C, D, M. Тогда OPQ полярный треугольник C_0 и, следовательно, $g Z M$ секущая C_0. Отсюда M' вторая точка пересечения g, т. е. $C\subset C_0$.

Так как C_0 единственное коническое сечение через A, B, C, D, M, то C^1 и C^2 не являются его подмножествами. Кроме того, в π_7 нет полных 7-дуг, а конические сечения — единственные полные 8-дуги [1].

Докажем, что C^1 и C^2 неизоморфны и неэквивалентны.

1.1. Рассмотрим C^1. Имея в виду, что φ_1 и $\overline{\varphi}_1$ — инволюторные гомологии с осями BD и AC и что $M_1=(M)_{\varphi_1}$, получаем, что секущие MA и M_1C; M_1A и MC, как соответствующие при φ_1, пересекаются на BD. Аналогично MB и M_1D; M_1B и MD, как соответствующие при $\overline{\varphi}_1$, пересекаются на AC (рис. 2а). Таким образом каждая из секущих MA, MB, MC, MD, M_1A, M_1B, M_1C, M_1D содержит по крайней мере одну точку из $S_3(C_1)$ и, следовательно, M и M_1 типа а).

1.2. Рассмотрим C^2. Имея в виду, что коллинеация φ_2 индуцирует инволюцию на g, получаем

$$MA\overset{\varphi_2}{\to}M_2B\overset{\varphi_2}{\to}MC\overset{\varphi_2}{\to}M_2D;\quad MB\overset{\varphi_2}{\to}M_2C\overset{\varphi_2}{\to}MD\overset{\varphi_2}{\to}M_2A.$$

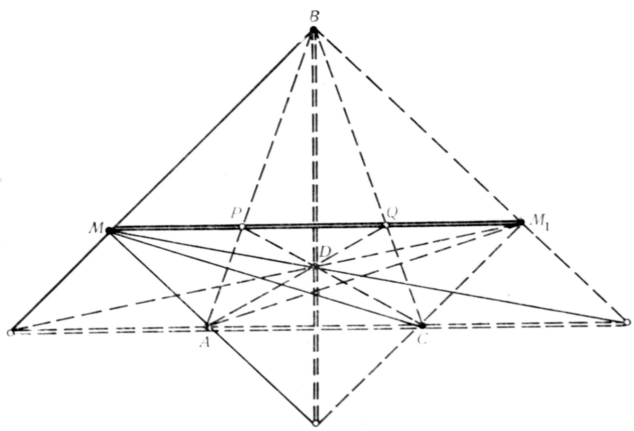

Рис. 2а

Следовательно $|MA\cap S_3|=|MC\cap S_3|$ и $|MB\cap S_3|=|MD\cap S_3|$.

Так как C^2 — полная дуга, без ограничения общности можем предположить, что $|MA\cap S_3|>0$. Тогда или $MA Z BD\cap CM_2$, или $MA Z BC\cap DM_2$, или $MA Z CD\cap BM_2$.

Если бы $MA\cap BD\cap CM_2=X$, то $(X)_{\varphi^2}=MC\cap BD\cap AM_2=Y$, и получаем противоречие $(M)_{\varphi_1}=M_2$. Остальные две возможности выполняются одновременно, потому что $\{MA, BC, DM_2\}\xrightarrow{\varphi_2}\{M_2B, CD, AM\}$. Так $|MA\cap S_8|=|MC\cap S_3|$ (рис. 2 б). Следовательно, сейчас точки M и $M_2=(M)_{\varphi_2}$ — типа б).

Имея в виду, что M произвольная точка C_6, из 1.1 и 1.2 получаем, что полная 6-дуга в π_7 не имеет точек типа в).

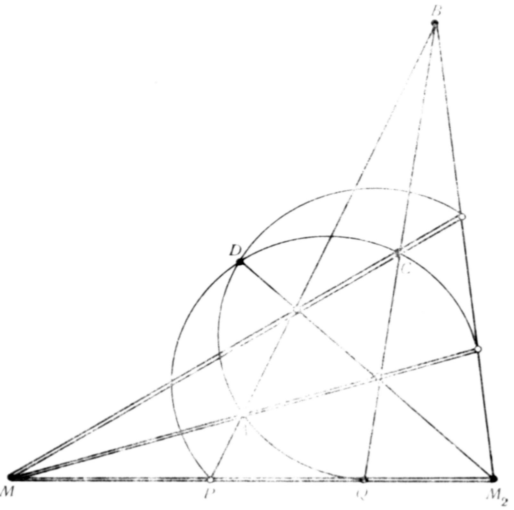

Рис. 2б

В случае 1.1 через через каждую точку C^1 проходит секущая, на которой есть точка из $S_3(C^1)$, и получаем, что каждая точка типа а). Имея в виду только что доказанное, получаем, что все точки полной 6-дуги в π_7 типа а) или типа б). Так получаем, что полные 6-дуги C^1 и C^2 в π_7 неизоморфны (и неэквивалентны), так как каждая коллинеация в π_7 сохраняет расположение из $S_3(C^1)$ и $S_3(C^2)$. Отсюда следует

Теорема 2. *В π_7 существуют ровно две неизоморфные полные 6-дуги и каждая другая полная 6-дуга эквивалентна одной из них. Через каждую точку C^1 проходит точно один диаметр, а через каждую точку C^2 точно три диаметра.*

Эта теорема является уточнением результата в [1], где найдены 4 разные полные 6-дуги в π_7.

На рис. 2 а показана дуга C^1 вместе с ее секущими, диаметрами и совокупностью $S_3(C^1)$. На рис. 2 б показаны только диаметры C^2 вместе с совокупностью $S_3(C^2)$. Легко сообразить, что $S_3(C^1)$ и $S_3(C^2)$ являются полными 6-дугами, соответственно типа а) и б). Из разных геометрических свойств этих полных дуг укажем только то, что с C^2 связана конфигурация 8_3, если исключим один диаметр, то остальные диаметры вместе с точками C^2 и $S_3(C^2)$ (рис. 2 б) образуют эту конфигурацию.

2. *Пусть* $n=8$.

Пусть C_6 полная дуга в π_8. Из теоремы 1 получаем

$$s_3(C_{6,8})=p_M=7.$$

Так как в π_8 диагональные точки каждого четырехугольника коллинеарны, то для каждой точки $M\in C_6$, $2\notin P_M$. Отсюда получаем следующие возможности для P_M:

а) $P_M=\{1, 1, 1, 1, 3\}$; б) $P_M=\{0, 0, 1, 3, 3\}$.

Допустим, что для полной дуги C_6^* имеет место б). Тогда на одной секущей MN лежит одна точка из S_3 (а на двух — три точки из S_3). Следовательно на каждой секущей через N лежат не более двух точек из S_3, т. е. через N не проходит диаметр C_6^*. Это противоречит следствию 1 и исключает возможность б). Отсюда получаем

2.1. Если C_6 полная дуга в π_8, то через каждую ее точку проходит единственный диаметр.

Таким образом для каждой точки C_6 существует другая, ей диаметрально противоположная. Пусть $C_6 = \{A, \ldots, F\}$ и AB, CD, EF ее диаметры. Докажем

2.2. Три диаметра C_6 проходят через одну точку из $S_3(C_6)$, которую будем называть центром C_6. Имея в виду, что на каждом диаметре есть 3 различные точки из $S_3(C_6)$, если допустим, что диаметры пересекаются в точках не из S_3, получаем противоречие $S_3 = 9$. Таким образом, по крайней мере два диаметра пересекаются в точке из S_3. Без ограничения общности предположим, что $AB \cap CD = Z \in S_3$. Так как через Z проходят три секущие, две из которых AB и CD, то третьей может быть только EF. Следовательно через Z проходят три диаметра C_6. Докажем еще и

2.3. Если AB и CD два диаметра C_6, то существует проективная коллинеация ψ, для которой $(C_6)_\psi = C_6$ и $(A, B)_\psi = C, D$.

Пусть $AB \cap CD = Z$, $AC \cap BD = X$ и $AD \cap BC = Y$. Очевидно X, Y и Z лежат на диаметре EF. Пусть ψ инволюторная гомология с центром X и осью XZ и $(A)\psi = C$. Тогда $(B)_\psi = D$, а $(E, F)_\psi = E, F$, так как E, F лежат на оси XZ.

Таким образом, каждую двойку диаметрально противоположных точек можно отобразить в каждую другую двойку диаметрально противоположных точек посредством такой проективной коллинеации χ, что $(C_6)_\chi = C_6$. Пусть χ такая, что $(E, F)_\chi = F, E$. Тогда χ индуцирует на диаметре EF инволюцию с центром Z и сопряженными точками E, F и X, Y. Так получаем

2.4. Каждые две диаметрально противоположные точки C_6 сопряжены относительно инволюции с центром — центр C_6 и отображающая остальные две точки из S_3 на этом диаметре одну в другую.

Пусть A, B, C, D вершины четырехугольника в π_8 с диагональными точками $P_1 = AB \cap CD$, $P_2 = AC \cap BD$, $P_3 = AD \cap BC$ и диагональной прямой $g = P_1P_2P_3$. Так как π_8 дезаргова, то существует проективная коллинеация, которая отображает произвольный четырехугольник в четырехугольник $ABCD$. Отсюда:

2.5. Если C_6 полная дуга в π_8, она эквивалентна полной дуге, проходящей через A, B, C, D, для которой g — диаметр.

Чтобы определить полные 6-дуги, содержащие A, B, C, D с диаметром g, рассмотрим следующие гомологии

$$\varphi_1 : \begin{cases} \text{центр } P_1 \\ \text{ось } AB \\ C \to D \end{cases}, \quad \varphi_2 : \begin{cases} \text{центр } P_2 \\ \text{ось } AC \\ B \to D \end{cases}, \quad \varphi_3 : \begin{cases} \text{центр } P_3 \\ \text{ось } BC \\ A \to D \end{cases}.$$

Очевидно они инволюционны и индуцируют на g инволюции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно с центрами P_1, P_2 и P_3, которые отображают тройку $\{P_1, P_2, P_3\}$ в себя. Имея в виду, что $\omega_1\omega_2\omega_3 = \omega_2$, получаем, что $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 = \omega_2\omega_3$ и $\omega_5 = \omega_3\omega_2$ отображают точки g, различные от P_1, P_2 и P_3, различным образом. Тогда проективные коллинеации $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 = \varphi_2\varphi_3$ и $\varphi_5 = \varphi_3\varphi_2$ отображают четверку $\{A, B, C, D\}$ в себя и произвольную фиксированную точку $M \in g$, $M \neq P_1, P_2, P_3$ в остальные точки g. Пусть $M_i = (M)_{\varphi_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Так получаем 6-дуги C_6^i

$$C_6^i = \{A, B, C, D, M, M_i\}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, 5,$$

между которыми находятся искомые полные 6-дуги. Так как ни одна из M_4 и M_5 не является соответственной M при инволюции, сохраняющей $\{P_1, P_2, P_3\}$, то из 2.4 следует, что дуги C_6^4 и C_6^5 не являются полными. Докажем

2.6. Дуги C_6^i, $i=1, 2, 3$ полные.

Так как на секущей $g=MM_i$ лежат три точки из $S_3(C_6^i)$, то по теореме 1 достаточно доказать, что на каждой из секущих M_iA, M_iB, M_iC, M_iD есть по крайней мере одна точка из $S_3(C_6^i)$. Обозначим через B_1 произвольную точку из A, B, C, D, а через B_2 ту, которая лежит на секущей B_1P_i и B_3, B_4, остальные две точки из A, B, C, D. Пусть φ элация с осью B_3B_4, которая индуцирует на g инволюцию ω_i. Так как P_1, P_2, P_3 диагональные точки четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$ и они отображаются в себя при ω_i, то B_1 и B_2 сопряжены при φ. Следовательно $(M_iB_1)_\varphi=MB_2$ и $M_iB_1\cap MB_2=T\angle B_3B_4$. Тогда $T\in S_3(C_6^i)$ и по теореме 1 получаем, что C_6^i, $i=1, 2, 3$ полные дуги в π_8. Для этих дуг докажем

2.7. Дуги C_6^i, $i=1, 2, 3$ не эквивалентны.

Пусть C_6^j и C_6^k две из этих дуг. Если допустим, что они эквивалентны, то из 2.3 следует, что существует проективная коллинеация ψ, для которой $(M)_\psi=M$ и $(C_6^j)_\psi=C_6^k$. Очевидно $(M, P_j, M_j)_\psi=M, P_k, M_k$. Кроме того, $[\{A, B, C, D\}]_\psi=\{A, B, C, D\}$ и, следовательно, $[\{P_1, P_2, P_3\}]_\psi=\{P_1, P_2, P_3\}$. Пусть ψ индуцирует проективность ω на g. Тогда $(M)_\omega=M$ и $[\{P_1, P_2, P_3\}]_\omega=\{P_1, P_2, P_3\}$ и, следовательно, ω является идентитетом в g. С другой стороны, $(M_j)_\omega=M_k\neq M_j$. Это противоречие доказывает, что дуги C_6^j и C_6^k не эквивалентны

Докажем, однако,

2.8. Дуги C_6^i, $i=1, 2, 3$ изоморфны.

Так как поле $GF\ (8)$, над которым построена плоскость π_8, содержит нетождественные автоморфизмы, то в π_8 существует коллинеация τ, не являющаяся идентитетом, которая оставляет на месте все точки подплоскости $\pi_2=\{A,B, C, D, P_1, P_2, P_3\}$. Пусть $(M)_\tau=M_i$. Для некоторого φ_j, $(M_i)_{\tau_j}=M$. Тогда для $\sigma=\tau\varphi_j$ имеем $(M)_\sigma=M$, $[\{A, B, C, D\}]_\sigma=\{A, B, C, D\}$, $[\{P_1, P_2, P_3\}]_\sigma=\{P_1, P_2, P_3\}$. Так как коллинеация отображает полную дугу в полную дугу, то $[\{M_1, M_2, M_3\}]_\sigma=\{M_1, M_2, M_3\}$. Допустим, что $(M_i)_\sigma=M_i$ для некоторого $i=1, 2, 3$. Тогда $\sigma^2=1$ и σ — инволюция. Но по известной теореме Бэра σ — элация, что невозможно, так как σ оставляет на месте по крайней мере одну из точек $\{A, B, C, D\}$. Следовательно $(M_i)_\sigma\neq M_i$ $(i=1, 2, 3)$. Отсюда видно, что σ отображает дуги C_6^i одну в другую, что доказывает их изморофности. Таким образом доказана

Теорема 3. *В π_8 существуют ровно три неэквивалентные, но изоморфные полные 6-дуги.*

Эта теорема является уточнением результата в [5], где синтетическими методами найдены 45 таких дуг, связанных с коническим сечением в плоскости. Наш результат совпадает с результатом в [2], где тоже получены 3 неэквивалентные, но изоморфные полные 6-дуги другими методами.

3. *Пусть $n=9$ и π_9 — дезаргова.*

Пусть C_6 полная дуга в π_9. Из теоремы 1 получаем $s_3(C_{6,9})=p_M=10$. Так как в π_9 диагональные точки каждого четырехугольника не коллинеарны, то для каждой точки $M\in C_{6,9}$, $3\notin P_M$ и, следовательно, имеем единственную возможность $P_M=\{2, 2, 2, 2, 2\}$.

Так получаем:

3.1. Каждая секущая C_6 диаметр, т. е. на каждой секущей C_6 лежат точно две точки из $S_3(C_6)$.

Точки S_3, лежащие на одном диаметре, будем называть соседними. Следовательно, каждая точка из S_3 имеет точно три соседних. Докажем

3.2. Совокупность $S_3(C_6)$ — коническое сечение.

Пусть P и Q две произвольные несоседние точки из S_3, $C_6=\{A, B, C, D, E, F\}$. Без ограничения общности предполагаем: $P \mathrm{Z} AB, CD, EF$ и $Q \mathrm{Z} AC, BE, DF$. Пусть еще $X=AB\cap DF$, $Y=CD\cap BE$, $Z=AC\cap EF$ (рис. 3). Сперва докажем:

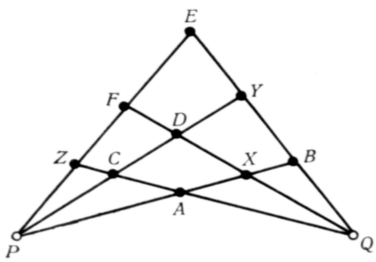

Рис. 3

3.2.1. Для каждой пары несоседних точек из S_3 существует точно одна точка из S_3, соседняя с обеими, т. е. докажем, что точно одна из точек X, Y и Z принадлежит S_3.

Пусть $Y\notin S_3$ и $Z\notin S_3$, т. е. $AF\neg \mathrm{Z} Y$ и $BD\neg \mathrm{Z}$. Тогда $L=AC\cap BD\neg \mathrm{Z} EF$ и гомология χ с центром L, осью EF и переводящая A в C является инволюционной гомологией, для которой $(AF, BE, CD)_\chi=CF, DE, AB$. Но $AF\neg \mathrm{Z} CD\cap BE$, откуда $CF\cap DE\neg \mathrm{Z}\, AB$ и по 3.1. $EC\cap DE \mathrm{Z} AB$, т. е. $x\in S_3$. Такмы получили, что для каждой пары несоседних точек из S_3 существует точно одна соседняя с обеими.

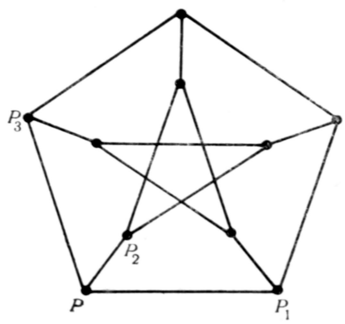

Рис. 4

Обозначим через P_1, P_2, P_3 точки, соседние P_3. Остальные точки S_3 соседние с P_1, P_2 или P_3. Но каждая из P_1, P_2, P_3 кроме P имеет еще две соседние. Следовательно для P и $T\in S_3\setminus\{P_1\ P_2,\ P_3\}$ есть точно одна соседняя с обеими. Отсюда получаем, что точки S_3 вместе с определенным таким образом соседством образуют граф Петерсена (рис. 4).

Теперь докажем:

3.2.2. Для каждого $P\in S_3$ существует проективная коллинеация с периодом 3 и двойной точкой P, отображающая C_6 и S_3 в себя (ротация с центром P), и для каждого $A\in C_6$ существует проективная коллинеация с периодом 5 и двойной точкой A (симметрия с центром A).

Пусть $P\in S_3$ и P_1, P_2, P_3 ее соседние, притом A, $B \mathrm{Z} PP_1$, $C_1D \mathrm{Z} PP_2$ и E, $F \mathrm{Z} PP_3$. Без ограничения общности предположим, что $L_1=AE\cap BF$, $L_1\neg \mathrm{Z} PP_2$ и $L_2=CE\cap DF$, $L_2\neg \mathrm{Z} PP_2$. Очевидно по 3.1 $M_1=BF\cap CD$, $M_1\neg \mathrm{Z} AE$. Тогда гомологии

$$\varphi_1\begin{cases}\text{центр } L_1\\ \text{ось } PP_1,\\ A\to E\end{cases}\quad \varphi_2:\begin{cases}\text{центр } L_2\\ \text{ось } PP_2\ ,\\ C\to E\end{cases}\quad \psi_1:\begin{cases}\text{центр } M_1\\ \text{ось } AB\ \ ,\\ C\to E\end{cases}\quad \psi_2:\begin{cases}\text{центр } L_2\\ \text{ось } AE\\ C\to D\end{cases}$$

инволюционны и отображают C_6 и S_3 в себя.

Коллинеация $\varphi_P = \varphi_1\varphi_2$ оставляет на месте P, имеет период 3 и $(P_1, P_2, P_3)_{\varphi_P} = P_2, P_3, P_1$, а коллинеация $\psi_A = \psi_1\psi_2$ оставляет на месте A и имеет период 5.

Наконец покажем

3.2.3. Каждые три точки из S_3 не коллинеарны.

Имея в виду 3.1., достаточно показать, что для произвольных несоседних P и Q на $g = PQ$ не лежит другая точка из S_3.

Пусть $R \in S_3$ и $R Z g$, R не соседняя P и Q:

а) Существует $M \in S_3$, соседняя P, Q и R. Тогда при ротации φ_M с центром M имеем $(g)_{\varphi_M} = g$. Следовательно $M Z g$, что противоречит 3.1.

б) Не существует точки из S_3, соседней одновременно P, Q и R. Тогда по 3.2.1. (рис. 4) существует точно одна точка N из S_3, которая не соседняя P, Q и R. Если $(g)_{\varphi_N} = g$, то $N Z g$ и на g будут лежать четыре точки из S_3. Тогда при симметрии ψ_A или $(g)_{\psi_A} = g$ или $(g)_{\psi_A} \neq g$. Но оба случая невозможны, так как в первом случае получаем, что на g лежат пять точек из S_3, а во втором, что $s_3(C_6) > 10$.

Если теперь $(g)_{\varphi_N} = g_1 \neq g$, то $g \cap g_1 \notin \{P, Q, R\}$ и тогда $(g_1)_{\varphi_N} = g$. Но это невозможно, так как φ_N имеет период 3.

Эти противоречия доказывают 3.2.3. Отсюда получаем, что $S_3(C_6)$ коническое сечение.

3.3. Пусть θ — коническое сечение, а ω — полярная корреляция для θ и $S_5 = S_5(\theta)$, $S_4 = S_4(\theta)$. Легко сообразить, что

3.3.1. $$|S_4 \cap l| = |S_5 \cap l| = \begin{cases} 4 \text{ — если } l \text{ секущая } \theta \\ 5 \text{ — если } l \text{ внешняя для } \theta. \end{cases}$$

Докажем

3.3.2. Пара сопряженных относительно θ точек будут одновременно точки из S_5 или S_4 тогда и только тогда, когда их соединительная прямая является секущей θ.

Пусть $M \notin \theta$ и $m = (M)_\omega$, $L Z m$ и $l = ML$. Инволюционная гомология, оставляющая θ на месте с центром M и осью m, отображает $\{S_5 \cap l\}$ в себя, и по 3.3.1 точек $\{S_5 \cap l\}$, не остающихся на месте, будет 2 или 4, что доказывает 3.3.2.

3.3.3. Пусть $A \in S_5$, $a = (A)_\omega$, l_0 и l' секущие θ через A и φ_0, φ' инволюционные гомологии, отображающие θ в себя, с осями l_0 и l' и центрами $L_0 = (l_0)_\omega$ и $L' = (l')_\omega$. Докажем, что проективная коллинеация $\psi = \varphi_0\varphi'$ имеет период 5.

Коллинеации φ_0, φ', ψ отображают θ, S_5, S_4, a и A в себя. Достаточно показать, что ψ не имеет инвариантных точек на a, так как из 3.3.1 имеем, что $|S_5 \cap a| = 6$ и $|S_4 \cap a| = 5$. Допустим, что $M Z a$, $(M)_\psi = M$. Тогда, если $N = (M)_{\varphi_0}$, то $(N)_\psi = N \neq M$. Но M и N принадлежат одновременно S_5 или S_4 и тогда ψ индуцирует на a гиперболическую проективность периода 3. Но в π_9 таких нет и, следовательно, на a нет инвариантных точек.

3.3.4. Пусть $A \in S_5$, l секущая θ через A, $a = (A)_\omega$, $L = (l)_\omega$, $B Z l$, $B \in S_5$, $M Z a$, $M \in S_4$, $M \neg Z l$. Докажем, что BM секущая.

Пусть $B' \in S_5$, $B' Z l$, $B' \neq A$, $a \cap l$. Обозначим через α инволюционную гомологию с центром A и осью a, которая отображает θ в себя. Так как $|S_5 \cap l| = 4$ то $(B)_\alpha = B'$. Тогда, если $B'M$ секущая, то и BM секущая.

Пусть $B'M$ не является секущей. Пусть еще $m=(M)_\omega$, а ω_l и ω_m — инволюции сопряженных точек на l и m, и $\tau = l \overset{M}{\overline{\wedge}} m$, $\varphi = \tau^{-1}\omega_l\tau$. Очевидно φ инволюция на m различная от ω_m и только $(A, a \cap m)_\varphi = (A, a \cap m)_{\omega_m}$. Для точки $C = B'M \cap m$ из 3.3.2 имеем $C \in S_5$ и $C \neq A, m \cap a$. Тогда $(C)_\varphi = C' \in S_4$.

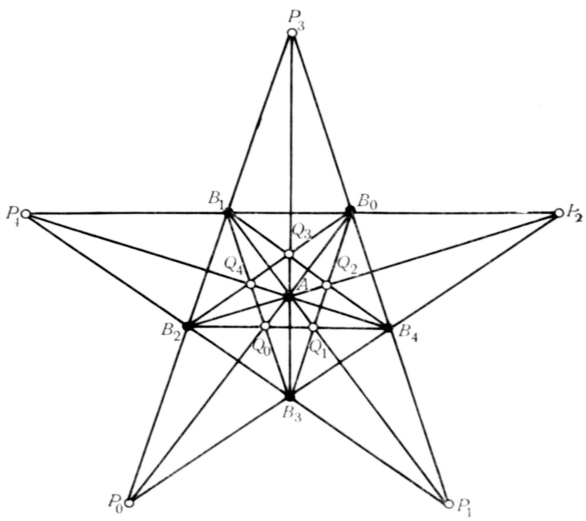

Рис. 5

Но $(B')_\tau = C$ и тогда $C' = (C)_\varphi = (B')_{\varphi\tau} = (B)_{\omega_l\tau\varphi} = (B)_\tau$, откуда опять из 3.3.2 прямая $C'B = BM$ является секущей θ.

3.3.5. Группа G проективных коллинеаций, отображающих θ в себя транзитивна на S_5.

Пусть $A, B \in S_5$. Рассмотрим полярные треугольники θ, AA_1A_2 и BB_1B_2, где AA_1 и BB_1 секущие θ. Пусть еще $M_1N \in \theta$, $M \urcorner Z AA_1$, $N \urcorner Z BB_1$. Проективная коллинеация $\varrho : (A, A_1, A_2, M)_\varrho = (B, B_1, B_2, N)$ отображает θ и S_5 в себя.

3.4. В π_9 существуют полные 6-дуги.

Пусть θ коническое сечение в π_9, $A \in S_5$, $l_0 Z A$ секущая θ, $B_0 Z l_0$, $B_0 \in S_5$, $B_0 \neq A$, $a = (A)_\omega$ и ψ проективная коллинеация из 3.3.3, отображающая θ в себя, для которой $(A)_\psi = A$ и $\psi^5 = 1$. Обозначим $B_i = (B_0)_{\psi^i}$, $i = 0, 1 \ldots 4$. Так как только a инвариантная прямая для ψ, то никакие три из точек $A, B_0, B_1, \ldots, B_4$ не коллинеарны. Следовательно $C_6 = \{A, B_0, B_1, \ldots, B_4\}$ является 6-дугой (рис. 5). Докажем, что C_6 — полная.

Так как $B_1 = (B_0)_\psi = (B_0)_{\varphi_0\varphi'} = (B_0)_{\varphi'}$, то $B_1 Z B_0L'$. Но $L' \neq L_1 = (l_0)_\omega$ и по 3.3.4. $B_0B_1 = C_0L'$ секущая θ. Так же $B_2 = (B_0)_{\psi^2} = (B_0)_{\varphi_1\varphi'\varphi_0\varphi'} = (B_0)_{\varphi''}$, где $\varphi'' = \varphi'\varphi_0\varphi'$ инволюционная гомология с осью $l'' = (l_0)_{\varphi'}$ и центром $L'' = (L_0)_{\varphi'} \neq L_0$.

Тогда опять по 3.3.4. $B_0B_2 = B_0L''$ секущая θ. Так как $(B_0B_1)_{\psi^i}$ и $(B_0B_2)_{\psi^i}$, $i = 0, \ldots, 4$ все секущие C_6, то каждая секущая C_6 является секущей θ. Но C_6 имеет 15 секущих, притом никакие 4 из них не проходят через одну точку, а на каждой из них лежит пара точек из θ которых десять. Следовательно, через каждую точку θ проходят точно 3 секущие C_6 т. е. $S_3(C_6)=\theta$. Тогда по 3.1. и 3.2. C_6 полная дуга в π_9.

3.5. Каждые две полные 6-дуги эквивалентны.

Пусть C'_6 и C''_6 полные 6-дуги. Из 3.2. имеем, что $S_3(C'_6)=\theta'$ и $S_3(C''_6)=\theta''$. Но в дезарговой π_9 каждые две конические сечения эквивалентны, и без ограничения общности можем предположить, что $\theta'=\theta''=\theta$. Тогда $C'_6\subset S_5$ и $C''_6\subset S_5$. Имея в виду 3.3.5, допустим, что C'_6 и C''_6 имеют общую точку A Но каждая секущая C'_6 и C''_6 через A является секущей θ, а через A проходят точно 5 секущих θ и, следовательно, на этих секущих лежат все точки C'_6 и C''_6. На произвольной секущей $l\not\ni A$ кроме A и $l\cap a$ лежат еще 2 точки из S_5, B' и B''. Если $B'\in C'_6$ и $B''\in C''_6$ посредством инволюционной гомологии α с центром A и осью $a=(A)_\omega$, $(B')_\alpha=B''$. С другой стороны, 3.4. точки C'_6 и C''_6 — это точки $(B')_{\psi^i}$ и $(B'')_{\psi^i}$, $i=0, 1, \ldots, 4$, где ψ проективная коллинеация из 3.3.3. Следовательно, $(C'_6)_\alpha=C''_6$, т. е. C'_6 и C''_6 эквивалентны. Таким образом доказана

Теорема 4. *В дезарговой π_9 существует единственная (с точностью до эквивалентности) полная 6-дуга.*

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Segre. Le geometrie di Galois. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **48**, 1959, 1—96.
2. M. Sce. Prelimini ad una teoria aritmetico-gruppale dei *k*-archi. *Rendic. Mat.*, **19**, 1960. 241—291.
3. P. Dembowski. Finite geometries. Berlin, 1968.
4. G. Martin. On arcs in finite planes. *Can. J. Math.*, **19**, 1967, No. 2, 376—394.
5. B. D'Orgeval. Sur sertaines propriétés des *k*-arcs. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **102**, 1975, 91—102.
6. N. Martinov, Ch. Lozanov. Equivalent and isomorphic complete 6-arcs in desarguesian projective planes. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **29**, 1976, No. 11, 1583—1584.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 13. 5. 1976.