Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ s-ГРАФОВ И ТЕОРЕМА ТУРАНА

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

В работе получена точная оценка сверху для числа ребер s-графа с данным числом вершин. Понятие s-графа является обобщением s-хроматического графа и графов, не содержащих полных подграфов с $s+1$ вершинами Полученные результаты поэтому обобщают теорему Турана (1941). В конце работы обсуждаются и обобщаются результаты Моцкина и Штрауса (1965).

В дальнейшем понадобится следующее арифметическое предложение [4]

Предложение 1. *Пусть целые числа p_i, n, s, p, ν удовлетворяют условиям:*

$$0\leqq p_i\leqq n,\ 1\leqq i\leqq s,\ p_1+p_2+\dots+p_s=n, \tag{1}$$

$$n=sp+\nu,\ s\geqq 2,\ 0\leqq \nu\leqq s-1. \tag{2}$$

Тогда

$$\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leqq i<j\leqq s\}\leqq\frac{(n^2-\nu^2)(s-1)}{2s}+\binom{\nu}{2}. \tag{3}$$

Равенство в (3) достигается тогда и только тогда, когда все p_i удовлетворяют неравенствам $p\leqq p_i\leqq p+1$.

Определение. *Через $T(n, s)$ (граф Турана) обозначаем полный s-хроматический граф с n вершинами, имеющий ν групп одноцветных вершин по $p+1$ в каждой группе и $s-\nu$ групп одноцветных вершин по p в каждой группе, где числа n, s, p и ν удовлетворяют (2).*

Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер графа G, а через $|A|$ — число элементов конечного множества A.

Если G является s-хроматическим графом с n вершинами, число одноцветных вершин i-ого цвета которого равно p_i, $0\leqq p_i\leqq n$, $1\leqq i\leqq s$, так как $|E(G)|\leqq\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leqq i<j\leqq s\}$ согласно (3) имеем

$$|E(G)|\leqq\frac{(n^2-\nu^2)(s-1)}{2s}+\binom{\nu}{2}, \tag{4}$$

где n, s, ν и p удовлетворяют (2). Равенство в (4) достигается тогда и только тогда, когда $G=T(n, s)$.

В своей работе [1] Туран обобщил это утверждение, доказав, что неравенство (4) справедливо и для графов, не содержащих полных подграфов с $(s+1)$ вершинами. Равенство в (4) снова достигается только для графа $T(n, s)$.

В этой работе мы докажем, что это утверждение остается справедливым в более широком классе графов.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 117—125.

Основная лемма. *Пусть G — граф с n вершинами и v_1 вершина максимальной степени d. Покрасим в черный цвет все вершины графа G, смежные вершине v_1, а в красный — все остальные. Тогда существует граф G', для которого $V(G')=V(G)$ и ребра G' — те же, что и у G за исключением тех, у которых оба конца красные; любое из них в G' заменено ребром дополнения $\bar{G}$ графа G с разноцветными концами, так что число разноцветных ребер графа G' равно числу ребер графа G, которые имеют хотя бы один красный конец. Это число не больше, чем $d(n-d)$. Если оно в точности равно $d(n-d)$, то в G нет ребер с двумя красными концами, т. е. $G=G'$.*

Доказательство. Пусть v — вершина графа G. Через $d(v)$ обозначим степень вершины v, через $d_1(v)$ — число смежных v черных вершин, а через $d_2(v)$ — число смежных красных вершин. Очевидно

$$d(v)=d_1(v)+d_2(v),\ d_1(v_1)=d(v_1)=d \text{ и } d(v)\leq d(v_1) \tag{5}$$

для любой вершины v. Неравенство

$$d_2(v)\leq d-d_1(v) \tag{6}$$

показывает, что число смежных v красных вершин не превосходит число несмежных v черных вершин. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{n-d}$ — все красные вершины графа G. Все ребра графа G, соединяющие v_2 с красными вершинами, заменим ребрами дополнения $\bar{G}$ графа G, соединяющими v_2 с черными вершинами. В результате получаем граф G_1, обладающий следующими свойствами:

1) $V(G_1)=V(G)$;

2) Ребра G_1 с двумя черными концами — те же, что и у G;

3) Все ребра графа G с разноцветными концами являются ребрами и графа G_1;

4) Все ребра графа G с двумя красными концами, которые несоседние v_2 — те же, что и у G_1;

5) Все ребра графа G, соединяющие v_2 с красными вершинами, заменены в G_1 ребрами дополнения $\bar{G}$ графа G, соединяющими v_2 с черными вершинами.

Через $d^{(1)}(v)$, $d_1^{(1)}(v)$, $d_2^{(1)}(v)$ будем обозначать соответственно степень вершины v графа G_1, число смежных v черных вершин графа G_1, число смежных v красных вершин графа G_1.

Неравенство

$$d_2^{(1)}(v)\leq d-d_1^{(1)}(v) \tag{7}$$

выполняется для любой красной вершины v. Действительно,

$$d^{(1)}(v)=d(v)\leq d,\ d_1^{(1)}(v)=d_1(v) \text{ и } d_2\,(v)=d_2(v), \tag{8}$$

если v — несмежная v_2 красная вершина, и

$$d^{(1)}(v)=d(v)-1,\ d_1^{(1)}(v)=d_1(v) \text{ и } d_2^{(1)}(v)=d_2(v)-1, \tag{9}$$

если v — смежная v_2 в G красная вершина.

Исходя из графа G_1 и красной вершины v_3, построим граф G_2 таким же образом, как, исходя из графа G и вершины v_2, был построен G_1. Это можно осуществить согласно (7). Продолжая этот процес индуктивно, строим последовательность графов

$$G_0 = G,\ G_1,\ G_2, \ldots,\ G_{n-d-1}. \tag{10}$$

Граф $G' = G_{n-d-1}$ имеет требуемые свойства.

То, что число разноцветных ребер графа G' равно числу ребер графа G, которые имеют хотя бы один красный конец — очевидно. Очевидно тоже, что это число не превосходит $d(n-d)$.

Через $d^{(i)}(v)$, $d_1^{(i)}(v)$, $d_2^{(i)}(v)$ обозначим соответственно степень вершины v графа G_i, число смежных v черных вершин графа G_i, число смежных v красных вершин графа G_i. Согласно построению G_i имеем:

$$d^{(i)}(v) \geqq d^{(j)}(v) \text{ для любой красной вершины } v, \text{ если } i<j. \tag{11}$$

Допустим, что число разноцветных ребер графа G' равно $d(n-d)$. Так как $d^{(n-d-1)}(v_1) + \ldots + d^{(n-d-1)}(v_{n-d}) = d(n-d)$ и $d^{(n-d-1)}(v_i) \leqq d$, $1 \leqq i \leqq n-d$, можно утверждать, что

$$d^{(n-d-1)}(v_i) = d, \quad i = 1, 2, \ldots, n-d. \tag{12}$$

Покажем, что в G нет ребер с двумя красными концами. В самом деле, допустим, что красные вершины v_i и v_j, $i<j$ соединены ребром в G. Тогда $d^{(i-1)}(v_j) < d$. Из (11) следует, что $d^{(n-d-1)}(v_j) < d$. Последнее неравенство противоречит (12).

Основная лемма полностью доказана.

Пусть ω — множество вершин графа G. Если $\omega \neq \varnothing$, рассмотрим совокупность S всех вершин графа G, смежных всем вершинам из ω. Подграф, графа G, порожденный множеством вершин S, будем обозначать через $A(\omega)$. Если $\omega = \varnothing$, то положим $A(\omega) = G$.

Определение. *Будем говорить, что граф G является s-графом $s \geqq 2$, если выполняются следующие условия:*

1_s) *существует такая последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$, что $v_i \in V(A(\omega_{i-1}))$, $1 \leqq i \leqq s-1$, где $\omega_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ при $1 \leqq i \leqq s-1$, $\omega_0 = \varnothing$, и $V(A(\omega_{s-1})) \neq \varnothing$;*

2_s) *v_i имеет максимальную степень относительно подграфа $A(\omega_{i-1})$, $1 \leqq i \leqq s-1$,*

3_s) *не существует никакой полный подграф с $s+1$ вершинами графа G, который содержит все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$.*

Последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$ будем называть s-последовательностью s-графа G.

Основная теорема. *Пусть G является s-графом с s-последовательностью $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$. Положим $p_i = |A(\omega_{i-1})| - |A(\omega_i)|$, если $1 \leqq i \leqq s-1$, и $p_s = |V(A(\omega_{s-1}))|$, где $\omega_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$. Тогда существует s-хроматический граф $\hat{G}_s$, число вершин i-ого цвета которого равно p_i, $1 \leqq i \leqq s$, и*

$$V(\hat{G}_s) = V(G),\ |E(G)| = |E(\hat{G}_s)| \leqq \Sigma\{p_i p_j \mid 1 \leqq i < j \leqq s\}. \tag{13}$$

Если $\hat{G}_s$ является полным s-хроматическим графом, т. е. $|E(\hat{G}_s)| = \Sigma\{p_i p_j \mid 1 \leqq i < j \leqq n\}$, то $G = \hat{G}_s$.

Доказательство основной теоремы. Теорему докажем индукцией по s. Пусть $s=2$ и G является 2-графом с 2-последовательностью v_1. Согласно основной лемме существует граф G', для которого $V(G)=V(G')$, $|E(G')|=|E(G)|$ и все вершины $A(v_1)$ покрашены в черное, а остальные в красное, так что в G' нет ребер с двумя красными концами. В G' нет ребер и с двумя черными концами, так как иначе v_1 было бы вершиной полного подграфа с тремя вершинами графа G. Следовательно G' есть двухроматический граф. Положим $\hat{G}_2=G'$. Очевидно $V(\hat{G}_2)=V(G)$, и $|E(\hat{G}_2)|=|E(G)|$. Число вершин красного цвета равно $p_1=|V(A(\omega_0))|-|V(A(\omega_1))|=|V(G)|-d>0$, а число вершин черного цвета равно $p_2=|(A(\omega_1)|=d>0$. Следовательно $|E(G)|=|E(\hat{G}_2)|\leq p_1p_2=d(n-d)$, где $n=|V(G)|$. Пусть $\hat{G}_2$ есть полный двухроматический граф, т. е. $|E(\hat{G}_2)|=p_1p_2$. Тогда $|E(G')|=p_1p_2=d(n-d)$, где $n=|\mathrm{V}(G)|$ и согласно основной лемме $G'=G$, т. е. $G=\hat{G}_2$.

Для случая $s=2$ теорема доказана полностью.

Пусть теперь $s>2$ и G является s-графом с s-последовательностью $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$. Покрасим в черное все вершины подграфа $A(v_1)$, а в красное все остальные. Согласно основной лемме существует граф G', для которого $V(G')=V(G)$, $|E(G')|=|E(G)|$ и ребра G' те же самые, что и у G, за исключением тех, у которых оба конца красные, любое из них в G' заменено ребром дополнения $\bar{G}$ графа G с разноцветными концами.

Рассмотрим последовательность вершин $v_2, \ldots, v_{s-1}$ графа $A(v_1)$. Легко проверить, что граф $A(v_1)$ является $(s-1)$-графом с $(s-1)$-последовательностью $v_2, \ldots, v_{s-1}$. Согласно индуктивному предположению существует $(s-1)$-хроматический граф Γ, число вершин i-ого цвета которого равно p_i, $2\leq i\leq s$, и $V(\Gamma)=V(A(v_1))$, $|E(A(v_1))|=|E(\Gamma)|\leq\Sigma\{p_ip_j|2\leq i<j\leq s\}$. При этом, если $|E(A(v_1))|=\Sigma\{p_ip_j|2\leq i<j\leq s\}$, тогда $A(v_1)=\Gamma$.

Искомый граф $\hat{G}_s$ определяется следующими равенствами:

$$V(\hat{G}_s)=V(G) \text{ и } E(\hat{G}_s)=E(\Gamma)\cup(E(G')\setminus E(A(v_2))). \tag{14}$$

Граф $\hat{G}_s$ является s-хроматическим графом, который имеет в качестве вершин 1-го цвета вершины совокупности $V(G)\setminus V(A(v_1))$ (их число равно p_1) и в качестве вершин i-ого цвета $2\leq i\leq s$, вершины i-ого цвета графа Γ (их число равно p_i). Очевидно $p_i>0$, $1\leq i\leq s$. Покажем, что $|E(\hat{G}_s)|=|E(G)|$. Сперва заметим, что

$$E(\Gamma)\cap(E(G')\setminus E(A(v_1)))=\varnothing. \tag{15}$$

Действительно, пусть $e\in E(G')\setminus E(A(v_1))$. Это означает, что хотя бы один из концов ребра e не принадлежит множеству $V(A(v_1))=V(\Gamma)$. Следовательно, $e\notin E(\Gamma)$ и справедливость (15) доказана. Из (14) и (15) следует: $|E(\hat{G}_s)|=|E(\Gamma)|+|E(G')\setminus E(A(v_1))|=|E(\Gamma)|+|E(G')|-|E(A(v_1))|=|E(G')|=|E(G)|$. Очевидно $|E(\hat{G}_s)|\leq\Sigma\{p_ip_j|1\leq i<j\leq s\}$. Допустим, что $\hat{G}_s$ является полным s-хроматическим графом, т. е. $|E(\hat{G}_s)|=\Sigma\{p_ip_j|1\leq i<j\leq s\}$. Тогда число ребер графа $\hat{G}_s$, исходящих из красных вершин, равно $p_1(p_2+\ldots+p_s)=p_1(n-p_1)$. Так как красно-черные ребра графа $\hat{G}_s$ и G' одни и те же, число красно-черных ребер графа G', который имеет p_1 красных и $n-p_1$ черных вершин, равно $p_1(n-p_1)$. Согласно основной лемме $G=G'$.

Напомним, что ребра графа Γ — это ребра графа $\hat{G}_s$, которые некрасно-черные, и, следовательно, их число равно

$$\Sigma\{p_i p_j \mid 1 \leqq i < j \leqq s\} - p_1(p_2 + \ldots + p_s) = \Sigma\{p_i p_j \mid 2 \leqq i \leqq s\} = |E(\Gamma)|.$$

Согласно индуктивному предположению $A(v_1) = \Gamma$. Из (14) $G' = G$ и $A(v_1) = \Gamma$ следует $\hat{G}_s = G$.

Положим $|E(T(n, s))| = l(n, s)$. Напомним, что $l(n, s) = \frac{(n^2 - \nu^2)(s-1)}{2s} + \binom{\nu}{2}$, где $n = ks + \nu$, $0 \leqq \nu \leqq s - 1$.

Следствие 1. *Если G является s-графом, то*

$$|E(G)| \leq l(n, s). \tag{16}$$

Равенство в (16) достигается тогда и только тогда, когда $G = T(n, s)$.

Доказательство. Неравенство (16) следует очевидно из неравенств (13) и (3). Если в неравенстве (16) достигается равенство, то тогда достигается равенство и в неравенствах (13) и (3). Согласно основной теореме $G = \hat{G}_s$, а согласно предложению 1 в применении к $\hat{G}_s$ получаем $\hat{G}_s = T(n, s)$ Доказательство окончено.

Дальше при помощи следующей леммы 1 и основной теоремы мы обобщим следствие 1 (см. теорему 1).

Лемма 1. *Пусть последовательность вершин $v_1, \ldots, v_r$, $1 \leqq r \leqq s - 1$ удовлетворяет условиям:*

1) $v_i \in A(\omega_{i-1})$, $1 \leq i \leq r$, *где* $\omega_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ *при* $1 \leq i \leq r$ *и* $\omega_0 = \varnothing$;

2) v_i *имеет максимальную степень относительно подграфа* $A(\omega_{i-1})$ $1 \leq i \leq r$;

3) *не существует никакой полный подграф с $s+1$ вершинами графа G, который содержит все вершины $v_1, \ldots, v_r$,*

При этих предположениях можно утверждать, что существует целое положительное число $\bar{s}$, $r \leq \bar{s} \leq s - 1$, такое, что G является $\bar{s}$-графом.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $A(\omega_{r-1}) \neq \varnothing$. Построим последовательность вершин $\bar{v}_i$ следующим образом: $\bar{v}_i = v_i$, если $1 \leq i \leq r$ и $\bar{v}_i$ есть вершина подграфа $A(\omega_{i-1})$, имеющая максимальную степень в нем, если $A(\omega_{i-1}) \neq \varnothing$ при $i > r$. Ясно, что последовательность обрывается на некотором $\bar{v}_{\bar{s}}$, т. е.

$$A(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}}) = \varnothing. \tag{17}$$

Покажем, что последовательность $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}-1}$ не содержится ни в каком полном подграфе с $\bar{s}+1$ вершинами. Действительно, если $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}-1}, v', v''$ являются вершинами полного подграфа с $\bar{s}+1$ вершинами, вершины v' и v'' подграфа $A(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}-1})$ смежны в нем и, следовательно, степень вершины v' в этом графе не меньше 1. Из этого следует, что степень $\bar{v}_{\bar{s}}$ относительно подграфа $A(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}-1})$ тоже не меньше 1, что противоречит (17). Следовательно G является $\bar{s}$-графом с $\bar{s}$-последовательностью $\bar{v}, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}-1}$. Кроме того, так как $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\bar{s}}$ порождают полный подграф графа G

с $\bar{s}$ вершинами, содержащий вершины $v_1, \ldots, v_r$, согласно условию леммы $\bar{s}<s+1$, т. е. $\bar{s}\leq s$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть последовательность вершин* $v_1, \ldots, v_r$, $1\leq r\leq s-1$ *удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда существует* $\bar{s}$*-хроматический граф* $\hat{G}_{\bar{s}}$, $r\leq \bar{s}\leq s$, *такой, что* $V(G)=V(\hat{G}_{\bar{s}})$ *и*

$$|E(G)|=|E(\hat{G}_{\bar{s}})|\leq l(n, \bar{s})\leq l(n, s). \tag{18}$$

При этом, если $|E(G)|=l(n, \bar{s})$, *то* $G=T(n, \bar{s})$ *и*

$$|E(G)|=l(n, s) \implies G=T(n, s). \tag{19}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 существует $\bar{s}$, $r\leq \bar{s}\leq s$, такое, что G является $\bar{s}$-графом. Теперь (18) вытекает непосредственно из следствия 1 и из того, что $l(n, \bar{s})\leq l(n, s)$, если $\bar{s}\leq s$. Если $|E(G)|=l(n, \bar{s})$, то равенство $G=T(n, \bar{s})$ тоже вытекает из следствия 1. Пусть $|E(G)|=l(n, s)$. Тогда из (18) следует $l(n, \bar{s})=l(n, s)$, что возможно только тогда, когда $s=\bar{s}$. Следовательно, в этом случае G является s-графом и согласно следствию 1 имеем $G=T(n, s)$. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Если* v_1 *является вершиной максимальной степени графа* G, *которая не содержится ни в каком полном подграфе с* $s+1$ *вершинами*, $s\geq 2$, *то существует такое целое положительное число* $\bar{s}$, $1\leq \bar{s}\leq s$, *что выполняется* (18). *Если* $|E(G)|=l(n, s)$, *то* $G=T(n, s)$.

Доказательство. Очевидно граф G удовлетворяет условиям леммы 1 для $r=1$. Следствие 2 непосредственно вытекает из теоремы 1.

Следствие 3. *Если* v_1 *является вершиной максимальной степени графа* G, *которая не содержится ни в каком полном подграфе с* $s+1$ *вершинами, то* $|E(G)|\leq l(n, s)$. *Равенство достигается тогда и только тогда, когда* $G=T(n, s)$.

Следствие 4. *Если* $|E(G)|>l(n, s)$, *то любая вершина максимальной степени графа* G *является вершиной некоторого полного подграфа с* $s+1$ *вершинами.*

Следствие 5. *Если* $|E(G)|=l(n, s)$ *и* G *содержит полный подграф с* $s+1$ *вершинами, то любая вершина максимальной степени графа* G *является вершиной некоторого полного подграфа с* $s+1$ *вершинами.*

Следствие 6 (Теорема Турана). *Если граф* G *не содержит полных подграфов с* $s+1$ *вершинами, то* $|E(G)|\leq l(n, s)$. *Равенство достигается тогда и только тогда, когда* $G=T(n, s)$.

Доказательство. Пусть v_1 — вершина графа G максимальной степени. Очевидно v_1 не содержится ни в каком полном подграфе с $s+1$ вершинами. Теорема Турана следует непосредственно из следствия 3.

Из следствия 1, имея в виду, что

$$l(n, s)\leq n^2(s-1)/2s, \tag{20}$$

получаем

Следствие 7. *Для любого* s*-графа* G *с* n *вершинами имеем*

$$|E(G)|\leq n^2(s-1)/2s. \tag{21}$$

При этом равенство в (21) *достигается тогда и только тогда, когда* n *делится без остатка на* s *и* $G = T(n, s)$.

В работе [2] для графов, не содержащих полных подграфов с $s+1$ вершинами, доказано неравенство

$$|E(G)| \leq \binom{n}{2} - \frac{n^2(n-d-1)}{2s(n-m)}, \tag{22}$$

где d есть максимальная степень вершин графа G, а m — минимальная степень вершин графа G. Это неравенство объявляется обобщением теоремы Турана.

Сделаем несколько замечаний по поводу неравенства (22). Отметим сначала, что для любого без исключения графа G очевидно выполняются неравенства:

$$mn \leq 2|E(G)| \leq dn. \tag{23}$$

Покажем, что если G является $\bar{s}$-графом с n вершинами, тогда

$$\frac{dn}{2} \leq \binom{n}{2} - \frac{n^2(n-d-1)}{2\bar{s}(n-m)}, \tag{24}$$

и тем более выполняется неравенство

$$\frac{dn}{2} \leq \binom{n}{2} - \frac{n^2(n-d-1)}{2s(n-m)}, \qquad \bar{s} \leq s$$

для любого графа с n вершинами, который не содержит полных подграфов с $s+1$ вершинами (см. лемму 1). Действительно, из (21) и (23) следует, что если G является $\bar{s}$-графом с n вершинами, то

$$|E(G)| \leq \min\left\{\frac{dn}{2}, \frac{n^2(\bar{s}-1)}{2\bar{s}}\right\}. \tag{25}$$

Из (23) и (25) следует

$$m \leq n(\bar{s}-1)/\bar{s} \tag{26}$$

для любого $\bar{s}$-графа с n-вершинами. Используя (26), получаем

$$\binom{n}{2} - \frac{n^2(n-d-1)}{2\bar{s}(n-m)} \geq \binom{n}{2} - \frac{n^2(n-d-1)}{2\bar{s}(n-n(\bar{s}-1)/\bar{s})} = \frac{nd}{2}, \tag{27}$$

т. е. искомое неравенство (24) доказано. Кроме того, мы показали, что тривиальное неравенство $2|E(G)| \leq dn$ является лучшим неравенством для графов с n вершинами, не содержащих полных подграфов с $s+1$ вершинами, по сравнению с (22) и значит, когда $dn > n^2(s-1)/s$, неравенство (22) хуже неравенства теоремы Турана, т. е. не является обобщением этой теоремы, а только простым ее следствием.

Мы покажем, что используя максимальную степень d вершин графа G, можно получить более точное неравенство, чем (25), а, следовательно, и более точное неравенство, чем (21) и (22), если даже G является $\bar{s}$- графом для $\bar{s} < s$.

Следствие 8. *Если G является s-графом с максимальной степенью d, то*

$$|E(G)|\leqq d(n-d)+d^2(s-2)/2(s-1). \tag{28}$$

Равенство в (28) достигается тогда и только тогда, когда d делится на $s-1$ и G является полным s-хроматическим графом с $n-d$ вершинами 1-го цвета и $d/(s-1)$ вершинами i-ого цвета, $2\leqq i\leqq s$.

Доказательство. Так как G является s-графом, согласно неравенству (13) основной теоремы имеем

$$|E(G)|\leqq\Sigma\{p_ip_j\,|\,1\leqq i<j\leqq s\} \tag{29}$$
$$=p_1(p_2+\ldots,p_s)+\Sigma\{p_ip_j\,|\,2\leqq i<j\leqq s\}=d(n-d)+\Sigma\{p_ip_j\,|\,2\leqq i<j\leqq s\}.$$

Из (3) и (20) следует, что

$$\Sigma\{p_ip_j\,|\,2\leqq i<j\leqq s\}\leqq d^2(s-2)/2(s-1). \tag{30}$$

Неравенство (28) непосредственно вытекает из (29) и (30). Пусть в (28) имеется равенство. Тогда в неравенстве (29) тоже имеется равенство, а это означает, что и в неравенстве (13) имеется равенство. Согласно основной теореме G является полным s-хроматическим графом с p_i вершинами i-ого цвета. Кроме того, $p_1=n-d$ и

$$\Sigma\{p_i\,|\,2\leqq i\leqq s\}=d,\qquad \Sigma\{p_ip_j\,|\,2\leqq i<j\leqq s\}=d^2(s-2)/2(s-1). \tag{31}$$

Из (31) и предложения 1 следует, что d делится без остатка на $s-1$ и $p_i=d/(s-1)$, $i\geqq 2$. Следствие 8 доказано.

Рассмотрим функцию $f(d)=d(n-d)+d^2(s-2)/2(s-1)$. Очевидно

$$f(d)\leqq f(n(s-1)/s)=n^2(s-1)/2s. \tag{32}$$

Из (28) и (23) следует

$$|E(G)|\leqq\min(dn/2,\ f(d)). \tag{33}$$

Согласно (27) и (32) неравенство (33) более точное, чем (21), (22) и (25).

То, что для s-графа G знаем максимальную степень вершин d, означает, что нам известно число p_1 (см. основную теорему). Если нам известны числа $p_1,\ldots,p_t$, $2\leqq t\leqq s-1$, мы можем написать более точную оценку для $|E(G)|$, а именно

$$|E(G)|\leqq\Sigma\{p_i(n-p_1-\ldots-p_i)\,|\,1\leqq i\leqq t\}+(n-p_1-\ldots-p_t)^2(s-t-1)/2(s-t).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $(s-t)$ делит $[n-(v_1+\ldots+p_t)]$ и G является полным s-хроматическим графом с p_i вершинами i-ого цвета, $1\leqq i\leqq t$, и с $[n-(p_1+\ldots+p_t)]/(s-t)$ вершинами i-ого цвета, $t<i\leqq s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Turan. On the theory of graphs. *Colloq. Math.*, **3**, 1954, No. 1, 19—30.
2. S. T. Motzkin, E. G. Straus. Maxima for graphs and new proof of a theorem of Turan. *Canad. J. Math.*, **17**, 1965, 533—540.
3. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. О максимуме числа ребер графа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 11, 1575—1578.
4. Н. Хаджииванов. Цветни графи. *Математика*, **15**, 1976, № 6, 16—18.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 15. 5. 1976.