Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ДЛЯ NE-ОТОБРАЖЕНИЙ

СЕМЕН А. БОГАТЫЙ, ГЕНЧО С. СКОРДЕВ

Доказана теорема Лефшеца о неподвижных точках для NE-отображений компактов, имеющих щейп конечного полиэдра. Приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы компакт имел шейп конечного полиэдра.

Теорема Лефшеца о неподвижных точках не верна для компактов, которые ацикличны или даже гомотопически эквивалентны точке [1, 2]. Тем самым эта теорема не верна для компактов, являющихся фундаментальными абсолютными ретрактами (FAR).

К. Борсук доказал, что компактные FAR-пространства обладают свойством неподвижной точки относительно близко продолжаемых отображений [3], а именно, справедлива

Теорема ([3]). *Пусть X является компактным FAR-пространством, а $f:X\to X$ — близко продолжаемым отображением. Тогда существует точка $x\in X$ такая, что $f(x)=x$.*

В этой заметке мы докажем, что справедлива

Теорема 1. *Пусть компакт X имеет шейп конечного полиэдра, а $f:X\to X$ — близко продолжаемое отображение. Если число Лефшеца отображения $\Lambda(f)$ отлично от нуля, то отображение f имѣет неподвижную точку, т. е. существует такая точка $x\in X$, что $f(x)=x$.*

Под компактным пространством мы понимаем метрический компакт. Для определения числа Лефшеца отображения f будем использовать гомологии Александрова-Чеха или, что одно и то же для компактов, гомологиии Виеториса с рациональными коэффициентами. Напомним, что $\Lambda(f)=\Sigma(-1)^i\operatorname{tr} f_i$, где $f_i:H_i(X)\to H_i(X)$ — гомоморфизм групп гомологий, индуцированный отображением f. Так как компакт X имеет шейп конечного полиэдра, а гомологии Александрова-Чеха являются шейповыми инвариантами, то число Лефшеца отображения f существует.

Напомним также определения близко продолжаемого отображения (NE--отображения) [3]. Пусть M-компактное AR-пространство и X вложено в M. Продолжим отображения f до отображения $\tilde f:M\to M$. Отображение f называется близко продолжаемым, если для любого положительного числа ε существует такая окрестность U пространства X в M, что для любой окрестности V пространства X в M найдется отображение $g:U\to V$ такое, что $\varrho(\tilde f|U,g)<\varepsilon$ (здесь $\varrho(\tilde f|U,g)$ — равномерное расстояние между отображениями $\tilde f|U$ и g), т, е.

$$\varrho(\tilde f|U,g)=\sup\{\varrho((\tilde f|U)(x),\ g(x))|x\in U\},$$

а ϱ — метрика в пространстве M. К. Борсук доказал, что свойство близкой продолжаемости отображения f не зависит от вложения пространства X в M, от M и от продолжения $\widetilde{f}$.

Для доказателства теоремы 1 нам понадобится

Теорема 2. *Компакт X имеет шейп конечного полиэдра тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{X_n | n=1, 2, \ldots\}$, что*

а) *X_n суть компактные ANR-пространства,*

б) *$X_{n+1} \subset X_n$, и X_{n+1} является строго деформационным ретрактом пространства X_n,*

в) *$X \subset X_n$ и $\cap \{X_n n=1, 2, \ldots\} = X$.*

Доказательство. Пусть P — такой полиэдр, что $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} P$. Через I^∞ будем обозначать гильбертовый куб — $\Pi\{I_i | i=0, 1, \ldots\}$, где I_i — замкнутый отрезок $[-1,1]$. Через s обозначим $\Pi\{I_i^0 | i=0, 1, \ldots\}$, где I_i^0 — открытый интервал $(-1,1)$. Через I^n будем обозначать n-мерный куб — $\{(x_1, \ldots, x_n) | -1 \leq x_i \leq 1, \ i=1, \ldots\}$. Тогда $I^\infty = I^n \times I^{(n, \infty)}$. Пусть i является вложением полиэдра P в куб I^n, и $i(P) = P_n$. Теперь вложим пространство $P \times I^\infty$ и I^∞ таким образом, что $j: P \times I^\infty \to I^\infty = I^{n+1} \times I^{(n+1, \infty)}$, где $j(x, (y_0, \ldots, y_k, \ldots)) = (1, i_n(x), (y_0, y_1, \ldots))$. Отметим, что $j(P \times I^\infty)$ является Z-множеством. Будем предполагать, что компакт X лежит в пространстве s. По теореме Чепмена [5, теорема 2] существует гомеоморфизм h пространства $I^\infty \setminus j(P \times I^\infty)$ на пространство $I^\infty \setminus X$.

Имеем $P_n \subset I^n$, считая при этом, что полиэдр I^n берется в такой триангуляции, в которой P_n — полный подполиэдр. Рассмотрим вложение $i_n: P_n \to I^{n+1}$, где $i_n(y) = (1, y)$. Обозначим $i_n(P_n)$ через $\widetilde{P}_n$. Пусть O_m — замкнутая звезда полиэдра $\widetilde{P}_n$ в m-том барицентрическом подразделении I^{n+1}. Имеем:

а) $O_{m+1} \subset \operatorname{Int} O_m$; б) существует ретракция $r_m: O_m \to O_{m+1}$ и гомотопия $H_m: O_m \times I \to O_m$ такие, что $H_m((O_m \setminus O_{m+1}) \times I) \subset O_m \setminus O_{m+1}$, $H_m | O_m \times \{0\} = \mathrm{id}$ и $H_m | O_m \times \{1\} = r_m$. Пусть $A_m = I^\infty \setminus h(O_m \times I^{(m, \infty)}$ и $B_m = I^\infty \setminus h(A_m)$. Множество B_m компактно и содержит X. Кроме того, мы имеем деформационную ретракцию $r'_m: B_m \to B_{m+1}$, где $r'_m(x) = h r_m h^{-1}(x)$ для $x \in B_m \setminus X$ и $r'_m(x) = x$ при $x \in X$. При этом, так как $O_{m+2} \subset \operatorname{Int} O_{m+1}$, $B_{m+2} = I^\infty \setminus h(A_{m+2})$ содержится в множестве $I^\infty \setminus \operatorname{Int}(O_{m+1} \times I^{(m+1, \infty)})$. Множество $I^\infty \setminus \operatorname{Int}(O_{m+1} \times I^{(m+1, \infty)})$ замкнуто в I^∞, следовательно оно компактно. Поэтому компактно и множество $h(I^\infty \setminus \operatorname{Int}(O_{m+1} \times I^{(m+1, \infty)}))$, следовательно множество $I^\infty \setminus h(I^\infty \setminus \operatorname{Int}(O_{m+1} \times I^{(m+1, \infty)}))$ открыто в I^∞ и тем более в B_{m+1}. Итак, мы доказали, что $X \subset \operatorname{Int} B_{m+1}$, где внутренность берется в B_m. Поэтому отображение r'_m непрерывно и r'_m является ретракцией. Совершенно аналогично строится гомотопия, соединяющая отображения $\mathrm{id}(B_m)$ и r'_m, и проверяется ее непрерывность. Очевидно, $X = \cap \{B_m | m=1, 2, \ldots\}$. Проверим, что B_m является компактным ANR-пространством.

Пусть W_m — открытое множество в I^{n+1}, ретрагирующееся на O_m. Тогда $W_m \times I^{(m, \infty)}$ является открытым множеством в I^∞. Отметим, что множество V_m компактно, и, следовательно, множество $I^\infty \setminus h(V_m)$ открыто в I^∞ и содержит B_m. Здесь $V_m = I^\infty \setminus (W_m \times I^{(m, \infty)})$. Кроме того, так как W_m ретрагируется на O_m таким образом, что $W_m \setminus O_m$ отображается на $O_m \setminus X$, то $I^\infty \setminus h(V_m)$ ретрагируется на B_m и, следовательно, B_m является ANR-пространством. Необходимость доказана.

В обратную сторону теорема фактически доказана К. Борсуком и Строком [6], ибо как показано ими, пространство X является фундаментальным деформационным ретрактом компакта X_1 и, в частности, $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} X_1$, а по теореме Уеста [7] ANR-компакт X_1 имеет гомотопический тип некоторого конечного полиэдра P (тогда $\operatorname{Sh} X_1 = \operatorname{Sh} P$ и поэтому $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} P$).

Доказательство теоремы 1. Вложим компакт X в пространство s. Так как X — компакт, имеющий шейп конечного полиэдра P из теоремы 2 следует, что существует последовательность $\{X_n\, n=1, 2, \dots\}$ AER-компактов X_n, для которой выполнены условия а) — в) теоремы 2.

Дано отображение $f: X \to X$, которое близко продолжаемо (NE-отображение в смысле К. Борсука). Кроме того, число Лефшеца отображения f отлично от нуля.

Предположим, что множество $\{x \in X\; f(x) = x\}$ пусто. Так как X_1 есть компактный ANR и все X_n суть ретракты X_1, то существует такое положительное число ε_0, что выполнено: для любого компакта K и отображений $\varphi, \psi: K \to X_n$ из того, что расстояние между отображениями φ и ψ меньше ε_0, следует, что отображения φ и ψ гомотопны.

Пусть $\widetilde{f}: I^\infty \to I^\infty$ — некоторое продолжение отображения f. Так как $X \subset \operatorname{Int} X_n$ для всех n, а отображение f не имеет неподвижных точек, то существуют такие числа n_0 и m_0 (вообще говоря, $n_0 \geqq m_0$), что $\widetilde{f}(X_{n_0}) \subset X_{m_0}$ и $\varepsilon_1 = \min\{\varrho(\widetilde{f}(x), x) \mid x \in X_{n_0}\}$ положительное число.

Пусть $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_0)$. Так как отображение f близко продолжаемо, то существует такой номер $n_1 \geqq n_0$ и отображение $g: X_{n_1} \to X_{n_1}$, для которых $\varrho(\widetilde{f} \mid X_{n_1}, g) < \varepsilon_2/2$, где расстояние в I^∞ обозначено через ϱ.

Проверим, что числа Лефшеца отображений f и g равны. Сначала построим такую фундаментальную последовательность $\underline{g}: X_{n_1} \to X$, $\underline{g} = \{g_{n'}\}$, что фундаментальная последовательность $\underline{i}(X, X_1) \circ \underline{g}$ гомотопна фундаментальной последовательности, порожденной отображением g. Здесь $\underline{i}(X, X_1)$ — фундаментальная последовательность, порожденная отображением вложения $i: X \to X_1$.

Из того, что f близко продолжаемо, следует, что для любого $n' > n_1$ существует отображение $g_{n'}: X_{n_1} \to X_{n'}$ такое, что $\varrho(g_{n'}, \widetilde{f} \mid X_{n_1}) < \varepsilon_2/2$. Тогда имеем $\varrho(g_{n'}, g_{n''}) < \varepsilon_2$ для $n'' \geqq n' > n_1$ и стало быть $g_{n'}$, $g_{n''}$ гомотопны в пространстве $X_{n'}$.

Тем самым $\underline{g} = \{g_{n'}\}$ является фундаментальной последовательностью. В действительности, для того чтобы $\underline{g}$ была фундаментальной последовательностью в смысле К. Борсука, отображения $g_{n'}: X_{n_1} \to X_{n'}$ нужно продолжить до отображений $\widetilde{g}_{n'}: I^\infty \to I^\infty$, но так как это усложнило бы наши рассуждения, то мы считаем, что $\underline{g}$ — фундаментальная последовательность в смысле Мардешича-Сегала [8]. При этом имеем, что следующая диаграмма коммутативна (рис. 1).

$$\begin{tikzcd}
H_*(X) \arrow[r, "i_{1*}"] & H_*(X_{n_1}) \\
H_*(X) \arrow[u, "f_*"] \arrow[r, "i_{1*}"'] & H_*(X_{n_1}) \arrow[u, "g_*"'] \arrow[ul, "\underline{g}_*"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Здесь $i_1: X \to X_{n_1}$ — тождественное вложение, $\underline{g}_*$ — гомоморфизм групп гомологии, индуцированный фундаментальной последовательностью $\underline{g}$, а f_*, g_*, i_{1*} — гомоморфизмы групп гомологий, индуцированные отображениями f и g, i_1 соответственно.

Из рис. 1 получаем, что числа Лефщеца отображений f и g равны и, следовательно, $\Lambda(g)\neq 0$. Так как X_{n_1} компактное ANR-пространство, то $\{x\in X_{n_1} | g(x)=x\}\neq\varnothing$ [9]. Пусть $x_0\in X_{n_1}$ и $g(x_0)=x_0$, тогда $\varrho(\widetilde{f}(x_0), x_0)<\varepsilon_1$. Получено противоречие. Теорема 1 доказана.

Замечания. Из утверждения 3.8 работы [3] легко усмотреть, что если X является абсолютным аппроксимативным окрестностным ретрактом в смысле Клаппа [10] ($X\in \mathrm{AANR}_c$), то тождественное отображение $i: X\to X$ близко продолжаемо. Отсюда и из теоремы 4.1 цитированной работы К. Борсука вытекает следующее усиление примера 6.1 из [3]: если хотя бы один из компактов X или Y является AANR_c-компактом, то любое отображение $f: X\to Y$ близко продолжаемо.

Данная работа была выполнена во время пребывания Г. Скордева в Московском государственном университете в мае 1976. После того как работа была сдана в печать, проф. К. Борсук сообщил Г. Скордеву, что теорема 1 другим методом в более общей форме получена им.

Пользуемся случаем принести свою благодарность проф. Ю. М. Смирнову.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Borsuk. Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui même sans points invariants. *Fund. Math.*, **24**, 1935, 51—58.
2. Sh. Kinoshita. On some contractible continua without fixed point property. *Fund. Math.*, **40**, 1953, 96—98.
3. K. Borsuk. On nearly extendable maps. *Bull. Acad. pol sci. Sér. sci. math., astron. et phys.*, **23**, 1975, 753—756.
4. K. Borsuk. Concerning homotopy properties of compacta. *Fund. Math.*, **62**, 1968, 223—254.
5. T. Chapman. On some application of infinite dimensional manifolds to the theory of shape. *Fund. Math.*, **76**, 1972, 181—193.
6. K. Borsuk. Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences. *Fund. Math.*, **64**, 1969, 55—85.
7. J. West. Compact ANR's have finite type. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**, 1975, 163—165.
8. S. Mardesic, J. Segal. Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes. *Fund. Math.*, **72**, 1971, 61—68.
9. S. Lefschetz. On locally-connected and related sets. *Ann. Math.*, **35**, 1934, 118—129.
10. M. Clapp. On generalization of absolute neighborhood retracts. *Fund. Math.*, **70**, 1971, 117—130.

Московский Государственный Университет
Механико-математический факультет

Поступила 1. 6. 1976.

117234 Москва
Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373