Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДИН МЕТОД П. С. УРЫСОНА ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАЗРЕЗАНИЯ F_σ-ПОДМНОЖЕСТВОМ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, АТАНАС Л. ХАМАМДЖИЕВ

Н. Хаджииванов [3] доказал, что всякое полное в смысле Чеха связное и локально $\mathfrak{M}$-связное пространство — сильно $\mathfrak{M}$-связно. Основным результатом настоящей статьи является более сильное утверждение, что если $A=F_1\cup F_2\cup\ldots$, где F_i — замкнутые подмножества пространства X и $F_i\in\mathfrak{M}$, тогда множество A не разрезает пространство X.

Пусть K и L — подмножества топологического пространства X. Говорят, что K не разбивает L, если множество $L\setminus K$ связно; K не разрезает L, если множество $L\setminus K$ является семиконтинуумом, т. е. любые две его точки принадлежат некоторому содержащемуся в нем континууму. Ясно, что если K не разрезает L, то K не разбивает L; обратное, вообще говоря, неверно. Однако мы укажем на один случай, когда обратное тоже верно. Известна теорема Мазуркевича—Мура—Менгера [1, с. 259], утверждающая что любое полное, связное и локально связное метрическое пространство линейно связно и тем более является семиконтинуумом, так что, если его замкнутое подмножество не разбивает некоторого открытого его подмножества, то оно подавно и не разрезает его. В неметризуемом случае утверждение теоремы Мазуркевича—Мура—Менгера не верно, даже если пространство бикомпактно.

Пример связного и локально связного бикомпакта, который не линейно связен. Пусть M и N — упорядоченные множества. Говорят, что произведение $M\times N$ упорядочено лексикографически, если $(m, n)<(m', n')$ тогда и только тогда, когда или $m<m'$, или $m=m'$ и $n<n'$. Через A обозначим некоторое вполне упорядоченное множество с последним элементом ω мощности $|A|>\aleph_0$. Произведение $A\times[0, 1)$ возьмем в лексикографическом упорядочении и наделим порядковой топологией. Тогда искомым примером является подпространство $X=(A\setminus\{\omega\})\times[0, 1)\cup\{(\omega, 0)\}$, иногда называемое связной трансфинитной прямой.

Предложение 1. *Всякое полное в смысле Чеха связное и локально связное топологическое пространство X является семиконтинуумом.*

Из предложения 1 очевидно получается

Следствие 1. *Пусть F и W — подмножества полного в смысле Чеха связного и локально связного пространства X, притом первое замкнуто, а второе — открыто. Тогда, если F не разбивает W, то оно подавно и не разрезает его.*

Урысоном [2] было доказано, что если A — F_σ-подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim A\leq n-2$, а W — открытое и связное подмножество этого пространства, то A не разрезает W. По существу он доказывает, что если F_i — замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$, которые не разбивают

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 130—135.

никакого открытого и связного подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, то объединение $F_1 \cup F_2 \cup \ldots$ не разрезает никакого открытого и связного подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, он пользуется установленным до того им фактом, что замкнутые подмножества эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim F \leq n-2$ не разбивают никакого открытого и связного подмножества этого пространства.

В настоящей статье мы переносим схему Урысона в более общую ситуацию. Для этой цели нам будет необходимо одно обобщение понятия связности [3, 4].

Определение. *Пусть $\mathfrak{M}$ — класс топологических пространств, удовлетворяющий следующим двум условиям:*

1. *Если $P \in \mathfrak{M}$ и пространство Q гомеоморфно P, то $Q \in \mathfrak{M}$.*

2. *Если $P \in \mathfrak{M}$ и F — замкнутое подмножество пространства P, то $F \in \mathfrak{M}$.*

Топологическое пространство X называем $\mathfrak{M}$-связным, если оно не может быть представлено в виде $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые собственные подмножества пространства X и $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{M}$. Эквивалентная формулировка: если Φ — замкнутое собственное подмножество пространства X и $\Phi \in \mathfrak{M}$, то Φ не разбивает X.

Через $\mathfrak{M}_n$ обозначим класс топологических пространств размерности $\leq n-2$. Сформулируем в новой терминологии упомянутую выше теорему Урысона:

Любое открытое и связное подмножество $\mathbb{R}^n$ — $\mathfrak{M}_n$-связно.

Через $\mathfrak{M}_\tau$ обозначим класс топологических пространств кардинальной размерности $\leq \tau$, [5]. Н. Хаджииванов [5] доказал, что тихоновский куб I^τ является $\mathfrak{M}_\tau$-связным пространством.

Топологическое пространство X называем локально $\mathfrak{M}$-связным, если любая его точка обладает базой окрестностей, замыкания которых $\mathfrak{M}$-связны.

Если класс $\mathfrak{M}$ состоит только из пустого пространства, тогда $\mathfrak{M}$-связность и локальная $\mathfrak{M}$-связность означают соответственно связность и локальную связность.

Серпинским [1, с. 182] было доказано, что если бикомпакт X связен, то его нельзя представить в виде $X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где F_i — замкнутые подмножества пространства X, $F_i \neq X$, $i = 1, 2, \ldots$, $F_i \cap F_j = \varnothing$ при $i \neq j$. В связи с этим естественным образом возникает следующее [3]

Определение. *Топологическое пространство X назовем сильно $\mathfrak{M}$-связным, если его нельзя представить в виде $X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где F_i — замкнутые подмножества пространства X, $F_i \neq X$ и $F_i \cap F_j \in \mathfrak{M}$ при $i \neq j$.*

Очевидно сильная $\mathfrak{M}$-связность влечет $\mathfrak{M}$-связность. В общем случае обратное утверждение не верно, если даже X является компактным подмножеством эвклидова пространства [3, 4]. Если, однако, потребовать дополнительно и локальную $\mathfrak{M}$-связность, тогда $\mathfrak{M}$-связность влечет сильную $\mathfrak{M}$-связность. Это доказано для $\mathfrak{M}_n$ Уилкинсоном, а в общем случае Н. Хадживановым [3; 7, следствие 2]. В обоих случаях доказывают эти результаты, пользуясь одним обобщением схемы Бэра для доказательства теоремы о категориях. Здесь мы переносим схему Урысона для того, чтобы получить следующий более общий результат.

Теорема 1. *Пусть пространство X полно в смысле Чеха, связно и локально, $\mathfrak{M}$-связно и $A = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где F_i — замкнутые подмноже-*

ства пространства X *и* $F_i \in \mathfrak{M}$, $i=1, 2, \ldots$. *Тогда* A *не разрезает пространства* X.

Следуя методу, использованному в [8], из основной теоремы получим упомянутое выше

Следствие 2. [3]. *Всякое полное в смысле Чеха связное и локально* $\mathfrak{M}$*-связное пространство* X *сильно* $\mathfrak{M}$*-связно.*

Доказательство предложения 1. Через bX обозначим некоторую бикомпактификацию пространства X. Так как X полно в смысле Чеха, то $bX \setminus X = N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, где N_i — замкнутые в bX множества. Если x и y произвольные точки пространства X, то последовательность $v=\{V_1, \ldots, V_p\}$ открытых в X и связных множеств V_i, $i=1, 2, \ldots, p$, для которых $x \in V_1$, $y \in V_p$ и $V_i \cap V_{i+1} \neq \varnothing$, $i=1, 2, \ldots, p-1$, будем называть цепью, соединяющей x и y в X. Тело системы v обозначим через $\widetilde{v}: \widetilde{v} = V_1 \cup \cdots \cup V_p$. Пусть $a \in X$ и $b \in X$. Построим последовательность

$$(1) \qquad v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

цепей, соединяющих a и b и удовлетворящих следующим требованиям

$$(2) \qquad \widetilde{v}_n \supset \widetilde{v}_{n+1}, \ n=1, 2, \ldots$$

$$(3) \qquad [\widetilde{v}_n]_{bX} \cap N_n = \varnothing, \ n=1, 2, \ldots .$$

Очевидно пересечение $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\widetilde{v}_n]_{bX}$ является континуумом, лежащим в X и содержащим точки a и b. Следовательно доказательство предложения 1 сводится к построению последовательности (1), удовлетворяющей условиям (2) и (3).

Построение цепи v_1. Через U_a обозначим множество всех тех точек x пространства X, которые можно соединить цепью, замыкание тела которой в bX не пересекается с N_1. Легко проверить, что множество U_a открыто-замкнуто в X. Так как $a \in U_a$ и X связно, то $X = U_a$. В частности, существует цепь v_1, соединяющая a и b, замыкание тела которой в bX не пересекается с N_1.

Допустим, что уже построены цепи $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, соединяющие a и b, для которых $\widetilde{v}_1 \supset \widetilde{v}_2 \supset \cdots \supset \widetilde{v}_{n-1}$ и $[\widetilde{v}_i]_{bX} \cap N_i = \varnothing$, $i=1, 2, \ldots, n-1$. Построим цепь v_n. Снова через U_a обозначим множество точек x, $x \in \widetilde{v}_{n-1}$, которые можно соединить с a цепью, лежащей в $\widetilde{v}_{n-1}$, замыкание тела которой в bX не пересекается с N_n. Легко проверить, что U_a является открыто-замкнутым подмножеством множества $\widetilde{v}_{n-1}$. Так как, очевидно, $\widetilde{v}_{n-1}$ связно, то $U_a = \widetilde{v}_{n-1}$. Следовательно существует цепь v_n, лежащая в $\widetilde{v}_{n-1}$ и соединяющая a и b, замыкание тела которой в bX не пересекается с N_n. Доказательство предложения 1 завершено.

Для доказательства основной теоремы 1 нам будет необходима следующая

Лемма 1. *Пусть* H *и* W — *подмножества регулярного топологического пространства* X, $H \in \mathfrak{M}$, $H \cap W$ *замкнуто в* W, W — *полное в смысле Чеха связное и локально* $\mathfrak{M}$*-связное в индуцированной топологии открытое подмножество пространства* X. *Тогда* H *не разрезает* W.

Доказательство. Согласно следствию 1 достаточно доказать, что H не разбивает W, т. е., что множество $W \setminus H$ связно. Допустим, что это не так и положим $U=W\setminus H$. Множество $W\cap \operatorname{Fr} U\neq\varnothing$, так как W связно. Пусть $x\in W\cap \operatorname{Fr} U$ и Ox такая окрестность точки x, что $[Ox]\subset W$ и $[Ox]$ $\mathfrak{M}$-связно. Множество $\operatorname{Fr} U$ разбивает $[Ox]$ и, следовательно, замкнутое множество $[Ox]\cap \operatorname{Fr} U$ разбивает $[Ox]$; кроме того, оно является подмножеством множества H, так как $W\cap \operatorname{Fr} U\subset H$, и, следовательно, $[Ox]\cap \operatorname{Fr} U\in\mathfrak{M}$. Таким образом мы получили противоречие с фактом, что $[Ox]$ $\mathfrak{M}$-связно. Доказательство леммы 1 завершено.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через bX некоторое бикомпактное расширение пространства X. Тогда $bX\setminus X=N_1\cup N_2\cup\ldots$, где N_i — замкнутые подмножества пространства bX. Пусть $a\in X\setminus A$ и $b\in X\setminus A$. Построим последовательности

$$(4)\qquad K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots \quad\text{и}\quad OK_1, OK_2, \ldots, OK_i, \ldots,$$

удовлетворяющие следующим требованиям:

а$_i$) K_i — континуум;

б$_i$) OK_i — открытое связное подмножество пространства X;

в$_i$) $K_i\subset OK_i$ и $OK_i\subset OK_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots$ $(OK_0=X)$;

г$_i$) $[OK_i]_{bX}\cap(F_i\cap N_i)=\varnothing$, $i=1, 2, \ldots$.

Для построения последовательностей (4) нам понадобится следующее вспомогательное утверждение:

Утверждение (У). *Пусть F и N замкнутые подмножества соответственно пространств X и bX, $N\subset bX\setminus X$, U — открытое и связное подмножество пространства X, $a\in U\setminus F$, $b\in U\setminus F$ и $F\in\mathfrak{M}$. Тогда существуют континуум K и открытое в X связное множество OK, для которых $a\in K$, $b\in K$, $K\subset OK\subset U$ и $[OK]_{bX}\cap(F\cup N)=\varnothing$.*

Доказательство. Согласно лемме 1 существует в $U\setminus F$ континуум K, соединяющий a и b. Пусть $x\in K$ и Ox связная открытая в X окрестность точки x, для которой $Ox\subset U$ и $[Ox]_{bX}\cap(F\cup N)=\varnothing$. Из покрытия $\{Ox : x\in K\}$ бикомпакта K можно выбрать конечное подпокрытие $Ox_1, \ldots, Ox_p$. Положим $OK=\bigcup_{i=1}^{p} Ox_i$. Множества K и OK имеют искомые свойства.

Теперь возвратимся к построению последовательностей (4). Положим $U=X$, $F=F_1$, $N=N_1$ и, применяя утверждение (У), построим K_1 и OK_1. Потом положим $U=OK_1$, $F=F_2$, $N=N_2$ и снова применим утверждение (У), чтобы построить K_2 и OK_2. Продолжая таким образом, мы построим искомые последовательности. Тогда $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}[OK_n]$ континуум, $a, b\in C$ и $C\subset X\setminus A$.

Следствие 2 непосредственно получается из теоремы 1 и следующей леммы:

Лемма 3. [8] *Если регулярное пространство X не разрезается никаким счетным объединением своих замкнутых подмножеств, являющихся элементами класса $\mathfrak{M}$, то X сильно $\mathfrak{M}$-связно.*

Доказательство. Допустим, что $X=F_1\cup F_2\cup\ldots$, где F_i замкнутые подмножества пространства X, для которых $F_i\neq X$ и $F_i\cap F_j\in\mathfrak{M}$ при $i\neq j$, и положим $A=\bigcup_{i\neq j}(F_i\cap F_j)$. По предположению A не разрезает X и, следовательно, если $a\in X\setminus A$ и $x\in X\setminus A$, то существует континуум K_x, для которого $a\in K_x$, $x\in K_x$ $K_x\subset X\setminus A$. Существует индекс i_0, для которого $a\in F_{i_0}$. Тогда, согласно теореме Серпинского, $x\in F_{i_0}$ и, следовательно, $X=A\cup F_{i_0}$. Докажем, что $F_{i_0}=X$ — противоречие, завершающее доказательство леммы 3. Допустим, что $F_{i_0}\neq X$ и пусть $x\notin F_{i_0}$ и Ox — окрестность точки x, для которой $[Ox]\cap F_{i_0}=\varnothing$. Тогда $[Ox]\subset A$ и, следовательно, $\operatorname{Fr} Ox=\bigcup_{i\neq j}(F_i\cap F_j$

$\bigcap \operatorname{Fr} Ox$). С одной стороны, множество $\operatorname{Fr} Ox$ разрезает X, а с другой — оно является счетным объединением замкнутых подмножеств пространства X, содержащихся в $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие доказывает, что $F_{i_0}=X$. Доказательство леммы 3 завершено.

Как показывает следующий пример, утверждение, обратное высказанному в лемме 3, ошибочно. Через X обозначим подмножество плоскости:

$$X=\left\{(x, y): \sin \frac{1}{x}-|x| \leq y \leq \sin \frac{1}{x}+|x|,\ 0<|x| \leq 1\right\} \bigcup \{(0, y):|y| \leq 1\}.$$

Пространство X является компактным подмножеством плоскости, которое сильно $\mathfrak{M}_2$-связно, однако разрезается точкой $(0, 0)$.

Определение. *Пусть H подмножество топологического пространства X. Будем говорить, что H локально не разрезает X, если для любой точки x из X существует окрестность Ox, которая не разрезается множеством H.*

Лемма 4. *Если X связно и его подмножество H локально не разрезает его, то оно не разрезает его.*

Доказательство. Пусть $a \in X \setminus H$ и $b \in X \setminus H$. Через U_a обозначим множество всех точек пространства X, для которых существует континуум K_x, соединяющий a и x в $X \setminus H$. Легко проверить, что множество U_a открыто-замкнуто и содержит a. Следовательно оно содержит и b. Лемма доказана.

С помощью теоремы 1 и предшествующей леммы можно легко получить следующее обобщение теоремы 1:

Теорема 2. *Пусть X полное в смысле Чеха связное и локально $\mathfrak{M}$-связное пространство и $H=\bigcup\{F_s: s \in S\}$, где локально-счетное семейство $\{F_s: s \in S\}$ состоит из замкнутых множеств F_s, принадлежащих классу $\mathfrak{M}$. Тогда H не разрезает X.*

Доказательство. Согласно лемме 4 достаточно доказать, что H локально не разрезает X, а это непосредственно следует из теоремы 1 Доказательство теоремы 2 завершено.

Повторяя почти дословно доказательство теоремы 1 и теоремы 2, получаем следующий более общий результат:

Теорема 3. *Пусть W открытое, связное, локально $\mathfrak{M}$-связное и полное в смысле Чеха подмножество регулярного топологического пространства X и $H=\bigcup\{F_s: s \in S\}$, где $F_s \bigcap W$ — замкнутые подмножества в индуцированной топологии множества W, $F_s \in \mathfrak{M}$ и семейство $\{F_s: s \in S\}$ — локальносчетно на множестве W. Тогда H не разрезает W.*

Заметим, что если W' является открытым и связным подмножеством W, то для него тоже выполнены предположения теоремы 3 и, следовательно, H не разрезает W'. В частности, можно утверждать, что W локально не разрезается множеством H.

В случае, когда W дополнительно предполагается метризуемым, однако семейство $\{F_s: s \in S\}$ счетно, тогда можно утверждать даже больше:

Следствие 3. *В предположениях теоремы 3, если W метризуемо, однако $|S|=\aleph_0$, можно утверждать, что дополнение $W' / \bigcup\{F_s: s \in S\}$ линейно связно для любого открытого и связного подмножества W', $W' \subset W$.*

В частности, если W открытое и связное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, а A — F_σ-подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim A \leq n-2$, то множество $W \setminus A$ линейно связно и локально линейно связно.

Мазуркевич [1, с. 464] доказал, что если W открытое и связное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, а M произвольное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim M \leq n-2$, то M не разрезает W. В [3] был построен пример компактного и $\mathfrak{M}_2$-связного подмножества плоскости, которое не сильно $\mathfrak{M}_2$-

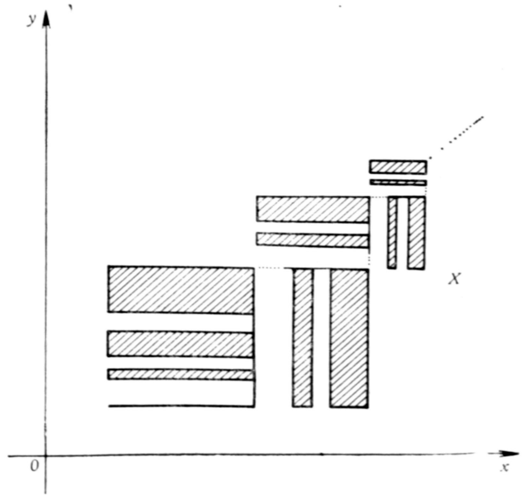

Рис. 1

связно. Это пространство X (см. рис. 1) не разбивается никаким нульмерным подмножеством, как это устанавливается при помощи теоремы Мазуркевича. Следовательно в лемме 3 нельзя заменить требование неразрезаемости F_σ-подмножеством более слабым требованием о неразбиваемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Куратовский. Топология, т. 2. Москва, 1969.
2. П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики, т. 1. Москва, 1951.
3. Н. Хаджииванов. Свързаност. Математика и математическо образование. Доклади на Трета пролетна конф. на БМД, 2—4 април 1974. София, 1976, 286—291.
4. N. Hadjiivanov, A. Hamamdjiev. An example of a compact Hausdorff $\mathfrak{M}$-connected space which is not strongly $\mathfrak{M}$-connected. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **29**, 1976, No. 5, 613—614.
5. Н. Хаджииванов. О продолжении отображений в сферы и о счетных разложениях тихоновских кубов. *Мат. сб.*, **84**, 1971, № 1, 119—140.
6. J. Wilkinson. A lower bound for the dimension of certain G_δ-set in completely normal spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**, 1969, 175—178.
7. N. Hadjiivanov. On infinite-dimensional Cantor manifolds. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 8 Topics in topology, Keszthely (Hungary), 1972, 355—363.
8. Н. Хаджииванов. О счетных объединениях замкнутых множеств, попарные пересечения которых имеют ограниченную размерность. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 6, 779—782.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София *П. Я. 373*

Поступила 29. 6. 1976.