Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

МНОЖЕСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ, ЗАМКНУТЫХ ПО ОТНОШЕНИЮ К КАЖДОМУ ИЗ ЧЕТЫРЕХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

БЛАГОВЕСТ П. ДАМЯНОВ, ДИМИТЪР Л. ДАНОВ, ХРИСТО Я. ХРИСТОВ

В множестве всех асимптотических чисел [6, 7] решаются четыре задачи — о нахождении всех их подмножеств, замкнутых относительно каждого из четырех основных алгебраических действий [6]. Каждому такому замкнутому набору сопоставляется взаимно-однозначно базис, элементы которого не получаются друг от друга указанным действием, но все остальные элементы получаемы из них. Для каждого типа искомых наборов дана процедура, которая сводит построение набора (и его базиса) к элементарным арифметическим и группово-теоретическим операциям над множеством целых чисел. Некоторые из этих операций — выбор элемента n или подмножества элементов $\mathbf{n}$ из данного множества N^* — включают свободные параметры. Процедуры состоят из последовательных повторений заданных циклов операций, причем мы имеем свободу после каждого цикла приостановить их последовательность ($\varkappa=-1$) или продолжить ее ($\varkappa=1$). Все эти три типа степеней свободы ($\varkappa=0$ или 1, выбор $n\in N^*$ и выбор $\mathbf{n}\subseteq N^*$) параметризуют объединение замкнутых наборов каждого типа, так что этим дано представление о том, насколько эти объединения богаты.

I. Постановка задачи.

1. Имеется ряд обобщений понятий числа [1, 2, 3] и функций [2, 4, 5]. Нами также были предложены такие обобщения: асимптотические числа [6] и асимптотические функции [7]. Они введены ввиду некоторых их применений в квантовой механике, точнее — в теории рассеяния, но нам кажется, что они обладают интересными свойствами и сами по себе как математические объекты. В [6] были введены все алгебраические операции над асимптотическими числами и некоторые, как мы их назвали, квазиклассические функции над ними.

Как в обычной, так и в обобщенных алгебрах, интересным является вопрос о нахождении подмножеств рассматриваемых объектов — чисел в обычном или обобщенном смысле, которые замкнуты по отношению к заданным комбинациям алгебраических действий. Именно этот вопрос мы ставим по отношению к асимптотическим числам, но здесь ограничимся подмножествами, замкнутыми по одному действию. Все утверждения будут справедливы как в множестве вещественных, так и комплексных асимптотических чисел. Будем пользоваться определениями и обозначениями в [6].

2. Ясно, например, что если все коэффициенты главных частей всех асимптотических чисел положительны или целы, то множество будет замкнутым по сложению, соответственно по сложению, вычитанию и умножению. Если коэффициенты имеют вид $a+b\sqrt{2}$ (a и b рациональны), множество будет замкнуто по всем действиям и т. д. Однако утверждения такого рода аналогичны таковым в обычной алгебре чисел, и мы ими здесь

заниматься не будем. Чтобы ограничиться специфическими для асимптотических чисел случаями, мы поставим следующее ограничение.

C_1. Замкнутые множества, которые будем искать, составлены из полных элементарных множеств A_ϱ [6; опр. 14], т. е. если некоторое число $a=(\nu, N, a_n)$ $(n \in N,\ a_n \neq 0)$ [6; (1, 7)] находится в рассматриваемом замкнутом множестве, то в него входят и все числа с теми же ν и N и любыми, необязательно отличными от нуля, $a_n (n \in N)$.

3. Элементарные множества A_ϱ будем называть короче элементами. Будем обозначать их через $\varrho=(\nu, N)=(\lambda, \mu, M)$ [6; (1, 17)]. Искомые замкнутые подмножества в множестве всех асимптотических чисел **A**, рассматриваемые как составленные из элементов, назовем наборами **ρ**.

Введем некоторые обозначения. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}$ $(m_0=0)$ — числа спектров N и M, причем k — множественность чисел в N или, все равно, M. Если $\varkappa \in N$, то $N_{(\varkappa)}$, $N_{[\varkappa]}$, $N^{(\varkappa)}$, $N^{[\varkappa]}$ есть те части N, для которых $n>\varkappa$, $n \geq \varkappa$, $n<\varkappa$, $n \leq \varkappa$ соответственно. Обозначим через Z, Z_+, Z_0 множества всех целых, естественных и целых неотрицательных чисел n, а через $Z_{-\varepsilon}$ — множество, которое получается из Z_0 добавлением еще одного числа — малого отрицательного числа $-\varepsilon$. Через $\widetilde{Z}$, $\widetilde{Z}_+$, $\widetilde{Z}_0$, $\widetilde{Z}_{-\varepsilon}$ обозначим указанные множества, к которым добавлено число ∞ (больше всех чисел $n \in Z$). Проекцией $\boldsymbol{\mu}^X$ данного спектра $\boldsymbol{\mu}$ назовем множество всех чисел, представимых в виде $\mu=l_1\mu_1+\cdots+l_n\mu_n$, причем $\mu_i \in \boldsymbol{\mu}$, $l_i \in Z_0$, не все $l_i=0$. Если спектр $M \subseteq Z_0$ элемента $\varrho=(\lambda, \mu, M)$ имеет длину λ $(M \subseteq Z_0^{[\lambda]})$, то проекция M^X спектра M будет иметь ту же самую длину — $m \in M^X$, если $m=\Sigma_i l_i m_i$ (не все $l_i=0$) и $m \leq \lambda$. Спектр M назовем регулярным, если он содержит число 0, и насыщенным, если из $m_1, m_2 \in M$ и $m_1+m_2 \leq \lambda$ следует $m_1+m_2 \in M$. Проекция M^X любого спектра M насыщена. Минимальное подмножество насыщенного спектра M, проекция которого совпадает с M, назовем базисом B. Каждый насыщенный спектр M имеет только один базис, который даже при $\lambda=\infty$ состоит из конечного множества чисел m^*. Если λ достаточно большое, при $m>s$ (s — наименьшее общее кратное чисел $m^* \neq 0$) спектр M становится просто-периодичным: $m=k \cdot m_0$, причем m_0 — наибольший общий делитель чисел $m^* \neq 0$. Эти утверждения, как и ряд подобных далее, доказываются при помощи теории сравнений в множестве целых чисел [8]. Мы не будем приводить эти доказательства. Если же в спектр $\boldsymbol{\mu}$ входят как положительные, так и отрицательные числа, то он просто-периодичен: $\boldsymbol{\mu}=\{\mu : \mu=k \cdot \mu_0,\ \mu_0 \in \widetilde{Z}_+,\ k \in Z\}$. Число μ_0 назовем шагом спектра $\boldsymbol{\mu}$. В этом случае базис неоднозначен: любые два числа μ_1 и μ_2, такие, что $\mu_1 \cdot \mu_2<0$ и наибольший их делитель равен μ_0, задают базис. Стандартным назовем базис, составленный из чисел $\mu_1=-\mu_0$ и $\mu_2=\mu_0$, причем условие стандартности будем подразумевать. Если $\mu_0=\infty$, то $\boldsymbol{\mu}$ состоит из единственного числа $\mu=0$.

Насыщенным по вычитанию назовем спектр $\boldsymbol{\mu}$ со свойством, что если $\mu', \mu'' \in \boldsymbol{\mu}$, то и $\mu'-\mu'' \in \boldsymbol{\mu}$. Спектр такого типа просто-периодичен. Базис B насыщенного по вычитанию спектра $\boldsymbol{\mu}$ — минимальное подмножество $\boldsymbol{\mu}$, такое, что все элементы $\boldsymbol{\mu}$ можно получить из B применением операции вычитания. Каждый насыщенный по вычитанию спектр $\boldsymbol{\mu}$ имеет два базиса, каждый из одного элемента $B_+=\{\mu_0\}$ и $B_-=\{-\mu_0\}$. Первый из них назовем стандартным и стандартность будем подразумевать.

Полезными для дальнейшего будут понятия уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$, цепочки $\boldsymbol{\rho}_\nu$ и ячейки $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu}$ данного набора $\boldsymbol{\rho}$. Это подмножества $\boldsymbol{\rho}$, составленные из всех

$\varrho \in \mathbf{\rho}$ с заданным значением λ, соотв. с заданным ν и с заданными λ и μ (а следовательно и $\nu=\lambda+\mu$).

4. Примем следующий способ геометрического представления элементов $\varrho=(\nu, N)=(\lambda, \mu, M)$. Если ν конечно, то ϱ обозначим цепочкой точек (точнее — кружков) на прямой $x+y=\nu$ с координатами $x=n$, $y=\nu-n$ $(n \in N)$ или все равно $x=\mu+m$, $y=\lambda-m$ $(m \in M)$. Они соединены линией, заканчивающейся вправо и вниз стрелкой, идущей до уровня $y=-1$. Если $\nu=\infty$, то элемент обозначим цепочкой точек кружков) на прямой $y=y_\infty$ координатами $x=n$, $(n \in N)$ или все равно $x=\mu+m$ $(m \in M)$. По идее y_∞ (такое „большое", что когда изображаем все элементы данного набора, прямая $y=y_\infty$ была бы над всеми цепочками, соответствующими элементам с конечным ν (рис. 1). Если на одну прямую $x+y=\nu$ или $y=y_\infty$ попадают несколько цепочек, то мы изображаем их на очень близких прямых $x+y=\nu+\varepsilon_i$, соотв. $y=y_\infty+\varepsilon_i$, так, чтобы бо̀льшим значениям μ соответствовали бо̀льшие значения ε_i. Этот способ изображения элементов удобен, потому что, как мы увидим, условия сослагательности, умножительности и т. д. ведут к простой геометрической интерпретации.

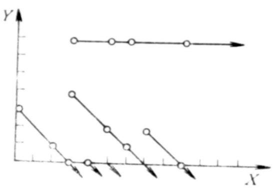

Рис. 1

5. Если a' и a'' пробегают все числа элементов $\varrho'=(\nu', N')$ и $\varrho''=(\nu'', N'')$, то $a=a'+a''$, а также и $a=a'-a''$ будут покрывать точно все числа одного элемента

$$(1) \qquad \varrho=(\nu, N): \ \nu=\min(\nu', \nu''), \ N=(N' \cup N'')^{[\nu]}$$

[6, III]. Поэтому мы можем писать $\varrho=\varrho' \pm \varrho''$, т. е. возникает некоторая более простая алгебра элементов ϱ (в которой сумма совпадает с разностью). Но, к сожалению, в случае умножения и деления это свойство нарушается — когда $a' \in \varrho'$ и $a'' \in \varrho''$, то $a=a'.a''$ и $a=a'/a''$ могут принадлежать различным элементам $\varrho_{\varkappa'\varkappa''}$, где $\varkappa'$ и $\varkappa''$ степени a' и a'', которые могут не совпадать со степенями μ' и μ'' элементов ϱ' и ϱ''. При этом, чтобы объединить случаи ненулевых и нулевых значений a' a'', примем, что параметр $\varkappa$, соответствующий заданному элементу ϱ, пробегает все значения спектра N и вдобавок, когда $a=o_\nu$, принимает значение $\nu+\varepsilon$ (ε — малое положительное число). Точное значение ε несущественно, и поэтому во всех случаях мы будем обозначать его одной буквой. Чтобы облегчить ситуацию, мы поставим условие

C_2. Если аргументы ϱ' или ϱ'' не ноль, т. е. не сводятся к $o_{\nu'}$, соотв. $o_{\nu''}$, замкнутость при умножении и делении потребуем только в случае, когда старший коэффициент $a'_{\mu'}$, соотв. $a''_{\mu''}$, не ноль. (В случае деления знаменатель, конечно, не может быть нулем.)

Это не означает, что числа с нулевыми старшими членами a_μ исключаются из элементов ϱ, а только то, что если $a_\mu=0$, замкнутость при умножении и делении не обязательна. Ситуация аналогична таковой в обычной алгебре в случае деления на ноль — число 0 существует, но деление на него не дает результата, который находится среди введенных чисел. Однако здесь нарушение замкнутости обнаруживается и в других случаях. Условие C_2 не имеет, конечно, принципиального характера — оно введено для простоты, в дальнейшем от него мы освободимся. Ввиду C_2 параметры $\varkappa'$ и $\varkappa''$

оказываются лишними — мы берем как результат только один элемент $\varrho_{\varkappa'\varkappa''}$ — таковой при $\varkappa'=\mu'$ и $\varkappa''=\mu''$. Он содержит не все, но „почти все" числа $a=a'.a''$, соотв. $a=a'/a''$ $(a'\in\varrho',\ a''\in\varrho'')$ — множество произвольных коэффициентов в $\varrho_{\mu'\mu''}=\varrho$ больше чем в любом из остальных $\varrho_{\varkappa'\varkappa''}$.

Получаем, что произведение и частное элементов ϱ' и ϱ'' будут задаваться через

(2) $$\lambda=\min(\lambda',\lambda''),\ \mu=\mu'+\mu'',\ M=(M'+M'')^{[\lambda]},$$

соответственно

(3) $$\lambda=\min(\lambda',\lambda''),\ \mu=\mu'-\mu'',\ M=(M'+M''^{X})^{[\lambda]}.$$

Ввиду C_1 и C_2 вопрос о нахождении всех замкнутых подмножеств асимптотических чисел сводится к тому же вопросу в алгебре элементов, задаваемой через (1) — (3), а ввиду (1) ясно, что вычитательные наборы совпадают с сослагательными, так что нам остается рассмотреть три типа замкнутых наборов: сослагательные, умножительные и делительные.

6. Каждому набору элементов соответствует только одно множество принадлежащих чисел, но могут быть различные наборы, которым соответствует одно и то же множество чисел. Эти наборы мы назовем эквивалентными. Чтобы упростить ситуацию, обеспечивая взаимную однозначность соответствия, мы поставим условие

C_3. Будем работать только максимальными наборами элементов $\mathbf{\rho}$, к которым мы не можем добавить новый элемент $\mathbf{\rho}$: а) без изменения множества чисел, и б) без изменения содержания условия замкнутости.

Смысл требования а) ясен — иначе мы бы перешли к другому набору, который неэквивалентен исходному. Что касается требования б), то оно связано с условием C_2 — если добавляем элемент ϱ', числа которого содержатся среди чисел $\varrho\in\mathbf{\rho}$, мы должны иметь еще $\mu'=\mu$, так как иначе изменятся условия замкнутости в случае умножения или деления.

Чтобы проще сформулировать эти условия, введем понятия подчиненных и доминирующих элементов. Будем говорить, что элемент ϱ' подчинен ϱ или ϱ доминирует над $\varrho'(\varrho'\subseteq\varrho)$, если $\nu'=\nu$ и $N'\subseteq N$, т. е. если все числа в ϱ' содержатся в ϱ. Тогда, если задан некоторый замкнутый набор $\mathbf{\rho}$ и мы хотим перейти к соответствующему максимальному набору, требование а) означает, что мы можем добавлять только элементы ϱ', подчиненные некоторому из уже введенных ϱ, а условие б) указывает, что элементы ϱ' должны иметь ту же самую степень, как и ϱ: $\mu'=\mu$. Иными словами, пополнение набора должно идти по ячейкам.

7. Введем понятие проекции $\mathbf{\rho}^X$ данного (в общем незамкнутого) набора $\mathbf{\rho}$ как множество тех элементов, которые получаются из $\mathbf{\rho}$ при помощи заданного алгебраического действия, причем мы можем применять его конечное или бесконечное множество раз. Следовательно, проекцию подразумеваем по отношению к указанному действию — к сложению, умножению или делению.

Введем еще два понятия: λ-покрытия $\widetilde{\mathbf{\rho}}$, и μ-покрытия $\overline{\mathbf{\rho}}$ данного набора $\mathbf{\rho}$. Первое получается добавлением всех элементов $\widetilde{\varrho}$ бесконечной точности $(\widetilde{\lambda}=\infty)$ со свойством, что если $\widetilde{\mu}$ — степень, а $\widetilde{M}$ — относительный спектр $\widetilde{\varrho}$, то в $\mathbf{\rho}$ должна существовать бесконечная последовательность элементов: ϱ_i, такие, что $\mu_i=\widetilde{\mu}$, $\lambda_i\to\infty$ и $M_i\supseteq\widetilde{M}^{[\lambda_i]}$. Покрытие μ-типа получим, если добавим все элементы $\bar{\varrho}=(\bar{\nu}, \bar{N})$ с неограниченными снизу спектрами, которые являются объединениями спектров N_i элементов $\varrho_i \in \boldsymbol{\rho}$ той же точности $\nu=\nu_i$. Каждому набору $\boldsymbol{\rho}$ соответствует один набор $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, один $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ и один $\tilde{\bar{\boldsymbol{\rho}}}$.

Базисом β заданного замкнутого набора $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ назовем такое подмножество его элементов ϱ_i^*, что: а) множество элементов их проекций по указанному действию совпадает с множеством элементов $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$; б) не существует другое множество β' с тем же свойством а), являющееся подмножеством β.

Базис β существует, и именно, чтобы обеспечить это, в определении участвует $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$, а не $\boldsymbol{\rho}$. Но при умножении и делении он не единствен. А именно, если набор $\boldsymbol{\rho}$ умножителен и если среди его элементов участвуют $\varrho_k=(\lambda, k \times \mu, M)$, где $\mu>0$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а спектр M насыщен, то базисом для них могут служить элементы $\varrho_{\alpha-}^*=(\lambda, k_{\alpha-} . \mu, K_\alpha)$ и $\varrho_{\alpha+}^*=(\lambda, k_{\alpha+} . \mu, K_\alpha)$, где K_α — базисные элементы M, а $k_{\alpha-}$ и $k_{\alpha+}$ — пары взаимнопростых чисел обратных знаков. Если набор делителен и в нем участвуют те же самые элементы ϱ_k, то в базисе им соответствуют элементы $\varrho_{\alpha,\varkappa_\alpha}^*=(\lambda, \varkappa_\alpha\, \mu, K_\alpha)$ при любом выборе $\varkappa_\alpha=\pm 1$. Назовем стандартными те базисы умножительных, соотв. делительных наборов, элементы которых имеют степени μ, совпадающие со стандартными базисными числами спектров $\boldsymbol{\mu}$ (см. п. 3). Стандартность будем подразумевать. Введение базисов имеет целью сведение задачи к построению более простых структур, которые все же однозначно определяют искомые замкнутые наборы.

II. Общая схема процедуры построения

1. Мы могли бы предложить следующую процедуру для получения любого замкнутого набора $\boldsymbol{\rho}$:

1′. Выбираем один элемент ϱ_1^* из $\boldsymbol{\rho}_A$ и включаем его в базис β искомого набора $\boldsymbol{\rho}$.

1″. Добавляем все элементы его проекции $\boldsymbol{\rho}_1=(\varrho_1^*)^X$. Они дают замкнутый набор $\boldsymbol{\rho}_1$ с базисом ϱ_1^*.

1‴. Составляем множество $\boldsymbol{\rho}_1'=\boldsymbol{\rho}_A \setminus \boldsymbol{\rho}_1$.

2′. Чтобы расширить $\boldsymbol{\rho}_1$, выбираем среди $\boldsymbol{\rho}_1'$ элемент ϱ_2^* такой, чтобы ϱ_1^* не принадлежал проекции ϱ_2^*.

2″. Составляем замкнутый набор $\boldsymbol{\rho}_{12}=(\varrho_1^*, \varrho_2^*)^X$ с базисом $(\varrho_1^*, \varrho_2^*)$.

2‴. Составляем $\boldsymbol{\rho}_{12}'=\boldsymbol{\rho}_A \setminus \boldsymbol{\rho}_{12}$.

3′. Выбираем среди $\boldsymbol{\rho}_{12}'$ элемент ϱ_3^* такой, что никакой из элементов ϱ_1^*, ϱ_2^* не принадлежал бы проекции ϱ_3^* и другого из них.

3″. Составляем замкнутый набор $\boldsymbol{\rho}_{123}=(\varrho_1^*, \varrho_2^*, \varrho_3^*)^X$ базисом $(\varrho_1^*, \varrho_2^*, \varrho_3^*)$.

3‴. Составляем $\boldsymbol{\rho}_{123}'=\boldsymbol{\rho}_A \setminus \boldsymbol{\rho}_{123}$ и т. д.

Мы можем приостановить эту процедуру в любой момент после нахождения базиса $(\varrho_1^*, \ldots, \varrho_n^*)$ и набора $\boldsymbol{\rho}_{1,\ldots,n}=(\varrho_1^*, \ldots, \varrho_n^*)^X$ или продолжить ее, пока множество $\boldsymbol{\rho}_A \setminus \boldsymbol{\rho}_{1,\ldots,n}$ не окажется пустым. Таким путем мы можем получить все замкнутые наборы,причем различным комбинациям элементов $(\varrho_1^*, \ldots, \varrho_n^*)$ соответствуют различные замкнутые наборы. Эта процедура правильна, однако практическое ее выполнение очень затруднительно, потому что каждое из указанных действий содержит бесконечное множество элементарных арифметических и теоретико-множественных операций.

Корректная постановка вопроса о процедуре построения замкнутых наборов требует, естественно, указать, к каким операциям мы хотим свести ее. В данном случае мы потребуем, чтобы процедура сводилась к элементарным арифметическим и теоретико-множественным операциям над множеством целых чисел, как:

O_1. Выбрать произвольный элемент n из данного множества $N^* \subseteq \widetilde{Z}$.

O_2. Выбрать произвольное подмножество $\mathbf{n}$ из N^*.

O_3. Составить объединение $N = N_1 \cup N_2$ или сечение $N = N_1 \cap N_2$.

O_4. Составить (прямую) сумму $N = N_1 + N_2 = \{n : n = n_1 + n_2,\ n_1 \in N_1,\ n_2 \in N_2\}$.

O_5. Составить проекцию M^X спектра M длиной λ.

O_6. Найти все подмножества N данного множества N^*, в частности, если множество N^* неограниченно снизу, найти все ограниченные снизу его подмножества N.

Операции O_1 и O_2 в отличие от остальных содержат некоторую свободу. Каждый раз, когда их применяем, мы вносим в процедуру добавочный свободный параметр — выбор n или $\mathbf{n}$ из N^* — некоторого подмножества $\widetilde{Z}$. Отсюда вытекает возможность получать различные замкнутые наборы.

2. Если для выбора каждой из элементарных операций, из которых составлена процедура построения, мы должны указывать отдельное правило, то когда множество операций бесконечно, хотя и только счетно, каково оно обычно и есть, построение было бы практически невыполнимым. Во избежание этого затруднения мы предложим рекуррентные процедуры, составленные из последовательностей (лестниц) однотипных циклов (ступеней) элементарных операций, задаваемых одним и тем же правилом. Каждая ступень, помимо других операций, содержит одну или несколько операций типа O_1 или O_2, чем задаются свободные параметры $n \in N^*$ или $\mathbf{n} \subseteq N^*$, характеризующие создаваемый замкнутый набор $\boldsymbol{\rho}$. На каждой последующей ступени условия будут меняться в зависимости от того, какие выборы были совершены на предыдущих ступенях, но правило построения остается одним и тем же. В этом состоит рекуррентность процедур. После завершения каждой ступени перед нами две возможности: закончить лестницу на этом месте или, если это возможно, приступить к следующей ступени, используя рекуррентное правило. Этим вводится еще один класс свободных параметров $\varkappa$, принимающих два значения: -1 и $+1$ — закончить лестницу или продолжить ее.

Поставим еще условие

C_4. Соответствие между замкнутыми наборами и определяющими их параметрами типа n, $\mathbf{n}$ и $\varkappa$ должно быть взаимнооднозначным.

Соблюдение этого условия дает возможность оценить, насколько богато объединение замкнутых наборов каждого типа.

3. В качестве самого простого примера лестничной схемы построим один насыщенный спектр M_λ и его базис B.

1'. Если множество $M_1^* = \{m : 0 \le m \le \lambda\}$ непустое (т. е. если $\lambda \ge 0$), выбираем число $m_1^* \in M_1^*$ как элемент базиса B.

1''. Строим проекцию $M_1 = (m_1^*)^X$ длиной λ.

1‴. Строим множество $M_2^* = (M_1^* \setminus M_1)_{(m_1^*)}$.

2′. Если множество M_2^* непустое, выбираем элемент $m_2^* \in M_2^*$ как второй элемент базиса B.

2″. Строим проекцию $M_2 = (m_1^*, m_2^*)^X$ длиной λ.

2‴. Строим множество $M_3^* = (M_1^* \setminus M_2)_{(m_2^*)}$ и т. д.

Числа 1, 2, ... задают ступени, а верхние индексы ′, ″, ‴ указывают операции, включенные на каждой ступени. Они, очевидно, однотипные. Процедура продолжается, пока множество M_i^* не окажется пустым или, если оно непустое, пока мы не решим закончить лестницу. Ввиду того, что множественность базиса насыщенного спектра M конечна (даже и при $\lambda = \infty$), то эта лестница всегда будет иметь конечное число ступеней, хотя в зависимости от выбора m_i^* оно может быть неограниченно большим.

4. Процедуры, которые предложим, будут содержать конечное число лестниц. Последние могут быть двух типов: прямые и двойные. Лестница прямая, если на каждой ее ступени задается полностью один базисный элемент или некоторое их множество. Она двойная, если составлена из одной главной лестницы, на каждой ступени которой задается одна часть параметров ν, N или λ, μ, M, задающих каждый базисный элемент (напр., ν или λ и μ), а после каждой ступени следует дополнительная лестница, ступени которой задают остальную часть параметров (N, соотв. M).

Каждая лестница — самостоятельно существующая, главная или дополнительная — может быть, со своей стороны, простая или составная. Ступени простой лестницы составляют вполне упорядоченное множество, подобное множеству естественных чисел или некоторой его части, а составная лестница состоит из секций, формирующих ступени одной лестницы, причем каждая секция, со своей стороны, представляет также простую лестницу. Следовательно ступени S_i простой лестницы нумируются одним индексом $i = 0, 1, 2, \ldots$, а ступени S_{ij} составной лестницы — двумя индексами $i, j = 0, 1, 2, \ldots$: первый, задающий секцию, а второй — ступень соответствующей секции.

Ввиду того, что $\boldsymbol{\lambda} \subseteq \widetilde{Z}_{-\varepsilon}$, если индекс λ задает ступени S_λ, то ясно, что лестница будет составлена из двух секций, причем вторая содержит только одну ступень S_∞. Такую лестницу назовем лестницей типа $\widetilde{L}_{-\varepsilon}$. А ввиду того, что $\boldsymbol{\nu} \subseteq \widetilde{Z}$, ясно, что если ступени задаются индексом ν, то лестница будет составлена из трех секций: $\nu = -1, -2, \ldots$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и $\nu = \infty$. Такую лестницу назовем типа $\widetilde{L}$. В этих случаях, конечно, ступени можно задать одним индексом, хотя и лестницы составные.

5. Как было отмечено, множество ступеней в каждой секции счетно или, пожалуй, конечно. После построения каждой ступени мы должны проверить, имеется ли возможность приступить к следующей ступени и продолжить лестницу, или же мы должны закончить ее. Если продолжение возможно, мы имеем свободу использовать эту возможность и построить следующую ступень или отказаться от нее и закончить секцию. Это связано, например, с тем, что, как мы видели, построение насыщенного спектра M сводится к нахождению его базисных чисел m^*, а их множественность нельзя ограничить заранее — мы имеем право добавлять новые, хотя и обяза-

тельно прийдет момент, когда спектр становится плотным и дальше не будет возможно добавлять новые числа m^*. Каждая простая секция характеризуется числом своих ступеней k, которое представляет собой еще один свободный параметр. Однако, как мы указали, он в общем не может возрастать неограниченно — имеется некоторое максимальное допустимое его значение k^*. Это значение k^* зависит сложным образом от того, какие выборы свободных параметров мы совершили на предыдущих ступенях, и поэтому свободным параметром мы берем не k $(k \leq k^*)$, а двузначные переменные $\varkappa_i = \pm 1$, которые мы сопоставляем со ступенями S_i $(i \leq k^*)$ и которые указывают на то, хотим ли мы продолжить лестницу $(\varkappa_i = 1)$ или нет $(\varkappa_i = -1)$.

Множество ступеней каждой лестницы — прямой или двойной, простой или составной — счетно, так что мы могли бы нумеровать ее ступени одним только индексом, пробегающим множество естественных чисел. Но тогда правило построения каждой отдельной ступени сильно бы усложнилось, а даже и иногда будет невозможно задать его, потому что порядок построения ступеней не без значения.

6. Эта схема общей процедуры построения важна, во-первых, потому что таким образом множество элементарных операций получается вполне упорядоченным: всегда будем знать, к какой операции мы должны приступить. Она важна и потому, что дальше задача построения каждого типа замкнутых наборов сводится к указанию операций, содержащихся в одной произвольной ступени каждой секции данной лестницы. При этом правило построения ступеней дополнительных лестниц одно и то же, по крайней мере для тех, которые соответствуют ступеням одной секции главной лестницы. Этим достигаем то, что в общем бесконечное множество операций, содержащихся в процедуре построения, сводится к конечному множеству правил.

7. До сих пор нами не было поставлено никакого ограничения относительно множества операций. Как мы упомянули, оно вполне упорядочено, но в этом нет ограничения на их количество. В связи с этим сформулируем еще следующее условие

C_5. Множество операций счетно и вполне упорядочено. Его упорядоченность подобна упорядоченности множества свободных параметров или, все равно, упорядоченности ступеней.

В связи с тем, что мы имеем возможность обрывать лестницы, множество наборов разлагается на классы, каждый со своим множеством секций, ступеней и свободных параметров. Каждой ступени и каждому параметру соответствует конечное множество элементарных операций. В частности, если множества ступеней и параметров конечны, таким должно быть и множество операций.

8. В некоторых случаях понадобится использовать еще одну элементарную операцию

O_7. Проверить, является ли некоторое заданное множество (целых чисел) N^- подмножеством другого, тоже заданногс множества (тоже целых чисел) N^+.

Необходимость этой дополнительной операции возникает из-за следующего. Операция O_1 подразумевает, что множество N^* уже известно — задано или найдено. Иногда, однако, мы будем в состоянии задать не это множество N^*, а только другое, более обширное, множество N^0 предварительно допустимых значений n, которые удовлетворяют только некоторым более общим, необходимым, но еще недостаточным условиям. Критерий действительной принадлежности n (из N^0) к N^* будет задаваться в виде

$$N^- \subseteq N^+, \tag{4}$$

где N^- и N^+ — два надлежащим образом определенных множества. Они по заданному правилу сопоставлены с каждым n из N^0. Мы могли бы попробовать составить множество всех n из N^0, которые удовлетворяют условию самосогласованности (4), и таким образом найдем N^*, однако делать это мы не всегда можем, потому что множество N^0 в общем бесконечно, и мы нарушили бы условие C_5. Обнаруживая, что данное n из N^0 удовлетворяет (4), мы можем взять его и тем самым исполнить операцию O_1, хотя и множество N^* нам неизвестно. При этом оказывается, что этим способом мы можем получить каждое допустимое оформление соответствующей ступени. Эту более сложную процедуру, которой иногда будем пользоваться, назовем самосогласованностью.

III. Сослагательные наборы.

1. Отметим сначала некоторые свойства сослагательных наборов, которые будут полезны, когда будем задавать процедуру их построения. Если $\varrho_1 = (\nu, N_1)$, $\varrho_2 = (\nu, N_2)$ — элементы одной и той же точности, которые принадлежат $\boldsymbol{\rho}$, то очевидно элемент $\varrho = (\nu, N_1 \cup N_2)$ также будет принадлежать $\boldsymbol{\rho}$. Отсюда получаем, что если $\mathbf{v}$ — спектр точностей элементов, представленных в $\boldsymbol{\rho}$, то каждому $\nu \in \mathbf{v}$ соответствует спектр N_ν, точно покрывающий все спектры элементов цепочки $\boldsymbol{\rho}_\nu$. Он может быть неограничен снизу, т. е. $\varrho_\nu = (\nu, N_\nu) \in \boldsymbol{\rho}$. Спектры $\mathbf{v}$ и N_ν $(\nu \in \mathbf{v})$ однозначно определяют весь набор $\boldsymbol{\rho}$ — цепочке $\boldsymbol{\rho}_\nu$ принадлежат все элементы с точностью ν и с ограниченными снизу спектрами $N \subseteq N_\nu$.

Спектры N_ν не произвольны. Они удовлетворяют соотношению

$$N_\nu^{[\nu^-]} \subseteq N_{\nu^-} \text{ или все равно } N_{\nu^+}^{[\nu]} \subseteq N_\nu \quad (\nu \in \mathbf{v}),$$

где ν^- и ν^+ — предшествующее, соотв. следующее ν число из спектра $\mathbf{v}$. Конечно, если ν — первое число в $\mathbf{v}$, то первое из этих условий выпадает а если ν — последнее, то выпадает второе условие. Если спектр $\mathbf{v}^{(\infty)}$ неограничен сверху и $\infty \in \mathbf{v}$, мы будем говорить, что осуществляется случай E. В этом случае при $\nu = \infty$ вышеприведенные условия заменяются на

$$N_\infty^{[\nu]} \subseteq N_\nu \quad (\nu \in \mathbf{v}^{(\infty)}).$$

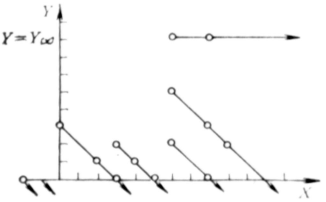

Рис. 2

2. Пользуясь графиком на рис. 1, мы можем изобразить $\boldsymbol{\rho}$, как показано на рис. 2. Условие сослагательности выражается тем, что если мы проектируем точки некоторой цепочки на другую нижележащую, то ни одна точка проекции не должна попадать вне точек этой цепочки.

3. Процедура построения — прямая лестница из трех секций — типа $\tilde{L}$. На каждой ступени задаем одно значение $\nu \in \mathbf{v}$ и соответствующий покры-

вающий спектр N_ν. Первая секция охватывает отрицательные ν в низходящем порядке. Ступень L_ν включает следующие операции:

1) Выбираем $\nu<\nu^+$ (ν^+ — последнее (наименьшее), уже выбранное $\nu\in\mathbf{v}$).
2) Выбираем N'_ν — подмножество из $N^0_\nu=Z^{[\nu]}\setminus N^{[\nu]}_{\nu+}$.
3) Составляем

$$N_\nu=N^{[\nu]}_{\nu+}\cup N'_\nu.$$

Вторая секция охватывает конечные неотрицательные ν:

1) Выбираем $\nu>\nu^-$ (ν^- — наибольшее, уже выбранное $\nu\in\mathbf{v}$).
2) Выбираем $N'_\nu\subseteq N_{\nu-}$ и $N''_\nu\subseteq Z^{[\nu]}_{(\nu-)}$.
3) Формируем

$$N=N'_\nu\cup N''_\nu.$$

Третья секция содержит только элемент $\varrho_\infty=(\infty, N_\infty)$ и сводится к:

1) Строим сечение

$$S_\nu=\bigcap_{\nu'} N^{(\nu)}_{\nu'(\nu-)}\quad (\nu'\in\mathbf{v}_{[\nu-]}\nu\in\mathbf{v}^{(\infty)}).$$

2) Строим объединение

$$S=\bigcup_{\nu} S_\nu\quad (\nu\in\mathbf{v}^{(\infty)}).$$

3) Выбираем

$$N_\infty\subseteq S.$$

Первые две секции содержат бесконечные множества ступеней, а третья — всего одну ступень. Конечно, по общему правилу мы можем приостановить любую из первых двух этих секций и раньше, а третью можем не строить.

4. Нетрудно обобщить эту процедуру и свести ее к одной простой лестнице. Будем строить ступени в любом порядке, нумеруя их естественными числами. Правила следующие:

1) Берем $\nu\notin\mathbf{v}'$ ($\mathbf{v}'$ — множество уже введенных значений ν).
2) Находим ν^- и ν^+ — соответственно самое большое среди построенных ν', которые меньше ν, и наименьшее среди построенных ν', которые больше ν.
3) Выбираем

$$N'_\nu\subseteq N_{\nu-},\ N''_\nu=N^{[\nu]}_{\nu+},\ N'''_\nu\subseteq Z^{[\nu]}_{(\nu-)}\setminus N^{[\nu]}_{\nu+}.$$

4) Составляем

$$N_\nu=N'_\nu\cup N''_\nu\cup N'''_\nu.$$

Отметим, что при построении N_∞ в случае E величины ν^-, а также и ν^+, могут не существовать. Тогда N_∞ строится по тем же правилам, как в первой процедуре.

После того как сослагательный набор $\boldsymbol{\rho}$ построен, не трудно выделить его базис. На каждой цепочке он составлен из всех элементов типа

$$\varrho_{\nu n}=(\nu,(n)),\ \nu\in\mathbf{v},\ n\in N_\nu\setminus N^{[\nu]}_{\nu+}.$$

IV. Делительные наборы.

1. Делительные наборы более просты, чем умножительные, и поэтому начинаем с них. Укажем некоторые их свойства. Каждый делительный набор $\boldsymbol{\rho}$ составлен из уровней $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ ($\lambda \in \boldsymbol{\lambda} \subseteq \widetilde{Z}_{-\varepsilon}$). Каждый уровень $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ сам является делительным набором. (То же самое относится к любому множеству уровней.)

Уровень нулей $\boldsymbol{\rho}_{-\varepsilon}$ имеет произвольную структуру (по простой причине, что на нули мы не делим). Если спектр степеней нулей $\boldsymbol{\mu}_{-\varepsilon}$ периодичен, обозначим через $\mu_{-\varepsilon}(>0)$ его период. Если спектр $\boldsymbol{\mu}_{-\varepsilon}$ непериодичен, примем $\mu_{-\varepsilon}=\infty$, а если пустой — $\mu_{-\varepsilon}=1$.

Спектры $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ ненулевых уровней просто-периодичны: $\boldsymbol{\mu}_\lambda=\{\mu:\ \mu=k\,.\,\mu_\lambda,$ $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots, \mu_\lambda \in \widetilde{Z}_+\}$. При этом будем считать, что значению $\mu_\lambda=\infty$ соответствует спектр степеней $\boldsymbol{\mu}_\lambda$, составленный только из числа $\mu=0$. Каждой ячейке $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu}$ соответствует один регулярный (содержащий число $m_0=0$) насыщенный спектр M_λ длиной λ, такой, что все элементы $\varrho=(\lambda, \mu, M)$ ячейки $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu}$ получаются при $M \subseteq M_\lambda$, причем M тоже регулярны. Условие согласованности уровней (относительно деления их элементов) требует

$$\mu_\lambda=k\,.\,\mu_{\lambda_-}\ \ (k \in \widetilde{Z}_+),\ \ M_\lambda^{[\lambda_-]} \subseteq M_{\lambda_-},$$

где λ_- — число, предшествующее λ в $\boldsymbol{\lambda}$. В случае E

$$M_\infty^{[\lambda]} \subseteq M_\lambda (\lambda \in \boldsymbol{\lambda}^{(\infty)}).$$

Это необходимо и достаточно для делительности набора.

2. Имея в виду все эти свойства, нетрудно предложить процедуру для построения любого делительного набора $\boldsymbol{\rho}$. Схема построения ненулевых уровней — двойная лестница, причем главная принадлежит типу $\widetilde{L}_0$, а дополнительные — просты. Ступени L_λ главной лестницы задают значения λ и μ_λ, а дополнительные лестницы S_λ должны дать M_λ. Правила построения ступени L_λ просты:

1) Выбираем $\lambda > \lambda_-$.

2) Выбираем $\mu_\lambda=k\,.\,\mu_{\lambda_-}$.

Ступени $S_{\lambda i}$ дополнительной лестницы S_λ дают базисные числа $m^*_{\lambda i}$ или короче — m^*_i. Предположим, что все λ', $\mu_{\lambda'}$ и $M_{\lambda'}$ при $\lambda' \in \boldsymbol{\lambda}^{(\lambda)}$, а также и все $m^*_{\lambda i}$ при $i=1, 2, \ldots, j-1$, выбраны. Следует построить ступень $S_{\lambda j}$ — найти $m^*_{\lambda j}$. Составляем множество $M^*_{\lambda j}$ из элементов m, такие что

1) $m^*_{\lambda\, j-1} < m \leq \lambda$,

2) $m \notin M_{\ j-1}=(m^*_1, \ldots, m^*_{j-1})^X$,

3) $m \in M_{\lambda_-}^{[\lambda]}$.

При этом, если, как в данном случае, число обрезания (находящееся в скобке) больше, чем длина спектра, то $M_\lambda^{[\varkappa]}$ означает, что спектр продолжен до $\varkappa$ добавлением всех целых чисел $m>\lambda$, $\leq \varkappa$. Условия 1) — 3) совместимы, но не исключено, что $M^*_{\lambda j}$ окажется пустым.

В случае E правила построения L_∞ те же самые, только условие 3 заменяется

$$m \in M_\lambda\ \ (\lambda \in \boldsymbol{\lambda}^{(\infty)}).$$

3. Этим способом мы можем построить любой делительный набор. Найдем его базис. Базисными элементами каждого уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ являются

$$\varrho_\lambda^* = (\lambda, \mu_\lambda, (0)) \text{ и } \varrho_{\lambda i}^* = (\lambda, \mu_\lambda, (0, \boldsymbol{m}_i^*)) \quad (i = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{k}_\lambda).$$

Однако не все они являются базисными для всего набора. Чтобы найти их, после построения каждого нового уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ мы должны выключить из базисных элементов $\varrho_{\lambda\_i}^*$, предыдущего уровня $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\_}$ те, для которых числа $m_{\lambda\ \ ,i}^*$ принадлежат M_λ.

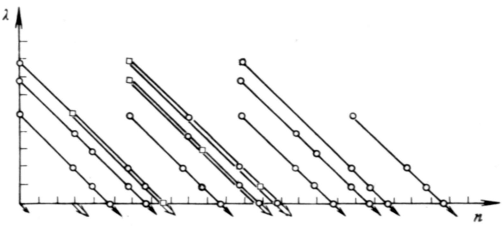

Рис. 3

На рис. 3 показан пример построения конкретного делительного набора и выделения (двойными линиями и квадратиками) его базиса.

Параметризация наборов $\boldsymbol{\rho}$ производится выбором всех чисел $m_{\lambda i}^*$. С другой стороны, получаем, что некоторые из этих чисел не имеют значения для окончательного оформления набора, так как они выпадают как базисные элементы. Тем не менее в параметризации они остаются, так как их выбором обусловлены множества $M_{\lambda i}^*$, среди которых мы должны были выбрать $m_{\lambda i}^*$.

V. Умножительные наборы.

1. Отметим сначала некоторые свойства умножительных наборов, которые окажутся полезными при составлении процедуры их построения. Умножительный набор $\boldsymbol{\rho}$ составлен из уровней $\boldsymbol{\rho}_\lambda(\lambda \in \boldsymbol{\lambda} \subseteq \widetilde{Z}_{-\varepsilon})$, каждый из которых (и каждое множество из которых) также замкнут по умножению. Обозначим через $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ спектр степеней элементов уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$. Есть четыре типа спектров $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ (и тем самым — уровней $\boldsymbol{\rho}_\lambda$):

1) $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ составлен из одного только элемента $\mu = 0$ (уровень типа $\boldsymbol{\rho}_0$);

2) $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ составлен из неотрицательных чисел, среди которых по крайней мере одно положительно ($\boldsymbol{\rho}_+$);

3) μ_λ составлен из неположительных чисел, среди которых по крайней мере одно отрицательно ($\boldsymbol{\rho}_-$);

4) μ_λ содержит как положительные, так и отрицательные числа ($\boldsymbol{\rho}_\pm$).

Уровень типа $\boldsymbol{\rho}_0$ содержит всего одну ячейку $\boldsymbol{\rho}_{\lambda 0}$ и задается одним только насыщенным спектром M_λ длиной λ, точно покрывающим все спектры элементов этой ячейки — каждому регулярному подмножеству чисел M в спектре M_λ соответствует элемент $\rho = (\lambda, 0, M)$ рассматриваемого уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ типа $\boldsymbol{\rho}_0$.

Уровень типа $\boldsymbol{\rho}_\pm$ ничем не отличается от уровней делительных наборов: спектр $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ просто-периодичен и задается своим шагом μ_λ. Множество спектров M для элементов каждой ячейки одно и то же и характеризуется полностью покрывающим спектром M_λ.

Уровень типа $\boldsymbol{\rho}_+$ имеет более сложную структуру. Спектр $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ насыщен, но непериодичен и необязательно регулярен — может не содержать число $\mu=0$. Каждому $\mu\in\boldsymbol{\mu}_\lambda$ соответствует ячейка $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu}$ — некоторое непустое множество элементов с, в общем, ненасыщенными спектрами M. Элемент со спектром $M=(0)$ обязательно входит в $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu}$. Элементы в различных ячейках связаны тем, что если $\varrho'\in\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu'}$ и $\varrho''\in\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu''}$, то в ячейке $\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\mu'+\mu''}$ должен содержаться элемент $\varrho'.\varrho''$, т. е., если спектры M' и M'' задают два элемента в ячейках $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu'}$ и $\boldsymbol{\rho}_{\lambda\mu''}$, то в ячейке $\boldsymbol{\rho}_{\lambda,\mu'+\mu''}$ должен существовать элемент со спектром $(M'+M'')^{[\lambda]}$.

Уровни типа $\boldsymbol{\rho}_-$ аналогичны, только числа, составляющие спектр $\boldsymbol{\mu}_\lambda$, неположительны.

Эти четыре типа уровней не могут идти в произвольном порядке. Возможны только две комбинации: $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}_+, \boldsymbol{\rho}_0)$ (сначала идет группа уровней типа $\boldsymbol{\rho}_\pm$, затем — $\boldsymbol{\rho}_+$ и наконец — $\boldsymbol{\rho}_0$) или $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}_-, \boldsymbol{\rho}_0)$ (сначала — $\boldsymbol{\rho}_\pm$, потом — $\boldsymbol{\rho}_-$ и в конце — $\boldsymbol{\rho}_0$). Конечно, некоторые из этих групп могут быть пустыми, что ведет еще к ряду вырожденных случаев.

Эта классификация уровней дана ввиду различия процедуры их построения. Указанные четыре типа уровней взаимоисключающиеся. Чтобы уменьшить число случаев, мы учтем то, что уровни типа $\boldsymbol{\rho}_0$ можно рассматривать как граничные частные случаи уровней всех трех остальных типов. Тогда типы уровней сводятся к трем: 1) $\boldsymbol{\rho}^+=(\boldsymbol{\rho}_+, \boldsymbol{\rho}_0)$ или $\boldsymbol{\rho}_+$, 2) $\boldsymbol{\rho}^-=(\boldsymbol{\rho}_-, \boldsymbol{\rho}_0)$ или $\boldsymbol{\rho}_-$, и 3) $\boldsymbol{\rho}^\pm=(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}_0)$ или $\boldsymbol{\rho}_\pm$ или $\boldsymbol{\rho}_0$. Их комбинации также две: $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}^+)$ и $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}^-)$. (Вырожденные комбинации не нарушают правила построения.)

Умножительность набора накладывает связи между уровнями, и задача состоит именно в указании способа построения уровней, учитывающего эти связи. Прежде всего мы укажем некоторые свойства и дадим процедуру построения наборов, составленных только из уровней типа $\boldsymbol{\rho}^+$ — все остальные случаи охватываются при помощи несложных замечаний.

2. Введем некоторые понятия. Упорядочение чисел m данного насыщенного спектра M обладает двумя важными свойствами: 1) оно является полным, и 2) оно нормально — сумма любых двух чисел следует за ними обоими.

Эти свойства важны потому, что дали возможность строить базисные элементы спектра M один за другим в возрастающем порядке. При этом из-за того, что упорядоченность полна в любой момент, мы знаем какая операция следует — какой элемент мы можем добавить, а из-за нормальности ясно, что если некоторое число m^* включено в базис, нам не понадобится позже вычеркивать его, какие бы ни числа не включались еще в базис — мы не получим его как сумму этих позднее включенных базисных элементов. Мы могли бы строить спектр M и в обратном — нисходящем порядке. Тогда множество замкнуто в любой момент, т. е. когда включены только числа выше любого выбранного числа. Однако после включения каждого меньшего числа нужно будет проверять, какие из ранее включенных базисных чисел следует сохранить.

Мы хотим строить базисные элементы уровней типа $\boldsymbol{\rho}^+$ подобным способом. Дело усложняется тем, что требования нормальности и полной упорядоченности уже несовместимы: полное упорядочение идет по возрастающим λ, а нормальное — по убывающим. Упорядочения, одновременно нормальные и полные, мы можем ввести только среди элементов данного уровня типа $\boldsymbol{\rho}^+$. С учетом операций, которые последуют, мы предпочтем следующее упорядочение. Элементы будут идти прежде всего по возрастающей множественности i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ отличных от нуля чисел m в спектре M элемента $\varrho \in \boldsymbol{\rho}_\lambda$, затем по возрастающим степеням μ и наконец — по возрастающим значениям первого, второго и т. д. отличного от нуля числа m в M. Если в этой упорядоченности ϱ' после ϱ, мы обозначим $\varrho' \succ \varrho$.

3. Введем еще понятия покрывающего спектра и покрывающего уровня. Если $\boldsymbol{\mu}$ — заданный насыщенный спектр неотрицательных чисел, его покрывающим $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ назовем такой спектр, что если $\mu \in \boldsymbol{\mu}$, а $\hat{\mu} \in \hat{\boldsymbol{\mu}}$, то $\mu + \hat{\mu} \in \boldsymbol{\mu}$ (символично: $\boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\mu}} \subseteq \boldsymbol{\mu}$), т. е. $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ самый богатый спектр, для которого заданный спектр $\boldsymbol{\mu}$ является идеалом. Легко увидеть, что спектр $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ насыщен, что он содержит $\boldsymbol{\mu}$ и что если $\boldsymbol{\mu}$ регулярен $(0 \in \boldsymbol{\mu})$, то $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}$.

Пусть s то число, после которого (насыщенный неотрицательный) спектр $\boldsymbol{\mu}$ превращается в просто-периодическую последовательность шагом d — в последовательность чисел типа $\mu = k . d$ $(k \in Z_+, \geq s/d)$. Мы будем искать только те базисные числа $\hat{\mu}_i^*$ спектра $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, которые не содержатся в $\boldsymbol{\mu}$. Будем искать их по схеме самосогласованной лестницы. Если найдены числа $\hat{\mu}_1^*, \hat{\mu}_2^*, \ldots, \hat{\mu}_{j-1}^*$, то множество предварительно допустимых значений M^0 для $\hat{\mu}_j^*$ задается числами, которые кратны d, больше $\hat{\mu}_{j-1}^*$, не включены в $\boldsymbol{\mu}$ (и, следовательно, меньше s) и, наконец, не включены в проекции $(\hat{\mu}_1^*, \ldots, \hat{\mu}_{j-1}^*)^X$. Это множество, очевидно, конечно. Здесь $M^+ = \boldsymbol{\mu}$, а множество M^- задается через $\hat{\mu}_j^* + \mu_i^*$ (μ_i^* — базисные числа $\boldsymbol{\mu}$). Для них должно иметь место условие самосогласованности (4). Эта лестница строится до конца — до $j = k^*$, т. е. пока M_0 непустое или условие (4) все еще выполнимо. Чтобы получить весь базис $\hat{\beta}$, после нахождения чисел $\hat{\mu}_i^*$ мы должны добавить те из чисел μ_i^*, которые не попадают в проекцию $(\hat{\mu}_i^*)^X$. Можно проверить, что вся эта процедура сводится к конечному числу элементарных операций.

Если $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ — некоторый уровень типа $\boldsymbol{\rho}^+$, то покрывающим уровнем $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\lambda$ назовем самое богатое множество элементов той же самой относительной точности λ, со свойством

$$\boldsymbol{\rho}_\lambda \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_\lambda \subseteq \boldsymbol{\rho}_\lambda. \tag{5}$$

Очевидно $\boldsymbol{\rho} \subseteq \hat{\boldsymbol{\rho}}$, однако $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ может содержать и другие элементы. Уровень $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ насыщен. Чтобы найти $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\lambda$, достаточно проверить (5) для базисных элементов уровней $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ и $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\lambda$. Нахождение несодержащихся в $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ базисных элементов $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\lambda$ идет по той же самой лестничной схеме и сводится к конечному числу элементарных операций.

4. Так как полная упорядоченность всегда необходима, уровни будем строить по возрастающим λ, а нормальным упорядочением элементов воспользуемся при построении базисных элементов на каждом уровне. Схема построения будет двойная лестница, причем главная — составная типа $\widetilde{L}_{-\varepsilon}$, а вторичные будут также составные, причем множественности их секций k_λ, как и множественности уровней каждой секции $k_{\lambda i}$ — переменные. Главная лестница L ступенями L_λ дает числа $\lambda \in \boldsymbol{\lambda} \subseteq \widetilde{Z}_{-\varepsilon}$. На каждой ступени L_λ добавляем одно значение $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ в возрастающем порядке. Предположим, что

построены относительные точности $\lambda' \in \boldsymbol{\lambda}^{[\lambda]}$ и уровни $\boldsymbol{\rho}_{\lambda'}(\lambda' \in \boldsymbol{\lambda}^{(\lambda)})$. Дополнительная лестница S_λ секциями $S_{\lambda i}$ и ступенями $S_{\lambda ii'}$ должна дать базисные элементы уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$. Секция $S_{\lambda 0}$ дает спектр $\boldsymbol{\mu}_\lambda$, т. е. числа его базиса $\mu^*_{\lambda i'}$ $(i'=1, 2, \ldots, k_0)$. Построим для этой цели сечение всех покрытий $\bigcap_{\lambda'}^{[\lambda]} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\lambda'}$, среди которого должны находиться базисные элементы спектра $\boldsymbol{\mu}_\lambda$. Тем самым найдены все базисные элементы $\varrho^*_{\lambda 0 i'}$ уровня $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ со спектрами $M=(0)$ множественности $i=0$. Пусть построены все базисные элементы $\varrho^*_{\lambda i i'}$ со спектрами, множественность которых $i<j$, и первые $j'-1$ базисные элементы $\varrho^*_{\lambda j i'}$ множественности j. Мы хотим построить $\varrho^*_{\lambda j j'}$. Воспользуемся схемой самосогласованных ступеней. Множество $P^0_{\lambda j j'}$ предварительно допустимых элементов ϱ задается следующими условиями:

1) $\varrho \succ \varrho^*_{\lambda j j'-1}$.

2) $\varrho \notin (\varrho^*_{\lambda j 1}, \varrho^*_{\lambda j 2}, \ldots, \varrho^*_{\lambda j j'-1})^X$.

3) Ввиду C_3, если вычеркнем некоторое число $m>0$ в спектре M элемента $\varrho_{\lambda j}$ (сохраняя λ и μ), мы должны получить элемент из $\varrho_{\lambda j-1}$. Чтобы учесть это, мы будем искать $m^*_{\lambda j j'}$ по схеме самосогласованной лестницы.

4) Обозначая $\varrho^{[\varkappa]}=(\lambda, \mu, M^{[\varkappa]})$, условие согласованности $\varrho^*_{\lambda j j'}$ с предыдущими уровнями записывается в виде

$$\varrho^{[\lambda']} \in \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\lambda'} \quad (\lambda' \in \boldsymbol{\lambda}^{(\lambda)}).$$

Это условие учитывается тоже по схеме самосогласованной лестницы в виде (5).

Конечно, по общей схеме мы можем приостановить построение лестницы S_λ при любом $j=k_\lambda(\leqq\lambda)$. То же самое относится и к секциям $S_{\lambda j}$ — их мы также можем приостановить после добвления любого базисного элемента $\varrho^*_{\lambda j j'}$ — при $j=k_{\lambda j}(\leqq k^*_{\lambda j})$.

Построение уровня ϱ_∞ идет по тем же правилам. В этом случае, конечно, индекс i, а также и индекс j, могут расти до бесконечности, но это не нарушает применимости предложенной схемы.

5. Этим исчерпан случай, когда все уровни являются уровнями типа $\boldsymbol{\rho}^+$. Рассмотрим еще случай, когда они предшествуются уровнями типа $\boldsymbol{\rho}_\pm$. Сами уровни типа $\boldsymbol{\rho}_\pm$ строятся точно так, как в случае делительных наборов. Чтобы обеспечить согласованность следующих за ними уровней типа $\boldsymbol{\rho}^+$, мы условно вычеркнем из уровней $\boldsymbol{\rho}_\pm$ все элементы с $\mu<0$. Этим они превратятся в уровни типа $\boldsymbol{\rho}^+$, и дальше согласованность идет по общим правилам согласованности уровней типа $\boldsymbol{\rho}^+$.

Этим исчерпан случай $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}^+)$. Случай $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}^-)$ рассматривается аналогично, только числа $\mu\geqq 0$ следует заменить на числа $\mu\leqq 0$. Существует взаимно однозначное соответствие между наборами типа $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}^+)$ и $(\boldsymbol{\rho}_\pm, \boldsymbol{\rho}^-)$. Конечно, уровни типа $\boldsymbol{\rho}^\pm$ соответствуют сами себе и в таком смысле наборы типа $\boldsymbol{\rho}^\pm$ самосопряжены.

* * *

Видим, что множества асимптотических чисел, замкнутые по каждому из четырех алгебраических действий, довольно богаты.

Можно ставить еще вопрос о замкнутых множествах, отбрасывая некоторые из условий $C_1 - C_5$, и в особенности отбрасывая условие C_2, которое было поставлено ради простоты. Можно ставить также вопрос о наборах, замкнутых по различным комбинациям алгебраических действий — по существу их дава типа: сослагательно-делительные и сослагательно-умнжительные, но этим мы здесь не будем заниматься.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Schmieden, D. Laugwitz. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, **69**, 1958, 1—39.
2. A. Robinson. Nonstandard Analysis. Amsterdam, 1966.
3. И. И. Рябцев. Построение обобщеннозначных функций. *Известия высш. учебн. заведений. Математика*, **6**, 1973, 82—87.
4. L. Schwartz. Théorie des Distributions. Paris, vol. 1, 1950; vol. 2, 1951.
5. P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski. Theory of Distributions (The Sequental Approach). Amsterdam, 1973.
6. Chr. Christov, T. Todorov. Asymptotic Numbers — Algebraic Operations with them. *Serdica*, **2**, 1976, No. 1, 87—102.
7. Chr. Christov. Eine neue Art von verallgemeinerten Funktionen — die asymptotischen Funktionen *Nova Acta Leopoldina*, **39**, 1974, No. 212, 181—197.
8. И. Виноградов. Основы теории чисел. Москва, 1972.

Институт ядерных исследований и ядерной энергетики Болгарской академии наук
1113 София бул. В. И. Ленин 72

Поступила 14. 7. 1976.