Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕЖЕСТКОСТЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА НЕКОТОРЫХ СОСТАВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Пусть Σ замкнутая поверхность, полученная при помощи внутреннего склеивания выпуклых соосных поверхностей вращения S_1 и S_2. В работе доказано, что при некоторых условиях на Σ существуют такие параллели $L \in S_2$, что часть Σ_L поверхности Σ, которая ограничена L и не содержит внутреннего полюса поверхности Σ, допускает: 1) бесконечно малое (б. м.) изгибание скольжения второго порядка; 2) б. м. изгибание второго порядка, сохраняющее геодезическое кручение параллели L.

1. Известно [1], что на замкнутой выпуклой поверхности S вращения существует счетное множество параллелей L_k таких, что каждая часть S_{L_k} поверхности S, которая ограничена параллелью L_k и неоднозначно проектируется на плоскость параллели L_k, допускает б. м. изгибание скольжения второго порядка. Все эти параллели сгущаются к наибольшей параллели поверхности S. В [2, 3] доказано, что при некоторых условиях на замкнутой поверхности Σ, полученной при помощи внутреннего склеивания выпуклых соосных поверхностей вращения S_1 и S_2, существуют параллели $L \in S_2$ такие, что часть Σ_L поверхности Σ, ограниченной L и не содержащей внутреннего полюса поверхности Σ, допускает: 1) б. м. изгибания скольжения первого порядка и 2) б. м. изгибания первого порядка, сохраняющие кручение параллели L.

В настоящей статье (п. 5) доказывается, что поверхности Σ_L допускают: 1) б. м. изгибания скольжения второго порядка и 2) б. м. изгибания второго порядка, сохраняющие геодезическое кручение параллели L.

2. Пусть S_1 и S_2 выпуклые соосные поверхности вращения и c_1 и c_2 их меридианы, где

$$c_1:\ r_1=r_1(u)\in C[0, u_1]\cap C^2(0, u_1],\quad r_1(0)=0,\ r_1(u)>0 \text{ в } (0, u_1],$$
$$r_1''(u)\leqq 0,\ \lim_{u\to 0} r_1'(u)=+\infty;$$

$$c_2:\ r_2=r_2(u)\in C^2[u_2, u_1],\ 0<u_2<u_1,\ r_2(u)<r_1(u) \text{ в } [u_2, u_1),$$
$$r_1(u_1)=r_2(u_1),\ r_2(u)>0 \text{ в } (u_2, u_1],\ r_2(u_2)=0,\ r_2''(u)\leqq 0;$$

(равенства $r_i''(u)=0$, $i=1, 2$, возможны только в отдельных точках). Пусть поверхность S_1 аналитическая в окрестности полюса $u=0$ и полюс не является параболической точкой поверхности S_1. (Тогда в окрестности полюса $r_1=\sqrt{u}l(u)$, $l(0)\neq 0$.)

Рассмотрим внутренне-склеенную поверхность $\Sigma=S_1+S_2$ и обозначим ее меридиан через $c=c_1+c_2$. Относительно подвижной координатной си-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 159—167.

стемы $\{0, e, a(v), a'(v)\}$ [4] для радиус-вектора $x(u, v)$ произвольной точки поверхности Σ имеем $x(u, v) = u \,.\, e + r(u) \,.\, a(v)$, где $r = r(u)$ уравнение меридиана c, а e единичный вектор оси вращения. Пусть

$$(1) \qquad {}^1z(u, v) = {}^1\alpha(u, v) \,.\, e + {}^1\beta(u, v) \,.\, a + {}^1\gamma(u, v) \,.\, a',$$

$$(2) \qquad {}^2z(u, v) = {}^2\alpha(u, v) \,.\, e + {}^2\beta(u, v) \,.\, a + {}^2\gamma(u, v) \,.\, a'$$

система полей б. м. изгибания второго порядка поверхности Σ, принадлежащих классу C^2 на регулярных кусках S_i, $i = 1, 2$, поверхности Σ и непрерывных на Σ. Тогда на S_i, $i = 1, 2$, поля (1) и (2) удовлетворяют следующим системам [4]:

$$(3) \qquad {}^1\alpha_u + r'\,{}^1\beta_u = 0, \quad {}^1\beta + {}^1\gamma_v = 0, \quad {}^1\alpha_v + r'({}^1\beta_v - {}^1\gamma) + r\,{}^1\gamma_u = 0;$$

$$(4) \qquad {}^2\alpha_u + r'\,{}^2\beta_u = -[{}^1\alpha_u^2 + {}^1\beta_u^2 + {}^1\gamma_u^2]/2, \ \ {}^2\beta + {}^2\gamma_v = -[{}^1\alpha_v^2 + ({}^1\beta_v - {}^1\gamma)^2]/2r,$$

$${}^2\alpha_v + r'({}^2\beta_v - {}^2\gamma) + r\,{}^2\gamma_u = -[{}^1\alpha_u\,{}^1\alpha_v + {}^1\beta_u({}^1\beta_v - {}^1\gamma)].$$

Будем рассматривать поле б. м. изгибания первого порядка [4]

$$(5) \qquad {}^1z_k = {}^1\alpha_k(u, v) \,.\, e + {}^1\beta_k(u, v) \,.\, a + {}^1\gamma_k(u, v) \,.\, a', \ k \geqq 2,$$

где

$$(5') \qquad \begin{aligned} {}^1\alpha_k(u, v) &= {}^1\varphi_k(u)e^{ikv} + {}^1\varphi_{-k}(u)e^{-ikv}, \\ {}^1\beta_k(u, v) &= {}^1\chi_k(u)e^{ikv} + {}^1\chi_{-k}(u)e^{-ikv}, \\ {}^1\gamma_k(u, v) &= {}^1\psi_k(u)e^{ikv} + {}^1\psi_{-k}(u)e^{-\,kv}, \end{aligned}$$

и поле б. м. изгибания второго порядка, являющееся продолжением поля ${}^1z_k$,

$$(6) \qquad {}^2z_{2k} = {}^2\alpha_{2k}(u, v) \,.\, e + {}^2\beta_{2k}(u, v) \,.\, a + {}^2\gamma_{2k}(u, v) \,.\, a',$$

где

$$(6') \qquad \begin{aligned} {}^2\alpha_{2k}(u, v) &= {}^2\varphi_{2k}(u)e^{2ikv} + {}^2\varphi_{-2k}(u)e^{-2ikv} + {}^2\varphi_0(u), \\ {}^2\beta_{2k}(u, v) &= {}^2\chi_{2k}(u)e^{2ikv} + {}^2\chi_{-2k}(u)e^{-2ikv} + {}^2\chi_0(u), \\ {}^2\gamma_{2k}(u, v) &= {}^2\psi_{2k}(u)e^{2ikv} + {}^2\psi_{-2k}(u)e^{-2ikv} + {}^2\psi_0(u). \end{aligned}$$

Из (3) и (4) следует, что функции ${}^1\varphi_k(u)$, ${}^1\chi_k(u)$, ${}^1\psi_k(u)$, ${}^2\varphi_{2k}(u)$, ${}^2\chi_{2k}(u)$, ${}^2\psi_{2k}(u)$, ${}^2\varphi_0(u)$, ${}^2\chi_0(u)$, ${}^2\psi_0(u)$ удовлетворяют следующим системам [4, 5]:

$$(7) \qquad {}^1\varphi'_k + r'\,{}^1\chi'_k = 0, \ ik\,{}^1\psi_k + {}^1\chi_k = 0, \ ik\,{}^1\varphi_k + r'(ik\,{}^1\chi_k - {}^1\psi_k) + r\,{}^1\psi'_k = 0;$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} {}^2\varphi'_{2k} + r'\,{}^2\chi'_{2k} &= -({}^1\varphi'^2_k + {}^1\chi'^2_k + {}^1\psi'^2_k)/2, \\ 2ik\,{}^2\psi_{2k} + {}^2\chi_{2k} &= -[-k^2\,{}^1\varphi_k^2 + (ik\,{}^1\chi_k - {}^1\psi_k)^2]/2r, \\ 2ik\,{}^2\varphi_{2k} + r'(2ik\,{}^2\chi_{2k} - {}^2\psi_{2k}) + r\,{}^2\psi'_{2k} &= -ik\,{}^1\varphi_k\,{}^1\varphi'_k - {}^1\chi'_k(ik\,{}^1\chi_k - {}^1\psi_k); \end{aligned}$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} {}^2\varphi'_0 + r'\,{}^2\chi'_0 &= -{}^1\varphi'_k\,{}^1\varphi'_{-k} - {}^1\chi'_k\,{}^1\chi'_{-k} - {}^1\psi'_k\,{}^1\psi'_{-k}, \\ r\,{}^2\psi'_0 - r'\,{}^2\psi_0 &= ik\,{}^1\varphi'_k\,{}^1\varphi_{-k} - ik\,{}^1\varphi_k\,{}^1\varphi'_{-k} - {}^1\chi'_k(-ik\,{}^1\chi_{-k} - {}^1\psi_{-k}) - {}^1\chi'_{-k}(ik\,{}^1\chi_k - {}^1\psi_k), \\ {}^2\chi_0 &= -[-(ik\,{}^1\chi_k - {}^1\psi_k)(ik\,{}^1\chi_{-k} + {}^1\psi_{-k}) + k^2\,{}^1\varphi_k\,{}^1\varphi_{-k}]/r. \end{aligned}$$

Системы для ${}^1\varphi_{-k}$, ${}^1\chi_{-k}$, ${}^1\psi_{-k}$ и ${}^2\varphi_{-2k}$, ${}^2\chi_{-2k}$, ${}^2\psi_{-2k}$ получаются из (7) и (8), заменой k на $-k$ (дальше опять будем писать все условия и уравнения только для $k>0$).

При помощи уравнений (7) системы (8) и (9) принимают вид

$$\begin{gathered}
{}^2\varphi'_{2k}+r'^2\chi'_{2k}=\frac{1}{2k^2}[1-(1+r'^2)k^2]^1\chi'^2_k,\\
2ik^2\psi_{2k}+{}^2\chi_{2k}=[(k^2-1)^2(1+r'^2)^1\chi^2_k+2rr'(k^2-1)^1\chi_k{}^1\chi'_k+r^2\,{}^1\chi'^2_k]/2rk^2, \qquad (8')\\
2ik^2\varphi_{2k}+r'(2ik^2\chi_{2k}-{}^2\psi_{2k})+r^2\psi'_{2k}=-i[(1+r'^2)(k^2-1)^1\chi^1_k\chi'_k+rr'^1\chi'^2_k]/k;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
{}^2\varphi'_0+r'^2\chi'_0=-k^{-2}[k^2(1+r'^2)+1]^1\chi'_k{}^1\chi'_{-k},\\
r^2\psi'_0-r'^2\psi_0=i(k^2-1)(1+r'^2)({}^1\chi'_k{}^1\chi_{-k}-{}^1\chi_k{}^1\chi'_{-k})/k, \qquad (9')\\
{}^2\chi_0=-[(k^2-1)^2\,{}^1\chi_k{}^1\chi_{-k}(1+r'^2)+rr'(k^2-1)({}^1\chi_{-k}{}^1\chi'_k+{}^1\chi'_{-k}{}^1\chi_k)+r^2\,{}^1\chi'_{-k}{}^1\chi'_k]/rk^2.
\end{gathered}$$

Известно, что функции ${}^1\chi_k(u)$ и ${}^2\chi_{2k}(u)$ удовлетворяют следующим уравнениям второго порядка [4, 6]

$$\begin{gathered}
r^1\chi''_k+(k^2-1)r''^1\chi_k=0,\\
r^2\chi''_{2k}+(4k^2-1)r''^2\chi_{2k}=R_k(u), \qquad (10)
\end{gathered}$$

где

$$R_k(u)=\frac{(k^2-1)^2r'^2}{k^2r^2}[1+r'^2+rr''(k^2-1)]^1\chi^2_k-\frac{2r'(k^2-1)}{k^2r}[rr''+(k^2-1)(1+r'^2)]^1\chi_k{}^1\chi'_k$$
$$+k^{-2}[(1+r'^2)(1-k^2)^2-rr''(1+k^2)]^1\chi'^2_k.$$

3. Обозначим поля б. м. изгибания (5) и (6) для регулярных кусков S_i, $i=1, 2$, поверхности Σ соответственно через ${}^1z_{k,i}(u, v)$ и ${}^2z_{2k,i}(u, v)$, $i=1, 2$. Тогда функции ${}^1\chi_{k,i}(u)$ и ${}^2\chi_{2k,i}(u)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{gathered}
r_i\,{}^1\chi''_{k,i}+(k^2-1)r''_i\,{}^1\chi_{k,i}=0, \quad i=1, 2;\\
r_i{}^2\chi''_{2k,i}+(4k^2-1)r''_i\,{}^2\chi_{2k,i}=R_{k,i}(u), \quad i=1, 2. \qquad (10')
\end{gathered}$$

В силу непрерывности поля ${}^1z_k$ функции ${}^1\chi_{k,1}(u)$ и ${}^1\chi_{k,2}(u)$ удовлетворяют на линии склеивания $u=u_1$ следующим условиям сопряжения [4];

$$\begin{gathered}
{}^1\chi_{k,1}(u_1)={}^1\chi_{k,2}(u_1),\\
r_1(u_1)^1\chi'_{k,1}(u_1)+(k^2-1)r'_1(u_1)^1\chi_{k,1}(u_1)=r_2(u_1)^1\chi'_{k,2}(u_1)+(k^2-1)r'_2(u_1)^1\chi_{k,2}(u_1). \qquad (11)
\end{gathered}$$

Из непрерывности поля ${}^2z_{2k}$ на линии склеивания $u=u_1$ также имеем

$$(12)\qquad {}^2\varphi_{2k,1}(u_1)={}^2\varphi_{2k,2}(u_1),\quad {}^2\chi_{2k,1}(u_1)={}^2\chi_{2k,2}(u_1),\quad {}^2\psi_{2k,1}(u_1)={}^2\psi_{2k,2}(u_1);$$

$$(12')\qquad {}^2\varphi_{0,1}(u_1)={}^2\varphi_{0,2}(u_1)\quad {}^2\chi_{0,2}(u_1)={}^2\chi_{0,2}(u_1),\quad {}^2\psi_{0,1}(u_1)={}^2\psi_{0,2}(u_1).$$

Так как поле ${}^2z_{2k}$ является продолжением поля ${}^1z_k$, то из (11) и $(8'_2)$ видно, что если выполнено (12_2), то выполнено и (12_3), и наоборот. Напишем условие (12_1) подробно.

Из равенства $(8'_2)$ находим

$$2ik^2\psi'_{2k}=-{}^2\chi'_{2k}-[r'(k^2-1)^2(1+r'^2)^1\chi_k^2-2r(k^2-1)^2(1+r'^2)^1\chi_k{}^1\chi'_k$$
$$(13)\qquad +r^2r'(1-2k^2)\,{}^1\chi_k'^2]/2r^2k^2.$$

Выключая функции ${}^2\psi_{2k}(u)$ и ${}^2\psi'_{2k}(u)$ и из равенств $(8'_2)$, $(8'_3)$ и (13), получаем

$$4k^2\,{}^2\varphi_{2k}=-r'(4k^2-1)\,{}^2\chi_{2k}-r^2\chi'_{2k}-\frac{r'}{rk^2}(k^2-1)^2(1+r'^2)^1\chi_k^2$$
$$(14)\qquad -\frac{k^2-1}{k^2}(1+2r'^2+k^2+k^2r'^2)^1\chi_k{}^1\chi'_k-\frac{rr'}{k^2}(1+k^2)^1\chi_k'^2.$$

Теперь легко видно, что условие (12_1) принимает вид (15_2). Таким образом показано, что условия (12) эквивалентны условиям

$$(15)\qquad \begin{gathered}{}^2\chi_{2k,2}(u_1)={}^2\chi_{2k,1}(u_1),\\ r_2(u_1)^2\chi'_{2k,2}(u_1)+(4k^2-1)r'_2(u_1)^2\chi_{2k,2}(u_1)=r_1(u_1)^2\chi'_{2k,1}(u_1)\\ +(4k^2-1)r'_1(u_1)^2\chi_{2k,1}(u_1)+Q_k(u_1),\end{gathered}$$

где

$$Q_k(u)=(r'_1-r'_2)\,[(k^2-1)^2(r_1'^2-k^2-r'_1r'_2k^2)^1\chi_{k,1}^2+(1+k^2)r_1^2\,{}^1\chi_{k,1}'^2$$
$$+r_1(k^2-1)\,(2r'_1+k^2r'_1-k^2r'_2)^1\chi_{k,1}{}^1\chi'_{k,1}]/r_1k^2.$$

4. Первая вариация геодезического кручения α произвольной параллели L регулярной поверхности вращения S имеет вид [3]

$$\delta\alpha=i(k^2-1)\{(r^1\chi'_k-r'\,{}^1\chi_k)e^{ikv}-(r^1\chi'_{-k}-r'\,{}^1\chi_{-k})e^{-ikv}\}/kr^2.$$

Найдем вторую вариацию $\delta^2\alpha$ параллели L. Из [6] имеем $\delta^2\alpha=-\delta^2M/r\sqrt{1+r'^2}$, откуда, так как [6]

$$\delta^2M=-\sqrt{1+r'^2}[r^2\beta_{uv}-r'({}^2\beta_v-{}^2\gamma)-r^2\gamma_u+rr'\,{}^1\beta_u{}^1\beta_{uv}-rr'\,{}^1\beta_u{}^1\gamma_u-r'^2\,{}^1\beta_u({}^1\beta_v-{}^1\gamma)]/r$$

а ${}^1\beta$, ${}^1\gamma$, ${}^2\beta$, ${}^2\gamma$ имеют соответственно вид $(5')$ и $(6')$, пользуясь равенствами (7), $(8')$, $(9')$, (13), получаем, что

$$(16)\qquad \delta^2\alpha=Ae^{2ikv}+Be^{-2ikv}+C,$$

где $C=-i(k^2-1)\,({}^1\chi'_k{}^1\chi_{-k}-{}^1\chi_k{}^1\chi'_{-k})/kr^2$,

$$A=\frac{1}{2ikr^2}\,\{(1-4k^2)\,(r^2\chi'_{2k}-r'\,{}^2\chi_{2k})+\frac{r'}{rk^2}(k^2-1)^2(1+r'^2)^1\chi_k^2$$
$$+\frac{k^2-1}{k^2}[(2k^2+1)r'^2-(k^2-1)\,(1+r'^2)]^1\chi_k{}^1\chi'_k-\frac{rr'}{k^2}(k^2-1)\,(1+2k^2)^1\chi_k'^2\},$$

а коэффициент B получается из последнего равенства заменой k на $-k$.

Пусть ${}^1z_k$, $k\geq 2$, поле б. м. изгибания скольжения первого порядка поверхности S вдоль параллели L. Тогда [2]

$$(17)\qquad r^1\chi'_k+(k^2-1)r'\,{}^1\chi_k\,|_L=0.$$

Если ${}^2z_{2k}(u, v)$ поле б. м. изгибания скольжения второго порядка поверхности S вдоль параллели L, являющееся продолжением поля ${}^1z_k$, то

(18) $$ {}^2\varphi_{2k}(u)\,|_L = 0, $$

(19) $$ {}^2\varphi_0(u)\,|_L = 0. $$

Условие (18) при помощи выражения (14) и условия (17) принимает вид

(20) $$ r^2\chi'_{2k} + (4k^2-1)r'\,{}^2\chi_{2k}\,|_L = r'(k^2-1)^2\,{}^1\chi_k^2/r. $$

Наоборот, если система полей ${}^1z_k$ и ${}^2z_{2k}$ — б. м. изгибания второго порядка поверхности S — удовлетворяют условиям (17), (19), (20), то все точки параллели L будут перемещаться по ее плоскости, т. е. ${}^1z_k$ и ${}^2z_{2k}$ будут поля б. м. изгибания скольжения второго порядка поверхности S вдоль параллели L.

Замечание 1. Если условие (19) не выполнено, то параллель L скользит в своей плоскости и кроме этого ее плоскость перемещается параллельно оси вращения. Очевидно условия (17) и (20) необходимы и достаточны для того, чтобы параллель L осталась плоской кривой, т. е. чтобы $\delta\tau\,|_L = \delta^2\tau\,|_L = 0$. Их можно получить и пользуясь выражениями [3, 6]

$$ \delta\tau = i(k^2-1)\{[r\,{}^1\chi'_k + r'(k^2-1)\,{}^1\chi_k]e^{ikv} - [r\,{}^1\chi'_{-k} + r'(k^2-1)\,{}^1\chi_{-k}]e^{-ikv}\}/kr^2 $$

и $\delta^2\tau = A_1e^{2ikv} + B_1e^{-2ikv} + C_1$, где $C_1 = C$,

$$ A_1 = -\frac{4k^2-1}{2ikr^2}[r^2\chi'_{2k} + (4k^2-1)r'\,{}^2\chi_{2k}] + \frac{1}{2ik^3r^3}\{r'(k^2-1)^2[1+r'^2-2k^2(1-2k^2+2r'^2)]\,{}^1\chi_k^2 $$
$$ + r(k^2-1)[1-k^2+r'^2(2-7k^2-4k^4)]\,{}^1\chi_k{}^1\chi'_k - r^2r'[2k^2(2k^2+1)+k^2-1]\,{}^1\chi_k'^2\}, $$

а B_1 получается из последнего равенства заменой k на $-k$.

5. Пусть L внутренняя параллель поверхности S_2. Обозначим через Σ_L ту часть поверхности Σ, которая не содержит полюса поверхности S_2, а через L_* максимальную параллель поверхности S_2. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть меридианы c_1 и c_2 в точке u_1 не касаются и $r_1'(u_1)<0$. Тогда существует счетное множество параллелей L_l таких, что каждая поверхность Σ_{L_l} допускает б. м. изгибание скольжения второго порядка. Все эти параллели сгущаются к параллели L_*.*

Теорема 2. *Пусть меридианы c_1 и c_2 касаются в точке u_1. Предположим, что $r_1'(u_1)<0$ и $r_2''(u)r_1(u)-r_1''(u)r_2(u)\leqq 0$, $u\in(u_2, u_1]$. Тогда, если параллель L такая, что поверхность Σ_L допускает б. м. изгибания ${}^1z_k$ скольжения первого порядка (в случае, когда $L\equiv L_*$, предположим еще, что полей ${}^1z_k$ конечное число), то поверхность Σ_L допускает и б. м. изгибание скольжения второго порядка. Если существует бесчисленное множество таких параллелей L, то они образуют счетное множество и сгущаются к максимальной параллели L_*.*

Теорема 3. *Пусть либо $r_2''(u)/(u-u_2)\in C[u_2, u_1]$, либо c_2 аналитическая в окрестности $u=u_2$. а) Если c_1 и c_2 касаются в точке u_1 и поверхность Σ_L допускает конечное число полей ${}^1z_k$ б. м. изгибания первого порядка, сохраняющих геодезическое кручение параллели L, то поверхность Σ_L допускает и б. м. изгибание второго порядка, сохраняющее* *геодезическое кручение параллели L. б) Если c_1 и c_2 не касаются в точке u_1, то могут существовать лишь не более чем конечное число параллелей $L \in S_2$ таких, что поверхность Σ_L допускает б. м. изгибание второго порядка, сохраняющее геодезическое кручение параллели L.*

6. Доказательство теоремы 1. Б. м. изгибание ${}^1z_k$ называется регулярным в полюсе $u=0$ поверхности S_1, если ${}^1z_k(0, v)=0$. (Тогда ${}^1\varphi_k(u)$, ${}^1\chi_k(u)$, ${}^1\psi_k(u)$ имеют в $u=0$ нули порядка $k/2, (k+1)/2, (k+1)/2$ [4].). В условиях теоремы 1 в [2] доказано, что для каждого $k>N_3\geq 2$ существует параллель $L_k \in S_2$ и регулярное в полюсе $u=0$ поле ${}^1z_k$ б. м. изгибания, которое принадлежит классу C^2 на S_1 и S_{2L_k} непрерывно на параллели склеивания $u=u_1$ и удовлетворяет условиям (17) на L_k, т. е. доказано, что существует счетное множество параллелей $L_k \in S_2$ таких, что каждая поверхность Σ_{L_k} допускает б. м. изгибание скольжения первого порядка. (Через S_{2L_k} обозначена та часть S_2, которая ограничена параллелями $u=u_1$ и L_k.) Там доказано еще, что все эти параллели сгущаются к параллели L_*. Совокупность параллелей $\{L_k\}$, вдоль которых происходит изгибание скольжения, нумерируем заново через $\{L_l\}$, так что если $l_1 \neq l_2$, то и $L_{l_1} \neq L_{l_2}$. Каждой параллели $L_l: u=u_l$ соответствует не более чем конечное число полей ${}^1z_{k_i}$, $i=1, \ldots, p$, б. м. изгибания скольжения. Действительно, если допустим, что их бесконечное число, то тогда предел последовательности

$$\left\{\frac{{}^1\chi'_{k_i}(u_l)}{(k_i^2-1){}^1\chi_{k_i}(u_l)}+\frac{r'(u_l)}{r(u_l)}\right\}$$

в силу (17) равен нулю. Но так как [7]

$$\lim_{k_i\to\infty}\frac{{}^1\chi'_{k_i}(u_l)}{(k_i^2-1){}^1\chi_{k_i}(u_l)}=0,$$

то следует, что $r'(u_l)=0$, т. е. параллель $L_l\equiv L_*$. Тогда из условия (17) следует, что ${}^1\chi'_{k_i}(u_l)=0$. Но это противоречит тому, что ${}^1\chi'_{k_i}(u)<0$ в $(u_2, u_1]$ [2].

Пусть поле ${}^1z_{k_0}$ имеет наибольший индекс среди полей ${}^1z_{k_i}$, $i=1, \ldots, p$. Поле ${}^2z_{2k}$ называется регулярным в полюсе $u=0$, если ${}^2\varphi_{2k}$, ${}^2\chi_{2k}$, ${}^2\psi_{2k}$, ${}^2\chi_0$, ${}^2\psi_0$ обращаются в нуль при $u=0$ [5]. Покажем, что регулярное поле ${}^1z_{k_0}$ б. м. изгибания скольжения первого порядка поверхности Σ_{L_l} можно продолжить в поле ${}^2z_{2k_0}$ б. м. изгибания второго порядка, регулярное в полюсе $u=0$, принадлежащее классу C^2 на S_1 и S_{2L_l}, непрерывное на параллели склеивания $u=u_1$ и удовлетворяющее условиям (18), (19) на параллели L_l. Для этого надо исследовать системы (8′) и (9′). Из леммы работы [6] следует, что существует решение систем (8′) и (9′) в $[0, u_1]$ при $r(u)=r_1(u)$, которое регулярно в $u=0$, так что нужно еще доказать существование решения у систем (8′) и (9′) в $[u_l, u_1]$ при $r(u)=r_2(u)$, которое на параллели склеивания $u=u_1$ удовлетворяет условиям (12) и (12′), а на параллели L_l — условиям скольжения (18), (19). Очевидно для этого достаточно доказать, что уравнение (10′), $i=2$, имеет решение, которое при $u=u_1$ удовлетворяет условиям (15), а при $u=u_l$ — условию (20).

Пусть ${}^2_+\chi_{2k,1}$ и ${}^2_-\chi_{2k,1}$ фундаментальные решения (решение ${}^2_+\chi_{2k,1}$ имеет в $u=0$ нуль порядка $(2k+1)/2$, а ${}^2_-\chi_{2k,1}$ — полюс порядка $(2k-1)/2$) однородного уравнения, соответствующего уравнению (10′), $i=1$, в $[0, u_1]$, а ${}^2\chi^*_{2k,1}$ — построенное в [6] регулярное решение неоднородного уравнения (10′), $i=1$. В наших обозначениях оно имеет вид

$$ {}^2\chi^*_{2k,1}(u) = {}^2_+\chi_{2k,1}(u) \int_{u_1}^{u} \frac{R_k(\tau)}{r_1(\tau)}\, {}^2_-\chi_{2k,1}(\tau)d\tau - {}^2_-\chi_{2k,1}(u) \int_0^u \frac{R_k(\tau)}{r_1(\tau)}\, {}^2_+\chi_{2k,1}(\tau)d\tau. $$

Рассмотрим регулярное решение ${}^2\chi_{2k,1} = c\, {}^2_+\chi_{2k,1} + {}^2\chi^*_{2k,1}$ уравнения (10′), $i=1$, (c — произвольная константа). Тогда краевые условия (15) принимают вид

$$ {}^2\chi_{2k,2}(u_1) = c\, {}^2_+\chi_{2k,1}(u_1) + {}^2\chi^*_{2k,1}(u_1), $$

$$ \begin{aligned} {}^2\chi'_{2k,2}(u_1) &= c\{r_1(u_1)\, {}^2_+\chi'_{2k,1}(u_1) + (4k^2-1)\,[r'_1(u_1) - r'_2(u_1)]\, {}^2_+\chi_{2k,1}(u_1)\}/r_1(u_1) \\ &+ \{r_1(u_1)\, {}^2\chi^{*\prime}_{2k,1}(u_1) + (4k^2-1)\,[r'_1(u_1) - r'_2(u_1)]\, {}^2\chi^*_{2k,1}(u_1) + Q_k(u_1)\}/r_1(u_1). \end{aligned} $$

Обозначим через ${}^2\chi^*_{2k,2}$ решение уравнения (10′), $i=2$, удовлетворяющее краевым условиям

$$ {}^2\chi^*_{2k,2}(u_1) = {}^2\chi^*_{2k,1}(u_1), $$

$$ {}^2\chi^{*\prime}_{2k,2}(u_1) = \{r_1(u_1)\, {}^2\chi^{*\prime}_{2k,1}(u_1) + (4k^2-1)\,[r'_1(u_1) - r'_2(u_1)]\, {}^2\chi^*_{2k,1}(u_1) + Q_k(u_1)\}/r_1(u_1), $$

а через ${}^2_+\chi_{2k,2}$ — решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (10′), $i=2$, которое удовлетворяет краевым условиям

$$ \begin{aligned} & {}^2_+\chi_{2k,2}(u_1) = c\, {}^2_+\chi_{2k,1}(u_1), \\ (21) \qquad & {}^2_+\chi'_{2k,2}(u_1) = c\{r_1(u_1)\, {}^2_+\chi_{2k,1}(u_1) + (4k^2-1)\,[r'_1(u_1) - r'_2(u_1)]\, {}^2_+\chi_{2k,1}(u_1)\}/r_1(u_1). \end{aligned} $$

Очевидно, если ${}^2\chi^1_{2k,2}(u)$ и ${}^2\chi^2_{2k,2}(u)$ есть система линейно независимых решений однородного уравнения (10′), $i=2$, то из условий (21) получаем, что решение ${}^2_+\chi_{1k,2}(u)$ имеет вид

$$ {}^2_+\chi_{2k,2}(u) = c[c_1\, {}^2\chi^1_{2k,2}(u) + c_2\, {}^2\chi^2_{2k,2}(u)] = c\, {}^2\bar{\chi}_{2k,2}(u), $$

где соответствующие выражения для констант c_1 и c_2 не будем выписывать. Покажем, что при $k=k_0$ константу c можно выбрать так, чтобы решение

$$ (22) \qquad {}^2\chi_{2k_0,2} = c\, {}^2\bar{\chi}_{2k_0,2} + {}^2\chi^*_{2k_0,2} $$

уравнения (10′), $i=2$, при краевых условиях (15) удовлетворяло краевому условию (20). В самом деле, подставляя выражение для ${}^2\chi_{2k_0,2}$ из (22) в (20), получаем

$$ \begin{aligned} & c[r(u_l)\, {}^2\bar{\chi}'_{2k_0,2}(u_l) + r'(u_l)\,(4k_0^2-1)\, {}^2\bar{\chi}_{2k_0,2}(u_l)] + r(u_l)\, {}^2\chi^*_{2k_0,2}(u_l) \\ & + r'(u_l)\,(4k_0^2-1)\, {}^2\chi^*_{2k_0,2}(u_l) = \frac{(k_0^2-1)^2 r'_2(u_l)}{r_2(u_l)}\, {}^1\chi^2_{k_0,2}(u_l), \end{aligned} $$

откуда в силу того, что $r(u_l)^2\overline{\chi}'_{2k_0,2}(u_l)+r'(u_l)(4k_0^2-1)^2\overline{\chi}_{2k_0,2}(u_l)\neq 0$, находим c. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы 2 в [2] доказано, что для каждого $k>N_3\geq 2$ существует параллель $L_k\in S_2$ и регулярное в полюсе $u=0$ поле ${}^1z_k$ б. м. изгибания скольжения первого порядка поверхности Σ_{L_k}. Параллели $\{L_k\}$ нумерируем таким же способом, как в теореме 1 — через $\{L_l\}$. Опять видно, что каждой параллели $L_l\neq L_*$ соответствует не более чем конечное число полей ${}^1z_{k_i}$, $i=1,\ldots,p$, б. м. изгибание скольжения первого порядка. (Дополним, что когда c_1 и c_2 касаются в u_1, для параллелей L_k в [2], вдоль которых происходит изгибание скольжения, возможны два случая: либо они сгущаются к максимальной параллели, либо только конечное число из них не совпадают с этой параллелью). Дальше доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. В силу замечания 2 работы [2] будут иметь место теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 и для поверхностей $\Sigma=S_1+\cdots+S_n$, $n>2$, определенных в [8].

Доказательство теоремы 3. В [3] показано, что поле ${}^1z_k$, $k\geq 2$ б. м. изгибания первого порядка поверхности Σ_L сохраняет геодезическое кручение α параллели L, т. е. $\delta\alpha|_L=0$, тогда и только тогда, когда

$$r_2\,{}^1\chi'_{k,2}-r'_2\,{}^1\chi_{k,2}|_L=0. \tag{23}$$

Пусть поле ${}^2z_{2k}$ б. м. изгибания второго порядка поверхности Σ_L является продолжением поля ${}^1z_k$ и пусть оно сохраняет геодезическое кручение параллели L, т. е. $\delta^2\alpha|_L=0$. Пользуясь выражением (16) для $\delta^2\alpha$ и равенством (23), получаем, что краевое условие $\delta^2\alpha|_L=0$ эквивалентно условию $r_2\,{}^2\chi'_{2k,2}-r'_2\,{}^2\chi_{2k,2}|_L=0$. В работе [3] показано, при указанных в теореме 3 предположениях о кривой c_2, что если $r'_1(u_1)=r'_2(u_1)$, то для каждого $k\geq 2$ существует параллель $L_k\in S_2$ и регулярное в полюсе $u=0$ поле ${}^1z_k$ б. м. изгибания, которое принадлежит классу C^2 на S_1 и S_{2L_k}, непрерывно на параллели склеивания $u=u_1$ и удовлетворяет краевому условию (23). Если $r'_1(u_1)\neq r'_2(u_1)$, то там доказано, что может существовать лишь не более чем конечное число параллелей с указанными свойствами. Обозначим через ${}^1z_{k_0}$ то поле среди полей ${}^1z_{k_i}$, $i=1,\ldots,p$, соответствующих параллели L, которое имеет самый большой индекс. Тем же способом, как в теореме 1, доказывается, что поле ${}^1z_{k_0}$ можно продолжить в поле ${}^2z_{2k_0}$ б. м. изгибания второго порядка, сохраняющее геодезическое кручение параллели L.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Rembs. Über Gleitverbiegungen. *Math. Ann.*, **111**, 1935, 587—595.
2. И. Иванова-Каратопраклиева. О бесконечно малых изгибаниях скольжения некоторых составных поверхностей вращения. *Мат. заметки*, **10**, 1971, № 5, 549—554.
3. И. Иванова-Каратопраклиева. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения при некоторых краевых условиях. *Годишник на Соф. унив., Мат. фак.*, **67**, 1972/73, 235—246.
4. С. Э. Кон-Фоссен. Нежесткие замкнутые поверхности. *Успехи мат наук*, **9**, 1954, № 1, 63—81.

5. Э. Г. Позняк. Соотношение между нежесткостью первого и второго порядка для поверхностей вращения. *Успехи мат. наук*, **14**, 1959, № 6, 179—184.

6. И. Иванова-Каратопраклиева. О бесконечно малых изгибаниях второго порядка. *Сердика*, **3**, 1977, № 1, 44—51.

7. И. Иванова-Каратопраклиева. О нежесткости некоторых составных поверхностей вращения. *Мат. заметки*, **10**, 1971, № 3, 333—344.

8. И. Х. Сабитов. О нежесткости некоторых поверхностей вращения. *Мат. сб.*, **60**, 1963, № 3, 506—519.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 18. 8. 1976.