Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

М. С. САЛАХИТДИНОВ, С. С. ИСАМУХАМЕДОВ

В статье приводится краткий обзор краевых задач для уравнения смешанного типа второго рода и рассматриваются задачи типа задачи Трикоми как с непрерывными, так и с разрывными условиями склеивания на линии параболического вырождения. Доказывается однозначная разрешимость сформулированных краевых задач.

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$yU_{yy}+U_{xx}+a(x, y)U_y+b(x, y)U_x+c(x, y)U=0. \tag{1}$$

Для уравнения (1) линия параболического вырождения $y=0$ является характеристикой. Поэтому характер краевых задач, которые могут быть поставлены для уравнения (1), в отличие от уравнения типа Трикоми зависит не только от главной части, но также и от младших членов уравнения, в основном от поведения коэффициента $a(x, y)$ на линии вырождения [1, 2].

В свою очередь при постановке и изучении краевых задач для уравнения (1) важную роль играет его прототип

$$yU_{yy}+U_{xx}+\alpha U_y=0, \tag{2}$$

где α — вещественная константа.

Пусть D — область, ограниченная гладкой кривой σ с концами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ и характеристиками OC: $x-2\sqrt{-y}=0$, AC: $x+2\sqrt{-y}=1$ уравнения (2). Эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D обозначим через D_1 и D_2 соответственно. Как уже отмечали выше, постановка смешанных краевых задач для уравнения (2) зависит от значения коэффициента α. Известно [3], что при $\alpha>0$ производная по y решения уравнения (2), а при $\alpha\geqq 1$ и само решение, будут, вообще говоря, неограниченными в окрестности точек параболической линии. Так, например, при $\alpha\geqq 1$ для определения решения $U(x, y)$, ограниченного во всей смешанной области D, достаточно задавать его значение лишь на дуге σ [4], а характеристики OC и AC следует освободить от граничных данных, или же только на одной из характеристик [5], освободив дугу σ и вторую характеристику от данных.

Пусть $0<\alpha<1$. Если ввести взаимно-однозначную, непрерывную и непрерывно-дифференцируемую при $y\neq 0$ замену переменных

$$x=x, \quad t=\operatorname{sgn} y(1-\alpha)^{2(\alpha-1)}|y|^{1-\alpha}, \tag{3}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с.181—188.

то в плоскости переменных (x, t) уравнение (2) приводится к уравнениям

$$\operatorname{sgn} t\, |t|^n U_{xx} + U_{tt} = 0, \text{ когда } 1/2 < \alpha < 1,\ n = (2\alpha - 1)/(1-\alpha) > 0, \tag{4}$$

$$U_{xx} + \operatorname{sgn} t U_{tt} = 0, \quad \text{при} \quad \alpha = 1/2, \tag{5}$$

$$U_{xx} + \operatorname{sgn} t\, |t|^m U_{tt} = 0 \tag{6}$$

$$\text{при } 0 < \alpha < 1/2, \quad m = (1-2\alpha)/(1-\alpha), \quad 0 < m < 1, \quad |y|^\alpha U_y = U_t.$$

Область D отображается в область D^*, а дуга σ в дугу σ^*. Задача Трикоми для уравнений (4) и (5) хорошо изучена [2]. В работе Кароля [6] методом интегральных уравнений доказано существование единственного решения задачи T для уравнения (6), когда σ^* совпадает с нормальным контуром $x(1-x) = 4t^{2-m}/(2-m)^2$ и при требовании непрерывности U_t на линии параболического вырождения. А. Франклем установлено [7], что единственность решения задачи T для произвольного гладкого контура σ^* будет иметь место, если выполнено условие для U_t в виде

$$-\lim_{t\to -0} U_t = \lim_{t \to +0} U_t = \nu(x).$$

Существование решения, когда σ^* совпадает с нормальным контуром, доказано методом интегральных уравнений. Задачи типа Геллерстедта с такими условиями склеивания рассмотрены в работе [8]. Если $\alpha < 0$, то для уравнений (1) и (2) изучена задача с данными на всей границе области [4, 9].

В дальнейшем будем полагать, что $\alpha < 1$, $\alpha = -n + \alpha_0$, $1/2 < \alpha_0 < 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $(x, y) \in D_2$. Представление общего решения уравнения (2) для указанных значений α имеет вид [10]

$$U_\alpha(x, y) = \sum_{k=0}^{n} N_k(n, \alpha, \delta)(-y)^k \int_0^1 \Phi^{(2k)}(\lambda)\,[t(1-t)]^{k+\delta} dt$$

$$+ (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \Psi(\lambda)\,[t(1-t)]^{(1-2\alpha)/2} dt,$$

$$\lambda = x - 2\sqrt{-y}(1-2t), \quad \delta = \alpha_0 - 3/2, \quad -1 < \delta < -1/2,$$

$$N_k(n, \alpha, \delta) = 2^{2k} C_n^k \Gamma(1+\delta)/\Gamma(1+\delta+k) \prod_{s=0}^{k-1}{}'(\alpha+s), \quad \Pi' = 1,\ k = 0.$$

Когда $y = 0$, из общего представления следует, что

$$U_\alpha(x, 0) = \gamma_1^{-1}\Phi(x),\ \lim_{y\to -0} (U_\alpha)_y = \tilde{\gamma}\Phi''(x),\ \gamma_1 = \Gamma(2+2\delta)/\Gamma^2(1+\delta),\ \tilde{\gamma} \neq 0.$$

Следовательно, при этих значениях α обычная задача Коши в D_2 для уравнения (2) с начальными данными на линии вырождения не является корректной, так как имеется взаимосвязь между начальными данными и задача, вообще говоря, не имеет единственного решения (функция Ψ остается произвольной). Видоизмененная задача Коши

$$U(x, 0) = \tau(x),\ \lim_{y \to -0} (-y)^\alpha [U(x, y) - A_n^-(\tau)]'_y = \nu(x), \tag{7}$$

$$\tau(x) \in C^{2(n+1)}[0,1], \quad \nu(x) \in C^2[0, 1],$$

$$A_n^-(\tau) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(n, \alpha, \delta)(-y)^k \int_0^1 \tau^{(2k)}(\lambda)[t(1-t)]^{k+\delta} dt$$

является корректной и решение дается формулой [10]

$$U(x, y) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(n, \alpha, \delta)(-y)^k \int_0^1 \tau^{(2k)}(\lambda)[t(1-t)]^{k+\delta} dt$$

(8)

$$-\gamma_2(-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu(\lambda)[t(1-t)]^{(1-2\alpha)/2} dt, \quad \gamma_2 = \Gamma(3-2\alpha)/(1-\alpha)\Gamma^2((3-2\alpha)/2).$$

Если в области D_1 функция $U(x, y)$ является решением уравнения (2), то из уравнения (2) нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i y^{i-1} \frac{\partial^{2i} U}{\partial x^{2i}} + O(y^{-\alpha}), \tag{9}$$

отсюда $\lim_{y \to +0} U_y = -\alpha^{-1} \tau''(x)$, $\delta_1 = 1/\alpha$. Следовательно, $\lim_{y \to +0} U_y$ также зависит от значений $U(x, y)$ при $y = 0$. Вместе с этим из (9) заключаем, что при $y \to +0$ остается ограниченным и отличным от нуля предел

$$\lim_{y \to +0} y^\alpha \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \sum_{i=0}^{n} \delta_i y^{i-1} \frac{\partial^{2i} U}{\partial x^{2i}}\right].$$

Определение. *Функция $U(x, y)$ называется обобщенным решением видоизмененной задачи Коши* (7) *для уравнения* (2) *в области D_2 из класса R, если её можно представить в виде* (8) *и*

$$\tau(x) = \int_0^x T(t)(x-t)^{-2\beta} dt, \quad \beta = \alpha - 1/2,$$

где $\nu(x)$ и $T(x)$ непрерывны и интегрируемы в $(0, 1)$.

Задача T_n [11]. Найти в области D функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $U(x, y) \in C(\bar{D})$.
2. $U(x, y)$ — обобщенное решение из класса R в D_2, а в D_1 дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2).
3. На OA выполняется условие склеивания

$$(-1)^n \lim_{y \to -0} (-y)^\alpha [U - A_n^-(\tau)]'_y = \lim_{y \to +0} y^\alpha [U_y + A_n^+(U)] = \nu(x),$$

$$U(x, -0) = U(x, +0) = \tau(x), \quad A_n^+(U) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i y^{i-1} \frac{\partial^{2i} U}{\partial x^{2i}}.$$

4. $U|_\varrho = f(s)$, $0 \leq s \leq l$, $U|_{OC} = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1/2$, f, φ — достаточно гладкие функции.

Когда $n = 0$ и $0 < \alpha < 1$, $A_n^-(\tau) = A_n^+(U) = 0$, вообще говоря, в этом случае U_y может быть неограниченной при $y \to 0$ [2]. Поэтому при рассмотрении задачи T_0 вместо непрерывности U_y берется условие

$$\pm \lim_{y\to -0} (-y)^{\alpha} U_y = \lim_{y\to +0} y^{\alpha} U_y = \nu(x).$$

Знак „+“ в случае $1/2<\alpha<1$, а „—“ при $0<\alpha<1/2$.

На основании определения обобщенного решения в D_2 и условия $U|_{OC}=\varphi$ связь между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ можно получить в виде

$$\tau(x)=\gamma_3 \int_0^x \nu(t)\,(x-1)^{-2\beta}dt+\Phi(x),\ \gamma_3=\mathrm{const}, \tag{10}$$

$$\Phi(x)=\sin(2\delta\pi)\sin(-\delta\pi)\left[\pi^2\gamma_1 \prod_{l=0}^{n-1}{}'(\delta-l)\right]^{-1}\int_0^x (x-t)^{-2\beta}t^{-2n}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t s^{n-\delta}(t-s)^{1+2\delta}\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\int_0^s (s-\xi)^{-1-\delta}\xi^{1+2\delta}\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi\right]ds\right\}dt,\quad -2\beta=2n-(2\alpha_0-1).$$

Пусть $\sigma=\sigma_0$: $x(1-x)=4y$.

Способ доказательства единственности решения задачи T_n основан на некотором аналоге известного принципа экстремума А. В. Бицадзе. Заметим, что любое нецелое $\alpha<1$ можно представить в виде $\alpha=-n+\alpha_0$, $0<\alpha_0<1$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Если $U(x, y)$ — решение уравнения (2), то функция $V(x, y)=\partial^n U/\partial y^n$ удовлетворяет уравнению

$$yV_{yy}+V_{xx}+\alpha_0 V_y=0. \tag{11}$$

Имеет место следующая лемма [12].

Лемма. *Если решение $V(x,y)$ уравнения (11) достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $M(\xi, 0)$, то*

$$y^{\alpha_0}\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{(\xi,0)}<0\quad(>0).$$

Теорема. *Если решение уравнения (2) в области D удовлетворяет краевым условиям*

$$U|_{\sigma_0}=0,\quad U|_{OA}=\tau(x),\quad \tau^{(i)}(0)=\tau^{(i)}(1)=0,\quad i=0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{12}$$

то в точке $M(\xi, 0)$ $(0<\xi<1)$, где $\tau^{(2n)}(x)$ достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума), функция $\nu(\xi)<0(\nu(\xi)>0)$.

Действительно, пусть в точке $M(\xi, 0)$ функция $\tau^{(2n)}(x)$ достигает положительного максимума. Тогда в этой точке функция $V(x, y)=\partial^n U/\partial y^n$ достигает своего положительного максимума [11]. Поэтому в силу леммы имеем

$$y^{\alpha_0}\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{(\xi,0)}=y^{n+1}\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{(\xi,0)}=y^{\alpha}y^{n}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}\bigg|_{(\xi,0)}<0.$$

Если $U(x, y)$ является решением уравнения (2), то выполняя необходимые преобразования, можно получить, что

$$y^n\frac{\partial^{n+1}U}{\partial y^{n+1}}=(-1)^n\prod_{i=0}^{n=1}(\alpha+i)\left[U_y+A_n^+(U)\right]+O(y^n).$$

Следовательно, в точке $M(\xi, 0)$, где $\tau^{(2n)}(x)$ достигает положительного максимума

$$\lim_{\substack{y\to+0\\(x=\xi)}} y^{\alpha}[U_y+A_n^+(U)]=\nu(\xi)<0.$$

Теорема доказана.

С другой стороны, при $U|_{OC}=0$ в точке $M(\xi, 0)$, где $\tau^{(2n)}(x)$ достигает положительного максимума из соотношения (10), если $\gamma>0$, имеем

$$\frac{1}{\gamma}\nu(\xi)=(2-2\alpha_0)\int_0^{\xi}\frac{\tau^{(2n)}(\xi)-\tau^{(2n)}(t)}{\xi-t}\frac{1}{(\xi-t)^{2-2\alpha_0}}dt+\tau^{(2n)}(\xi)\xi^{2\alpha_0-2},$$

из которого следует, что $\nu(\xi)>0$.

Аналогичным образом устанавливается, что в случае отрицательного минимума $\nu(\xi)<0$.

Следовательно, функция $\tau^{(2n)}(x)$ в $(0, 1)$ не имеет ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Тогда в силу условий (12) и $\tau^{(2n)}(0)=0$ при $\varphi\equiv0$ имеем $\tau(x)\equiv0$ на OA.

Таким образом при $U|_{\sigma_0}=U_{OC}=0$ функция $U(x, y)\equiv0$ в D. Существование решения задачи T_n установлено методом интегральных уравнений.

Определение [11]. *Функцией Грина задачи T_n называется функция $G(\xi, t; x, y)$, обладающая следующими свойствами.*

1. *Функция $G(\xi, t; x, y)$ по переменным (x, y) является решением уравнения* (2), *а по переменным (ξ, t) — решением сопряженного уравнения*

$$yV_{yy}+V_{xx}+(2-\alpha)V_y=0.$$

2. (а) $G(\xi, t; x, y)=0$, *когда* $(x, y)\in\sigma_0$ *или* $(\xi, t)\in\sigma_0$;

(б) *для любого n (участвующего в α) существуют определенные постоянные δ_i такие, что*

$$\lim_{t\to+0}\left[t\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}+(1-\alpha)\overline{G}+\sum_{i=1}^{n}\delta_i t^i\frac{\partial^2\overline{G}}{\partial\xi^{2i}}\right]=0$$

для $\xi\neq x$, $\overline{G}(\xi, t, x)=G(\xi, t; x, 0)$.

3. *В области D_1 функция $G(\xi, t; x, y)$ имеет представление*

$$G(\xi, t; x, y)=kt^{\alpha-1}(r_1^2)^{-\beta}F(\beta, \beta, 2\beta; 16\sqrt{yt}/r_1^2)$$

$$-kt^{\alpha-1}(4R^2)^{-\beta}(\overline{r}_1^2)^{-\beta}F(\beta, \beta, 2\beta; 16\sqrt{\overline{y}t}/\overline{r}_1^2),$$

$$4R^2=(2x-1)^2+16y,\quad \overline{x}=(x-1/2)/4R^2,\quad \overline{y}=y/(4R^2)^2,\ r_1^2=(x-\xi)^2+4(\sqrt{y}+\sqrt{t})^2,$$

в $\overline{r}_1$ везде вместо x, y следует писать $\overline{x}, \overline{y}$.

Решением алгебраической системы уравнений определяются δ_i. С помощью этой функции Грина получается основное соотношение

$$\tau(x)=k\int_0^1\nu(t)[|t-x|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}]dt+F(x), \tag{13}$$

$$F(x)=4^{1-\alpha}k\beta x(1-x)\int\limits_0^1 f_1(\xi)\,[\xi(1-\xi)]^{n+\alpha_0-2}(x^2+\xi-2x\xi)^{-\beta-1}d\xi,$$

$$f(s)=\bar{f}(\xi)=[\xi(1-\xi)]^{2n-1}f_1(\xi).$$

Исключая из (10) и (13) $\tau(x)$, получаем

$$\nu(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-\mu}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{(1-2t)^{2n}}{x+t-2xt}\right]\nu(t)dt=P(x),$$

$\mu=2\alpha_0-1$, или

$$\nu(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-\mu}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{x+t-2tx}\right)\nu(t)dt=P(x)+\lambda\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-\mu}\frac{1-(1-2t)^{2n}}{x+t-2xt}\nu(t)dt.$$

Разрешимость этого уравнения устанавливается на основании общей теории одномерных сингулярных интегральных уравнений [15] и единственности решения задачи T_n.

Задача T_n^*. Требуется определить функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами:

1. $U(x, y)$ — непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ при $y\neq 0$.

2. $U(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируема в области D_1 и удовлетворяет уравнению (2), а в области D_2 является обобщенным решением из класса R.

3. На линии параболического вырождения выполняются условия склеивания

(14) $$\tau^-(x)=a(x)\tau^+(x)+b(x),\quad \nu^-(x)=c(x)\nu^+(x)+d(x),$$

где $\tau^{\pm}(x)=U(x,\pm 0)$, $\nu^+(x)=\lim\{y^\alpha[U_y+A_n^+(U)]:\ y\to+0\}$, $\nu^-(x)=(-1)^n\times\lim\limits_{y\leftarrow -0}\{(-y)^\alpha[U-A_n^-(\tau)]'_y:\ y\to-0\}$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $d(x)$ — известные функции.

4. $U(x, y)$ принимает заданные значения $U|_\sigma=f(s)$, $U|_{OC}=\varphi(x)$, где f и φ — достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0)=a(0)f(0)+b(0)$. При $a(x)=c(x)=1$, $b(x)=d(x)=0$ задача T_n^* совпадает с задачей T_n.

Заметим, что задача Трикоми с условиями вида (14) для уравнений Лаврентьева — Бицадзе и Трикоми была рассмотрена в работах [13; 14].

При исследовании этой задачи также будем полагать, что кривая σ совпадает с нормальным контуром σ_0: $x(1-x)=4y$. Далее будем считать, что функция $a(x)$ является линейной, т. е. $a(x)=a_1x+a_2$ и для постоянных a_1, a_2 выполняется условие

(15) $$|a_2|\geq\bar{a}\,|a_1|,$$

где

$$\bar{a}=\begin{cases}(2n+1)/(2\alpha_0-1) & \text{при}\quad 1/2<\alpha_0\leq\alpha_{0n},\\ (n+1-\alpha_0)/(1-\alpha_0) & \text{при}\quad \alpha_{0n}\leq\alpha_0<1,\end{cases}$$

$$\alpha_{0n}=n+1-\sqrt{n^2+n/2}.$$

В зависимости от условия (14) будет $a(x)\geq 0$ или $a(x)\leq 0$. Будем считать, что

$$c(x) \neq 0, \quad a(x)c(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{16}$$

Для решения видоизмененной задачи Коши в D_2 класса R на основании условий (14) и (15) из (8) получим

$$a(x)\tau(x) + b(x) = \gamma_3 \int_0^x [c(t)\nu(t) + d(t)]\,(x-t)^{-2\beta}dt + \Phi(x), \tag{17}$$

$$\tau(x) = \tau^+(x), \quad \nu(x) = \nu^+(x).$$

Как мы показали выше, если

$$\tau^{(i)}(0) = \tau^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{18}$$

то в точке $M(\xi, 0)$ $(0 < \xi < 1)$, где $\tau^{(2n)}(x)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума)

$$\nu(\xi) < 0 \ \ (\nu(\xi) > 0). \tag{19}$$

Но, с другой стороны, при $\varphi = b = d = 0$ из (17) получим

$$c(x)\nu(x) = \gamma_4 \frac{d}{dx} \int_0^x [a(t)\tau(t)]^{(2n)}(x-t)^{\mu-1}dt, \quad \gamma_4 = \text{const} > 0. \tag{20}$$

В силу линейности $a(x)$ из (20) находим, что

$$\begin{aligned} c(x)\nu(x) = \gamma_4 \int_0^x \frac{\tau^{(2n)}(x) - \tau^{(2n)}(t)}{(x-t)^{1-\mu}} \left[\frac{(1-\mu)a(t)}{x-t} - 2na_1\right] dt \\ + \gamma_4 x^{\mu-1}\tau^{(2n)}(x)\,[a_2\mu + (2n+1)a_1 x]/\mu. \end{aligned} \tag{21}$$

Отсюда, используя условия (15), (16), нетрудно установить, что в точке $M(\xi, 0)$, где функция $\tau^{(2n)}(x)$ достигает положительного максимума

$$\nu(\xi) > 0. \tag{22}$$

Из условий (18) и неравенств (19), (22), при предположении $\tau^{(2n)}(0) = 0$ следует единственность решения задачи $\overset{*}{T}_n$.

Существование решения задачи $\overset{*}{T}_n$, как и в случае задачи T_n, доказывается методом интегральных уравнений.

Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из эллиптической части D_1 области D, имеет вид (13).

Исключая $\tau(x)$ из соотношений (13) и (17), для определения $\nu(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$A(x)\nu(x) + \frac{B(x)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{1-\mu} \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right] \nu(t)dt + \int_0^1 K(x, t)\nu(t)dt = \Psi(x), \tag{23}$$

где $A(x) = c(x) - \gamma_5(1 - \cos\mu\pi)a(x)$, $B(x) = -\gamma_5\, a(x)\sin\mu\pi$, $K(x, t)$ — Фредгольмово ядро.

Если $f(s) = \bar{f}(x) = [x(1-x)]^{2n-1}f_1(x)$, $f_1 \in C[0, 1]$, $\varphi(x) = x^{2n+\varepsilon}\varphi_1(x)$, $\varphi_1(x)$ — достаточно гладкая функция, $b(x) \in C^{2n+1}[0, 1]$, $c(x)$, $d(x) \in C^{(0,h)}[0, 1]$, то функция $\Psi(x) \in C^{(0,h_1)}(0, 1)$ и при $x \to 0$, $x \to 1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Функцию $\nu(x)$ будем искать в этом классе функций. Сингулярное интегральное уравнение (23) известным способом [2, 15] сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи T_n^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. *Доклады АН СССР*, **77**, 1951, № 2.
2. А. В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа. Москва, 1959.
3. И. Л. Кароль. К теории уравнений смешанного типа, *Доклады АН СССР*, **88**, 1953, № 3.
4. И. Л. Кароль. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа *Матем. сб.*, **38**, 1956, № 3.
5. С. С. Исамухамедов. Краевые задачи типа задачи E для уравнения смешанного типа второго рода. Сб. *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*, **2** Ташкент, 1972.
6. И. Л. Кароль. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. *Доклады АН СССР*, **88**, 1953, № 2.
7. Ф. И. Франкль. Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля. *Матем. сб.*, **54**, 1961, № 2.
8. М. С. Салахитдинов, С. С. Исамухамедов. О некоторых смешанных задачах для уравнения $\operatorname{sgn} y\,|y|^{-m}U_{xx}+U_{yy}=0$. *Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук*, 1970, № 5.
9. И. М. Петрушко. Краевые задачи для уравнений смешанного типа. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **103**, 1968.
10. С. А. Терсенов. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа. *Сиб. мат. ж.*, **2**, 1961, № 6.
11. С. С. Исамухамедов. О краевой задаче типа Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго рода. Сб. *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*, **5**. Ташкент, 1975.
12. С. А. Терсенов. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, 1973.
13. Г. Каратопраклиев. Об одном обобщении задачи T для уравнения $U_{xx}+\operatorname{sgn} yU_{yy}=0$. *Доклады АН СССР*, **151**, 1963, № 6, 1271—1273.
14. Г. Каратопраклиев. Об одном обобщении задачи Трикоми. *Доклады АН СССР*, **158**, 1964, № 2, 271—274.
15. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Москва, 1962.

Институт математики АН УзССР
Астрономический тупик 11
700000 Ташкент — ГСП

Поступила 30. 7. 1976