Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ПРИ ПОМОЩИ ЕГО НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

АСЕН Л. ДОНЧЕВ, РАДОСТИН П. ИВАНОВ

В настоящей работе исследуется зависимость решения экстремальной задачи при изменении множества допустимых элементов. Получены оценки решения с помощью его наилучшего приближения. Рассмотрен абстрактный метод Галеркина для решения задач оптимального управления и даны оценки отклонения приближения по Галеркину с помощью наилучшей аппроксимации экстремального элемента.

Численное решение бесконечномерных экстремальных задач, как правило, сводится к решению конечномерных задач, возникающих при дискретизации исходных задач. В течение последних лет были исследованы некоторые методы, использующие идею конечных элементов для приближенного решения задач оптимального управления. В [1] рассматривается задача синтеза оптимального управления с помощью метода Ритца и даются оценки сходимости решений конечномерной задачи к решению исходной. В [2] предлагается конечномерное приближение двойственной задачи оптимального управления. Аналогичный подход использован в [3] для оценки приближения линейно-квадратичной задачи без фазовых ограничений, а в [4] — с фазовыми ограничениями в виде неравенств. Даниель [5] дает условия, обеспечивающие слабую сходимость управления в нелинейной задаче, используя приближения типа Ритца — Галеркина. Для выпуклых функционалов специального типа некоторые оценки хаусдорфовой непрерывности множества решений экстремальной задачи в зависимости от множества допустимых элементов даны в [6].

Всюду дальше будем предполагать, что U — рефлексивное банахово пространство, $B_n \subset U$, $n=0, 1, \dots,$ — замкнутые и выпуклые множества, $J(u)$, $u \in U$ — функционал. Для следующего семейства экстремальных задач

$$\min_{u \in B_n} J(u), \quad n=0, 1, \dots \tag{1}$$

введем несколько предположений.

Предположение 1. *Функционал $J(u)$ непрерывен по норме и слабо полунепрерывен снизу, причем $\lim_{\|u\|\to\infty} J(u)=\infty$.*

Предположение 2. *Для любого $u_0 \in B_0$ существуют такие элементы u_n, $u_n \in B_n$, что $\lim_{n\to\infty} \|u_n-u_0\|=0$ и для любого шара S_r с центром в нуле и радиусом r имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{u_n \in B_n \cap S_r} \min_{u_0 \in B_0 \cap S_r} \|u_n-u_0\|=0.$$

Хорошо известно, что предположение 1 гарантирует слабую компактность множеств $G_n=\{u,\ u=\arg\min J(u),\ u\in B_n\}\neq\Phi$, $n=0, 1, \ldots$. Пусть $\widehat{u}_n\in G_n$ — решение задачи (1) и $a\xrightarrow{w}b$ означает слабую сходимость. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены предположения 1 и 2, то*

$$\lim_{n\to\infty} J(\widehat{u}_n)=J(\widehat{u}_0) \tag{2}$$

и любая слабо предельная точка и последовательности $\{\widehat{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *принадлежит множеству* G_0.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\limsup_{n\to\infty}\|\widehat{u}_n\|<\infty$. Пусть это не выполнено. Из предположения 2 следует, что существует такая последовательность $\{\overline{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\overline{u}_n\in B_n$, что $\lim_{n\to\infty}\|\overline{u}_n-\widehat{u}_0\|=0$. С другой стороны, имеем $\limsup_{n\to\infty} J(\widehat{u}_n)\leq\lim_{n\to\infty} J(\overline{u}_n)=J(\widehat{u}_0)$, а это уже противоречит предположению 1. Итак, существует такой шар S, что для любого n, $n=0, 1, \ldots$, $G_n\subset S$. Покажем, что все слабые предельные точки последовательности $\{\widehat{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат множеству G_0. Существование слабо предельных точек последовательности $\{\widehat{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует из слабой компактности шара S. Пусть $\widehat{u}_\lambda\xrightarrow{w}\widetilde{u}$, где подпоследовательность обозначена индексом λ. Из предположения 2 следует существование такой последовательности $\{u_\lambda\}$, $u_\lambda\in B_0$, что $\lim_\lambda\|u_\lambda-\widehat{u}_\lambda\|=\lim_\lambda\min_{u\in B_0\cap S}\|u-\widehat{u}_\lambda\|=0$.

Пусть $l\in U^*$, где U^* — сопряженное пространство. Тогда

$$\lim_\lambda\langle l,\widetilde{u}-u_\lambda\rangle=\lim_\lambda\langle l,\widetilde{u}-\widehat{u}_\lambda\rangle+\lim_\lambda\langle l,\widehat{u}_\lambda-u_\lambda\rangle=0$$

или $u_\lambda\xrightarrow{w}\widetilde{u}$. Теперь из слабой замкнутости множества B_0 следует, что $\widetilde{u}\in B_0$. Пусть $\overline{u}_\lambda\in B_\lambda$ такие, что $\lim_\lambda\|\overline{u}_\lambda-\widehat{u}_0\|=0$. Тогда

$$J(\widetilde{u})\leq\lim_\lambda\inf J(\widehat{u}_\lambda)\leq\lim_\lambda\inf J(\overline{u}_\lambda)=J(\widehat{u}_0),$$

то есть $\widetilde{u}\in G_0$. Выбирая необходимые последовательности, легко получаем неравенства

$$\liminf_{n\to\infty} J(\widehat{u}_n)\geq J(\widetilde{u})=J(\widehat{u}_0),\ \limsup_{n\to\infty} J(\widehat{u}_n)\leq\lim_{n\to\infty} J(\overline{u}_n)=J(\widehat{u}_0),$$

из которых следует (2). Теорема доказана.

Предположение 3. *Пусть $J(u)$ — непрерывный по норме функционал и равномерно выпуклый в следующем смысле: для любых $\alpha\in[0, 1]$ и $u_1\in U$, $u_2\in U$ выполнено*

$$J(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)\leq\alpha J(u_1)+(1-\alpha)J(u_2)-\alpha(1-\alpha)\delta(\|u_1-u_2\|), \tag{3}$$

где $\delta(t)\geq 0$, $\delta(t)\neq 0$ для $t\neq 0$ и из $\delta(t)\to 0$ следует, что $t\to 0$, $\delta(0)=0$.

Если выполнено предположение 3, то выполнено и предположение 1 [7]. Заметим, что если задачи (1) имеют единственные решения, а это так, если выполнено предположение 3, то согласно теореме 1 вся последовательность $\{\widehat{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к $\widehat{u}_0$.

Теорема 2. *Если выполнены предположения 2 и 3, то*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\| = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $u_n \in B_n$, $n = 1, 2, \ldots$ такие, что $\lim_{n\to\infty} \|u_n - \widehat{u}_0\| = 0$. Так как

$$J(\widehat{u}_n) \le J((\widehat{u}_n + u_n)/2) \le J(\widehat{u}_n)/2 + J(u_n)/2 - \delta(\|u_n - \widehat{u}_n\|)/4,$$

то

$$\delta(\|u_n - \widehat{u}_n\|) \le 2(J(u_n) - J(\widehat{u}_0)) + 2(J(\widehat{u}_0) - J(\widehat{u}_n)).$$

Теперь из неравенства треугольника $\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\| \le \|u_n - \widehat{u}_n\| + \|u_n - \widehat{u}_0\|$ и из теоремы 1 получаем (4). Теорема доказана.

Предположение 4. *Выполнено предположение 3, причем $\delta(t) = t^{2+\varepsilon}/\varrho$ при $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon \ge 0$, и $J(u)$ — дифференцируемый функционал с производной, удовлетворяющей условию Липшица с константной L.*

Теорема 3. *Если выполнены предположения 2 и 4, то для всех достаточно больших n и любых $u_n \in B_n$ имеем*

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\|^{2+\varepsilon} \le \varrho(2+\varepsilon)\langle J'(\widehat{u}_0),\ u_n + u_0 - \widehat{u}_n - \widehat{u}_0\rangle/2 + L\varrho(2+\varepsilon)\|u_n - \widehat{u}_0\|^2/4. \tag{5}$$

Доказательство. С одной стороны, имеем

$$J(\widehat{u}_n) = J(\widehat{u}_0) + \int_0^1 \langle J'(u_0 + t(\widehat{u}_n - \widehat{u}_0)),\ \widehat{u}_n - \widehat{u}_0\rangle\, dt$$

$$= J(\widehat{u}_0) + \langle J'(\widehat{u}_0),\ \widehat{u}_n - \widehat{u}_0\rangle + \int_0^1 \langle J'(\widehat{u}_0 + t(\widehat{u}_n - \widehat{u}_0)) - J'(\widehat{u}_0),\ \widehat{u}_n - \widehat{u}_0\rangle\, dt.$$

Из условия минимума следует, что $\langle J'(u_0),\ \widehat{u}_n - \widehat{u}_0\rangle \ge \langle J'(\widehat{u}_0), \widehat{u}_n - u_0\rangle$ для любого $u_0 \in B_0$ и, учитывая [7], получаем для больших n

$$J(\widehat{u}_n) \ge J(\widehat{u}_0) + \langle J'(u_0),\ \widehat{u}_n - u_0\rangle + 2\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\|^{2+\varepsilon}/\varrho(2+\varepsilon).$$

С другой стороны, для любых $u_n \in B_n$ имеем

$$J(\widehat{u}_n) \le J(u_n) = J(\widehat{u}_0) + \langle J'(\widehat{u}_0),\ u_n - \widehat{u}_0\rangle + \int_0^1 \langle J'(\widehat{u}_0 + t(u_n - \widehat{u}_0)) - J'(\widehat{u}_0),\ u_n - \widehat{u}_0\rangle dt$$

$$\le J(\widehat{u}_0) + \langle J'(\widehat{u}_0),\ u_n - \widehat{u}_0\rangle + L\|u_n - \widehat{u}_0\|^2/2.$$

Вычитая полученные неравенства, получаем (5).

Следуя [7], можно показать, что при $\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\| > 1$ неравенство (5) выполняется для $\varepsilon = 0$. Таким образом мы в дальнейшем будем предполагать, что как только $\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\| > 1$, то $\varepsilon = 0$.

Следствие 1. *Если выполнены предположения 2 и 4, то для достаточно больших n и для любых $u_n \in B_n \subset B_0$ имеет место*

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\|^{2+\varepsilon} \le \varrho(2+\varepsilon)\langle J'(\widehat{u}_0),\ u_n - \widehat{u}_0\rangle/2 + L\varrho(2+\varepsilon)\|u_n - \widehat{u}_0\|^2/4. \tag{6}$$

Следствие 2. *Если выполнены предположения 2 и 4, $B_0 = U$, то для достаточно больших n и для все: $u_n \in B_n$ имеет место*

$$(7)\qquad \|\widehat{u}_n-\widehat{u}_0\|^{2+\varepsilon}\leq L_Q(2+\varepsilon)\,\|u_n-\breve{u}_0\|^2/4.$$

Из следствия 2, в частности, вытекает, что, если минимизируем сильно выпуклый функционал на всем пространстве и это пространство аппроксимируем замкнутыми и выпуклыми множествами, порядок отклонения соответствующих экстремальных элементов равняется порядку отклонения наилучшей аппроксимации экстремального элемента. (В беседе с профессором В. Хегером выяснилось, что аналогичный рузультат получен в работе [9]).

Для иллюстрации полученных выше результатов рассмотрим следуюшую задачу оптимального управления

$$(8)\qquad \min\,[J(u)=\int_0^1(f(t,x)+\langle u(t),R(t)\,u(t)\rangle)\,dt],\ \dot{x}=A(t)x+C(t)\,u,\ x(0)=x_0,$$

где $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_m(t))$, $u(t)=(u_1(t),\ldots,u_r(t))$, матрица $A(t)$ имеет размерность $m\times m$, матрица $C(t)-m\times r$, матрица $R(t)-r\times r$, а их коэффициенты являются абсолютно непрерывными функциями на отрезке $[0,1]$. Функция $f(t,x)$ непрерывная по (t,x), имеет липшицовую производную по x и выпукла по x. Матрица $R(t)$ положительно определена.

Хорошо известно, что оптимальное управление для этой задачи является абсолютно непрерывной функцией времени t. В качестве B_n возьмем пространство сплайн-функций порядка $p-1$ с фиксированными и равномерно удаленными узлами. Обозначим расстояние между узлами через h. Заметим, что если $u\in B_n$, то задача (8) сводится к конечномерной задаче. Далее, из теории приближения сплайн-функциями и следствия 2 следует существование такой константы c, что

$$(9)\qquad \|\widehat{u}_n-\widehat{u}_0\|_{L_2^{(T)}}\leq ch^p,$$

где $\widehat{u}_0$ — решение задачи (8) в пространстве $L_2^{(r)}(0,1)$, а $\widehat{u}_n$ — решение задачи (8) в пространстве сплайн-функций B_n.

Упомянем, что если функция $f(t,x)$ квадратичная, получаем оценку, данную в [1]. В [3] получены такие же оценки для линейно-квадратичной задачи, дискретизируя двойственную задачу, которая также является линейно-квадратичной. В [4] получены оценки вида (6), а с помощью некоторых дополнительных предположений показано, что линейная часть в (6) имеет порядок $O(h^2)$.

Рассмотрим следующую абстрактную задачу оптимального управления

$$(10)\qquad \min J(x,u),\quad (x,u)\in B_0,\quad B_0=\{(x,u)\in X_0\times U_0,\quad P(x,u)=0,\ \ u\in D_0\},$$

где $J(x,u)$ — функционал, определенный на декартовом произведении $X_0\times U_0$ линейных нормированных пространств X_0 и U_0, $P(x,u)$ — оператор, действующий из пространства $X_0\times U_0$ — в линейное нормированное пространство Z_0, D_0 — замкнутое и выпуклое множество.

Следуя [5] и [8], можно сформулировать метод Галеркина для этой задачи следующим образом. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Z_n^*\}_{n=1}^\infty$ — последовательности конечномерных пространств, объединения которых соответственно плотны в X_0, U_0 и Z_0^*. Пусть в сопряженном пространстве Z_0^* задан базис $(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{mn}^*)$. Введем оператор $s_n(z)$, действующий из Z_0 в R^{m_n} следующим образом: $s_n(z)=\{\langle z_i^*, z\rangle\}_{i=1}^{m_n}$. Теперь сформулируем следующую приближенную задачу:

$$\min J(x, u), \quad (x, u)\in B_n, \tag{11}$$

где $B_n=\{(x_n, u_n)\in X_n\times U_n, s_n(P(x_n, u_n))=0, \; u_n\in D_n=D_0\cap U_n\}$. Решение задачи (11) будем называть приближениями по Галеркину для решения исходной абстрактной задачи оптимального управления, а системы $s_n(P(x_n, u_n))=0$ — системами Галеркина. Заметим, что при такой абстрактной постановке задачи вопрос существования решения системы Галеркина остается открытым.

Покажем, что описанный выше метод, если D_n — проекция D_0, есть проекционный метод Галеркина — Петрова [8]. Пусть π_n и σ_n — проекторы пространств X_0 и U_0 соответственно на X_n и U_n. Обозначим через τ_n проектор пространства Z_0 на Z_n, тогда система Галеркина—Петрова имеет вид $\tau_n P(\pi_n x, \sigma_n u)=0$. Поскольку эта система эквивалентна уравнению $\langle z^*, \tau_n P(\pi_n x, \sigma_n u)\rangle=0$ для любых $z^*\in Z^*$, имеем

$$0=\langle z^*, \tau_n P(\pi_n x, \sigma_n u)\rangle=\langle\tau_n^* z^*, P(x_n, u_n)\rangle=\langle\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_i z_i^*, P(x_n, u_n)\rangle,$$

а это уравнение в силу произвольности α_i эквивалентно системе Галеркина.

Для рассматриваемой задачи более удобно ввести следующие предположения.

Предположение 5. *Для любого $u_0\in D_0$ существуют такие элементы $u_n\in D_n$, что $\lim_{n\to\infty}\|u_n-u_0\|=0$.*

Предположение 6. *Для любого $u_n\in D_n$ существует единственное x_n, что $(x_n, u_n)\in B_n$, $n=0, 1, \ldots$, и выполнено*

$$\|x_n-x_0\|\leq\varphi(\|u_n-u_0\|),$$

где $\varphi(t)$ такая функция, что $\varphi(0)=0$, $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$.

Нетрудно показать, что эти предположения гарантируют выполнение предположения 2. Таким образом, из теоремы 1 получаем результат, аналогичный результату из [5], а из теоремы 3 — оценки, сформулированные в следующей теореме 4.

Теорема 4. *Пусть функционал $J(u, x)$ удовлетворяет предположению 4 и пусть приближения по Галеркину для абстрактной задачи оптимального управления удовлетворяют предположениям 5 и 6. Тогда для достаточно больших n и для любого $u_n\in D_n$ имеем*

$$\|\widehat{u}_n-\widehat{u}_0\|\leq c\|u_n-\widehat{u}_0\|^{1/2+\varepsilon}. \tag{12}$$

Рассмотрим достаточно простой пример множества B_n, для которого предположения 5 и 6 выполнены. Имеем

$$\dot{x}=a(t, x)+b(t)u(t), \; x(0)=0, \quad |u(t)|\leq 1, \; t\in[0, 1], \tag{13}$$

где $a(t, x)$ — непрерывная функция по t и липшицова по переменной x, а $b(t)$ — непрерывная функция. Пусть $U_0=Z_0=L_2(0, 1)$, $X_0=C(0, 1)$. Положим, что U_n, Z_n — пространство сплайн-функции нулевого порядка, X_n — пространство сплайн-функции первого порядка с n равномерно удаленными на расстояние h узлами. Тогда множество B_n имеет вид

$$|u_n(t_i)| \leq 1,$$

$$(14) \qquad x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a(t, x_n(t_i) + (x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i))(t-t_i)/h + b(t)u_n(t_i))dt.$$

Пусть уравнения (13) и (14) имеют единственные решения. Отсюда для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (|a(t, x) - a(t, x_n)| + |b(t)(u(t) - u_n(t))|)dt$$

$$+ \int_{t_i}^{t} |a(t, x) + b(t)u(t)| \, dt \leq \int_0^{t_i} k_1 |x(t) - x_n(t)| dt + \int_0^{t_i} k_2 |u(t) - u_n(t)| \, dt + O(h)$$

и тогда $\max_{t \in [0,1]} |x(t) - x_n(t)| < k \|u_n - u\|_{L_2}$, следовательно предположение 6 выполнено. Предположив, что в рассматриваемой задаче оптимальное управление удовлетворяет условию Липшица и целевая функция выполняет предположение 4, получаем следующие оценки:

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0\|_{L_2} \leq ch^{1/2}, \qquad \|\widehat{x}_n - \widehat{x}_0\|_C \leq ch^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. W. E. Bosarge, I. Johnson. Direct method approximation to the state regulator problem using a Ritz-Trefftz suboptimal control. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC—15, 1970.
2. O. Pionneau, E. Polack. A dual method for optimal control problem with initial and final boundary constraints. *SIAM J. on Control*, 11, 1973, 543—549.
3. M. H. Schultz. A Ritz method for an optimal control problem. *J. Optimization Theory and Appl.*, 11, 1973, No. 3, 255—265.
4. W. W. Hager. The Ritz-Trefftz method for state and control constrained optimal control problems. *SIAM J. Numer. Analysis*, **12**, 1975, No. 6, 854—867.
5. J. D. Daniel. The Ritz-Gaplerkin method for abstract control problems. *SIAM J. on Control*, **11**, 1973, No. 1, 53—64
6. В. И. Бердышев. Непрерывная зависимость элемента реализирующего минимум выпуклого функционала от множества допустимых элементов. *Мат. заметки*, **19**, 1976, № 4, 501—512.
7. Р. П. Иванов, Ц. Х. Недева. Сходимость в методе сопряженных градиентов. *Сердика*, **3**, 1977, № 1, 3—10.
8. М. М. Вайнберг. Вариационный метод и метод монотонных операторов. Москва, 1972.
9. F. Brezzi, W. W. Hager, P. A. Raviart. Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. Part I: Primal theory. *Numer. Math.* (to appear).

*Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373*

Поступила 23. 2. 1977