Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ЗАМЕТКА О ТЕОРЕМЕ КОРОВКИНА

ВЛАДИМИР Л. ЧАКАЛОВ

В этой заметке дается одно обобщение задачи Коровкина и доказывается необходимое и достаточное условие для ее решения. В качестве примеров из этого условия получаются ряд известных теорем, рассматривающих несущественно различные задачи типа Коровкина.

В ряде работ [1; 2; 3; 4; 5; 6], даются необходимые и достаточные уловия для того, чтобы данная система функций (конечная, бесконечная или линейная) была системой Коровкина для данного множества функций. Оказывается, что если обобщить соответствующим образом задачу Коровкина, все эти условия получаются из одного общего необходимого и достаточного условия.

Цель настоящей заметки — дать такое общее необходимое и достаточное условие о равномерной сходимости операторов, отображающих некоторые множества на множества действительных функций. В качестве примеров рассматриваются несколько несущественно различных теорем типа Коровкина.

Пусть Y — непустое множество, а X — подмножество Y, $X \neq \varnothing$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество функций вида $l\colon Y \to R^1$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\mathcal{L}$ — замкнуто относительно слабой сходимости, т. е., если для некоторой последовательности $\{l_\alpha\}$ (в общем случае обобщенной) функций множества $\mathcal{L}$ выполняется для всех $y \in Y$ соотношение $\lim_\alpha l_\alpha(y) = \lambda(y)$, то $\lambda(y) \in \mathcal{L}$;

б) если последовательность $\{l_\alpha\}$, $l_\alpha \in \mathcal{L}$, сходится слабо на множестве X, то каждая из последовательностей $\{l_\alpha(y)\}$, $y \in Y$, ограничена для достаточно больших α.

Ниже мы применим так называемый диагональный принцип (этот принцип известен нам из лекций по функциональному анализу, прочитанных Я. Тагамлицким в Софийском университете).

Пусть Q — множество индексов и пусть любому $q \in Q$ сопоставлено топологическое пространство K_q. Пусть далее $\{f_\delta\}$ — последовательность функций, определенных на множестве Q и удовлетворяющих условию, что $f_\delta(q) \in K_q$ для каждого $q \in Q$. Диагональный принцип составляет содержание следующей теоремы.

Теорема. *Пусть последовательность $\{f_\delta\}$ удовлетворяет следующему условию. Из каждой подпоследовательности $\{f_{\delta_\mu}(q)\}$ (где q — фиксированный элемент множества Q) можно выбрать сходящуюся к некоторому элементу множества K_q подпоследовательность $\{f_{\delta_{\mu_\nu}}(q)\}$ (здесь сходимость понимается в смысле топологии в K_q). Тогда существует подпоследовательность $\{f_{\delta_\beta}\}$ последовательности $\{f_\delta\}$, сходящаяся для любого фиксированного $q \in Q$.*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 242–248.

В качестве тривиального следствия этого принципа доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{L}$ удовлетворяет условиям а) и б) и пусть $Y' \subset Y$ содержит множество X. Если для некоторой последовательности $\{l_\alpha\}$, $l_\alpha \in \mathfrak{L}$, имеет место соотношение $\lim_\alpha l_\alpha(y) = \lambda(y)$ для любого $y \in Y'$, то существует такая функция $l' \in \mathfrak{L}$, что равенство $l'(y) = \lambda(y)$ выполняется для каждого $y \in Y'$ (т. е., если $\{l_\alpha\}$ сходится слабо на Y', то её предел можно продолжить на Y как функцию множества $\mathfrak{L}$).*

Доказательство. Из слабой сходимости $\{l_\alpha\}$ на Y' и из б) следует, что каждая из последовательностей $\{l_\alpha(y)\}$, $y \in Y$, ограничена для достаточно больших α. Отсюда следует, что из любой подпоследовательности $\{l_{\alpha_\mu}(y)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{l_{\alpha_{\mu_\nu}}(y)\}$. Согласно диагональному принципу, существует подпоследовательность $\{l_{\alpha_\beta}\}$, сходящаяся для любого $y \in Y$. Если через l' обозначим слабый предел этой подпоследовательности, то согласно а) $l' \in \mathfrak{L}$. Очевидно также, что $l'(y) = \lambda(y)$ для любого $y \in Y'$.

Замечание. Лемма 1 доказывается тем же способом, как следствие теоремы Тихонова [2], которая является (при подходящей формулировке) частным случаем диагонального принципа.

Ниже мы дадим некоторые определения.

Пусть $l \in \mathfrak{L}$. Будем говорить, что элемент $y_0 \in Y$ подчиняется множеству X относительно l, если для каждой последовательности $\{l_\alpha\}$, ($l_\alpha \in \mathfrak{L}$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_\alpha l_\alpha(y) = l(y) \tag{1}$$

для любого $y \in X$, выполняется также соотношение

$$\lim_\alpha l_\alpha(y_0) = l(y_0). \tag{2}$$

Будем говорить, что Y подчиняется множеству X относительно l, если каждый элемент множества Y подчиняется множеству X относительно l. Имеет место следующая почти очевидная лемма.

Лемма 2. *Множество Y подчиняется множеству X относительно l, $l \in \mathfrak{L}$, тогда и только тогда, когда из равенства*

$$l/X = l'/X, \tag{3}$$

где $l' \in \mathfrak{L}$, следует равенство

$$l = l'. \tag{4}$$

(здесь через f/Z обозначается рестрикция функции f на Z).

Доказательство. Достаточность. Пусть из (3) следует (4) и пусть выполняется (1) для всех $y \in X$. Если $y_0 \in Y$, то из б) следует, что последовательность $\{l_\alpha(y_0)\}$ ограничена для достаточно больших α и, следовательно, имеет предельную точку. Обозначим через p любую предельную точку этой последовательности и выберем подпоследовательность $\{l_{\alpha_\gamma}(y_0)\}$, сходящуюся к p. Очевидно, что каждая из последовательностей $\{l_{\alpha_\gamma}(y)\}$, $y \in X$, сходится к $l(y)$. Положив $Y' = X \cup \{y_0\}$ и

$$\lambda(y)=\begin{cases} l(y) & \text{для } y\in X,\\ p & \text{для } y=y_0,\end{cases}$$

получаем, что для $y\in Y'$ выполняется соотношение

$$\lim_{\gamma} l_{\alpha_\gamma}(y)=\lambda(y).$$

Из леммы 1 следует существование продолжения l', $l': Y\to R^1$, $l'\in\mathfrak{L}$, функции x. Но так как $l'=l$, то ясно, что $\lim_\gamma l_{\alpha_\gamma}(y_0)=p=\lambda(y_0)=l'(y_0)=l(y_0)$, т. е. последовательность $\{l_\alpha(y_0)\}$ имеет единственную предельную точку $l(y_0)$. Отсюда и из ограниченности $\{l_\alpha(y_0)\}$ следует, что $\lim_\alpha l_\alpha(y_0)=l(y_0)$. Так как y_0 — любая точка множества Y, то будет выполнено (2).

Необходимость. Необходимость тривиальна. Действительно, пусть из (1) следует (2) и пусть для некоторой функции $l'\in\mathfrak{L}$ выполняется (3). Если $\{\alpha:\ \alpha\in A\}$ — любая направленность, положим $l_\alpha=l'$. Так как из (1) следует (2), то для любого $y_0\in Y$ будем иметь $l(y_0)=l'(y_0)$, т. е. будет выполнено (4), что доказывает необходимость.

Пусть T — непустое множество. Обозначим через L оператор, сопоставляющий каждому элементу $y\in Y$ действительную функцию $L(y;\ t)$, определенную на множестве T.

Назовем оператор L допустимым, если для каждого $t'\in T$ функция $l_{t'}(y)=L(y;\ t')$ принадлежит множеству $\mathfrak{L}$. Будем говорить, что Y подчиняется равномерно на T множеству X относительно допустимого оператора L, если для любой последовательности $\{L_n\}$ допустимых операторов, для которой выполняется соотношение

$$\|L_n(y;\ t)-L(y;\ t)\|=\sup_{t\in T}|L_n(y;\ t)-L(y;\ t)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\quad(y\in X),$$

выполняется также соотношение

$$\|L_n(y;\ t)-L(y;\ t)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\quad(y\in Y).$$

При этом, не ограничивая общности, можно рассматривать только обыкновенные последовательности.

Будем говорить, что допустимый оператор L однозначно определен множеством X, если для любого допустимого оператора L' из равенства $L(y;\ t)=L'(y;\ t)$, где $y\in X$ и $t\in T$ следует то же самое равенство для всех $y\in Y$ и $t\in T$.

Совершенно очевидно, что допустимый оператор L однозначно определен множеством X тогда и только тогда, когда каждая функция вида $l_{t'}(y)=L(y;\ t')$ (напомним, что $l_{t'}\in\mathfrak{L}$) удовлетворяет условию леммы 2.

Имеет место следующая теорема типа Коровкина.

Теорема 1. *Пусть T — компактное топологическое пространство и L — допустимый оператор, отображающий Y в множество $C(T)$ действительных непрерывных функций, определенных на T. Для того, чтобы Y подчинялось равномерно на T множеству X относительно L, необходимо и достаточно, чтобы L был однозначно определен множеством X.*

Доказательство. Доказательство достаточности (как это делается в аналогичных случаях, например [7, с. 23—24]), проведем от противного.

Пусть оператор L однозначно определен множеством X и пусть $\{L_n\}$ — такая последовательность допустимых операторов, что для любого $y \in X$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(y; t) - L(y; t) \| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t \in T} | L_n(y; t) - L(y; t) | = 0.$$

Допустим, что то же самое соотношение имеет место не для всех $y \in Y$ и обозначим через y_0 элемент Y, для которого оно не выполняется. Это означает, что для некоторого положительного ε_0 существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и соответствующая ей последовательность значений $t=\{t_k\}$, для которых имеет место соотношение

$$(5) \qquad | L_{n_k}(y_0; t_k) - L(y_0; t_k) | \geq \varepsilon_0 .$$

Так как T компактно, существует подпоследовательность $\{k_\alpha\}$ (в общем случае обобщенная) последовательности натуральных чисел и элемент $t_0 \in T$, так что $\lim_\alpha t_{k_\alpha} = t_0 \in T$. Очевидно, для каждого α будем иметь неравенство

$$(6) \qquad | L_{n_{k_\alpha}}(y_0; t_{k_\alpha}) - L(y_0; t_{k_\alpha}) | \geq \varepsilon_0.$$

Легко видеть, что для каждого $y \in X$ имеем $\lim_\alpha L_{n_{k_\alpha}}(y; t_{k_\alpha}) = L(y; t_0)$. Действительно, так как $L_{n_{k_\alpha}}(y; t)$ сходится равномерно в T к $L(y; t)$ для любого фиксированного $y \in X$, то для таких y и всех достаточно больших α, $L_{n_{k_\alpha}}(y; t)$ мало отличается от $L(y; t)$ равномерно в T. Следовательно $L_{n_{k_\alpha}}(y; t_{k_\alpha})$ будет мало отличаться от $L(y; t_{k_\alpha})$ для таких y и α. Имея в виду, что $\lim_\alpha t_{k_\alpha} = t_0$ и $L(y; t)$ — непрерывная функция переменной t, получаем, что для любого $y \in X$ выполнено $\lim_\alpha l_\alpha(y) = \lim_\alpha L_{n_{k_\alpha}}(y; t_{k_\alpha}) = L(y; t_0)$ (здесь $l_\alpha(y) = L_{n_{k_\alpha}}(y; t_{k_\alpha})$). Так как оператор L однозначно определен множеством X, то из леммы 2 следует, что $\lim_\alpha l_\alpha(y_0) = \lim_\alpha L_{n_{k_\alpha}}(y_0; t_{k_\alpha}) = L(y_0; t_0)$. С другой стороны очевидно $\lim_\alpha L(y_0; t_{k_\alpha}) = L(y_0; t_0)$, так как $L(y_0, t)$ — непрерывная функция переменной t. Отсюда следует невозможное соотношение $\lim_\alpha | L_{n_{k_\alpha}}(y_0; t_{k_\alpha}) - L(y_0; t_{k_\alpha}) | = 0$. Последнее равенство противоречит равенству (6). Полученное противоречие доказывает достаточность.

Доказательство необходимости тривиально. Действительно, обозначив через L' допустимый оператор, удовлетворяющий равенству $L'(y; t) = L(y; t)$ для $y \in X$ и $t \in T$, и положив

$$L_n(y; t) = L'(y; t), \qquad y \in y,\ t \in T,\ n = 1, 2, \ldots,$$

заключаем, что $\| L_n(y; t) - L(y; t) \| = 0$ для каждого $y \in X$, следовательно $\lim_{n\to\infty} \| L_n(y; t) - L(y; t) \| = 0$, $y \in X$. Так как Y подчиняется равномерно на T множеству X относительно L, то для любого $y \in Y$ будем иметь

$$0 = \lim_{n\to\infty} \| L_n(y; t) - L(y; t) \| = \lim_{n\to\infty} \| L'(y; t) - L(y; t) \| .$$

Последнее равенство, однако, означает, что $L'(y; t) = L(y; t)$, $y \in Y$, $t \in T$, т. е. что L определяется однозначно множеством X. Этим завершается доказательство теоремы.

В дальнейшем изложении мы проиллюстрируем на нескольких примерах теорему 1.

Пример 1. Пусть Y — частично упорядоченное множество, а X — непустое подмножество Y, удовлетворяющее следующему условию:

в) Для любого $y \in Y$ существуют такие $y', y'' \in X$, что $y' \prec y \prec y''$. Обозначим через $\mathcal{L}$ некоторое множество действительных монотонных функций, определенных на Y (дальше будем считать для определенности, что монотонные функции, составляющие $\mathcal{L}$ — неубывающие), удовлетворяющее условию а) (например $\mathcal{L}$ может быть множеством всех неубывающих функций). Легко показать, что $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию б). Чтобы показать это, выберем $y \in Y$. Согласно в), существуют такие элементы y' и $y'' \in X$, что $y' \prec y \prec y''$. Если $\{l_\alpha\}$ — последовательность функций из $\mathcal{L}$, сходящаяся для любого $y \in X$, то из очевидных неравенств

$$l_\alpha(y') \leq l_\alpha(y) \leq l_\alpha(y'')$$

и из сходимости последовательностей $\{l_\alpha(y')\}$ и $\{l_\alpha(y'')\}$ следует ограниченность этих последовательностей для достаточно больших α, а отсюда следует, что для таких α будет ограничена и последовательность $\{l_\alpha(y)\}$, т. е. что выполняется условие б).

Так как $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям а) и б), то имеют место леммы 1 и 2, а для допустимых операторов (в этом случае они являются монотонными операторами) имеет место теорема 1.

Пусть l — функция из $\mathcal{L}$ (т. е. l — монотонная функция). Совершенно тривиально доказывается (мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта), что необходимое и достаточное условие для того, чтобы из (3) следовало (4), является выполнение равенства

$$\sup\{l(y) \mid y \prec y',\ y \in X\} = \inf\{l(y) \mid y \succ y',\ y \in X\}$$

для каждого $y' \in Y$. Имея в виду это, мы дадим теореме 1 следующую эквивалентную формулировку [3; 4; 5].

Теорема 2. *Пусть T — компактное топологическое пространство и L — допустимый (т. е. монотонный) оператор, отображающий множество Y в $C(T)$. Для того, чтобы Y подчинялось равномерно в T множеству X относительно L, необходимо и достаточно выполнение равенства* $\sup\{L(y;\ t') \mid y \prec y',\ y \in X\} = \inf\{L(y;\ t') \mid y \succ y',\ y \in X\}$ *для каждого $t' \in T$ и $y' \in Y$.*

Пример 2. Здесь мы остановимся подробнее на одном хорошо известном частном случае предыдущего примера.

Пусть T — компактное, отделимое пространство, Y — некоторое пространство действительных, непрерывных на T функций, а X — подпространство Y, разделяющее точки T и содержащее все константы. Будем считать, что $y_1 \succ y_2$, $y_1, y_2 \in Y$, если для всех $t \in T$ выполняется неравенство $y_1(t) \geq y_2(t)$. Очевидно, это частичное упорядочение пространства Y удовлетворяет условию в). Обозначим далее через $\mathcal{L}$ множество всех позитивных линейных функционалов, определенных на Y. Ясно, что $\mathcal{L}$ является множеством монотонных функций, удовлетворяющих условие а). Отметим дальше, что в этом случае множество допустимых операторов совпадает с множеством положительных линейных операторов, а оператор $L(y;\ t) = y(t)$ (он, очевидно, допустим) отображает пространство Y в $C(T)$. В этом случае теоремы 1 и 2 можно сформулировать следующим образом [3; 4; 5].

Теорема 1′. *В условиях и означениях примера 2 для того чтобы пространство Y подчинялось равномерно в T подпространству X относительно оператора $L(y; t) = y(t)$, необходимо и достаточно, чтобы L был однозначно определен подпространством X.*

Теорема 2′. *В условиях и означениях примера 2 для того чтобы пространсшво Y подчинялось равномерно в T подпространству X относительно оператора $L(y; t) = y(t)$, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\sup\{y(t') \mid y \prec y',\ y \in X\} = \inf\{y(t') \mid y \succ y',\ y \in X\}$$

для каждого $t' \in T$ и $y' \in Y$.

В терминах теории интегрирования теореме 1′, очевидно, можно дать следующую эквивалентную формулировку [4; 5].

Теорема 1″. *В условиях и означениях примера 2 для того, чтобы Y подчинялось равномерно в T подпространству X относительно оператора $L(y; t) = y(t)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая положительная мера μ, для которой*

$$y(t') = \int_T y(t)\,d\mu$$

для некоторого $t' \in T$ и любого $y \in X$, удовлетворяла этому равенству для каждого $y \in Y$.

Существует очевидная и хорошо известная связь теоремы 1′ с теорией выпуклых тел [5; 6]. Здесь мы сформулируем некоторые факты этой теории.

Пусть Z — подпространство пространства $C(T)$ действительных непрерывных функций, определенных на компактном отделимом пространстве T. Предположим, что Z содержит константы и разделяет точки T. Обозначим через $\mathfrak{L}$ конус позитивных линейных функционалов, определенных на Z. Как известно, функционал $l \in \mathfrak{L}$, $l \neq 0$, называется неразложимым, если из равенства $l = l_1 + l_2$ (здесь l_1, $l_2 \in \mathfrak{L}$ и $l_2 \neq 0$) следует равенство $l_1 = \lambda l_2$ для некоторого $\lambda \geq 0$. Существование хотя бы одного неразложимого функционала гарантируется теоремой Крейна — Мильмана. Легко показать, что любому неразложимому функционалу можно сопо тавить точку $t_l \in T$ так, чтобы для любого $z \in Z$ выполнялось равенство $l(z) = z(t_l)$. Притом, различным неразложимым функционалам l_1 и l_2 отвечают различные точки t_{l_1} и t_{l_2} из T. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между неразложимыми функционалами $\mathfrak{L}$ и частью множества T. Эту часть T мы обозначим через $\partial(Z, T)$ и назовем (как это обычно делается) границей Шоке. Как известно, для того чтобы функционал $l \in \mathfrak{L}$ был неразложим, необходимо и достаточно, чтобы он имел единственное позитивное линейное продолжение l', определенное на всем $C(T)$.

Имея в виду эту характеристику неразложимых функционалов, мы сформулируем следующее следствие теоремы 1′ [5; 6].

Следствие. *В условиях и означениях теоремы 1′ для того чтобы пространство Y подчинялось равномерно на T подпространству X относительно оператора $L(y; t) = y(t)$, необходимо $\partial(X, T) = \partial(Y, T)$, а если $\partial(X, T) = T$, то это условие и достаточно.*

В частном случае, когда T — замкнутый интервал $[p, q]$, а X — линейное пространство всех действительных многочленов степени ≤ 2: $x(t) = at^2 + lt + C$,

$t \in [p, q]$, как известно, $\partial(X, T) = T$ и сформулированное выше следствие дает теорему Коровкина [7].

Пример 3. Пусть, как выше, Y — подпространство пространства $C(T)$ непрерывных функций, определенных на компактном отделимом топологическом пространстве T, а X — подпространство Y. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество всех линейных непрерывных функционалов, определенных на Y, и удовлетворяющих условию $l(y) \leqq \sup\{|y(t)| \mid t \in T\}$ (здесь l — элемент $\mathfrak{L}$). Совершенно очевидно, что множество $\mathfrak{L}$ удовлетворяет условиям а) и б). Очевидно также, что допустимые операторы в этом случае являются нерастягивающими. Для этих операторов имеет место теорема 1. В частном случае, когда в теореме 1 имеем $L(y;\, t) = y(t)$, получаются, как в примере 2, различные эквивалентные формулировки теоремы 1 [6; 8], но на этом мы не будем останавливаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Минькова, Ю. А. Шашкин. О сходимости линейных операторов класса S_m *Матем. заметки.*, **6**, 1969, 591—598.
2. А. Тихонов. Über die topologische Erweiterung von Räumen. *Math. Ann.*, **102**, 1929, 544—561.
3. В. А. Баскаков. О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов. *Успехи мат. наук*, **16**, 1961, 131—134.
4. H Bauer. Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. *Ann. Inst. Fourier*, **11**, 1961, 89—136.
5. Ю. А Шашкин. Граница Мильмана — Шоке и теория приближения. *Функц. анализ и его приложения*, 1, 1967, 95—96.
6. Ю. А. Шашкин. О сходимости линейных операторов. Конструктивная теория функций. София, 1972, 119—125.
7. П. П. Коровкин. Линейные операторы и теория приближений. Москва, 1959.
8. L. C. Kurtz. Unique Hahn Banach Extensions and Korovkin's Theorem. Arizona State University and University of Kentucky (preprint).

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 2. 3. 1977