Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НОВОЕ КРАТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ О РЕГУЛЯРНОЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

ПЕТЪР Р. ПОПИВАНОВ

В этой работе предложено новое краткое доказательство регулярной гипоэллиптичности одного класса псевдодифференциальных уравнений, основанное на лемме Мелина (1971).

1. При рассмотрении псевдодифференциальных уравнений с кратными характеристиками важное место занимают регулярно гипоэллиптические операторы. Как нам указал В. Я. Иврий, можно выделить некоторый класс микролокально гипоэллиптических уравнений. Впоследствие Ц. Рангелов [6; 7] показал при помощи априорной оценки, что те же самые операторы глобально гипоэллиптичны. В своем доказательстве он пользуется методом локализации, специальным псевдодифференциальным разбиением единицы и некоторыми результатами Е. В. Радкевича [3]. Таким образом в техническом отношении указанное доказательство не имеет элементарного характера. Изучая определенные операторы неглавного типа в [8], мы нашли способ, который будучи применен в новой ситуации, дает простое и краткое доказательство теорем Иврия — Рангелова, излагаемое в настоящей заметке.

2. Пусть $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка m со старшим символом $p_m^0(x, \xi)$ и член порядка однородности $(m-1): p_{m-1}(x, \xi)$ Тогда субглавным символом называется функция

$$p'_{m-1}(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_m^0}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi).$$

Кроме того, напомним, что главный символ $c_{2m-1}^0(x, \xi)$ коммутатора $[P^*, P$ где $P^* - L_2$ — сопряженный оператор к оператору P, имеет вид

$$c_{2m-1}^0(x, \xi) = 2\,\mathrm{Im} \sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial p_m^0}{\partial \xi_j}} \frac{\partial p_m^0}{\partial x_j}.$$

Наконец сформулируем лемму Мелина, которая играет первостепенную роль в доказательстве.

Пусть старший символ $q_m^0(x, \xi)$ оператора $Q(x, D)$ всюду неотрицателен и точка $(x^0, \xi^0) \in T^*(\Omega) \setminus \{0\}$ такая, что $q_m^0(x^0, \xi^0) = 0$. Обозначим через $R(v)$ квадратическую форму, с которой начинается Тэйлоровское развитие функции q_m^0, когда $v \in T(T^*(\Omega))$. Тогда поляризованная форма $R(v, v')$ допускает представление $R(v, v') = \sigma(v, F_q v')$, где $\sigma = \Sigma_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ — стандартная симплектическая форма в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$.

Как общепринято, оператор F_q называется фундаментальной матрицей оператора q. Без труда можно проверить, что $\operatorname{spec} F_q \subset i\mathbb{R}^1$ и, кроме того, если $\mu \in \operatorname{spec} F_q$, то $\bar{\mu} \in \operatorname{spec} F_q$. Обозначим через λ_j, $1 \leq j \leq n$ собственные числа фундаментальной матрицы, для которых $i\lambda_j \in \operatorname{spec} F_q$ и $\lambda_j \neq 0$.

Теорема Мелина [2]. *Пустъ главный символ* $q_m^0(x, \xi)$ *оператора* $Q(x, D)$ *всюду неотрицателен. Предположим, что*

$$\operatorname{Re} q_{m-1}(x, \xi) + 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x, \xi) > 0$$

в любой точке $(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus \{0\}$, *для которой* $q_m^0(x, \xi) = 0$. *Тогда существуют такие константы* $C(K) > 0$, $C'(K)$, *что*

$$\operatorname{Re}(Q(x, D)u, u) \geq C(K) \|u\|^2_{(m-1)/2} - C'(K) \|u\|^2_{(m-2)/2} \; \forall u \in C_0^\infty(K).$$

3. А теперь приступим к формулировке основной теоремы этой заметки. Мы предполагаем, что имеют место следующие два требования:

(A) 1) $p_m^0(x^0, \xi^0) = 0$, $\operatorname{grad}_{x,\xi} p_m^0(x^0, \xi^0) \neq 0 \Rightarrow c_{2m-1}^0(x^0, \xi^0) > 0$;

2) если $p_m^0(x^0, \xi^0) = \operatorname{grad}_{x,\xi} p_m^0(x^0, \xi^0) = 0$, то существуют коническая окрестность ω точки (x^0, ξ^0) и константа C_ω, такие, что $c_{2m-1}^0(x, \xi) \geq C_\omega(|\operatorname{grad}_x p_m^0|^2 |\xi|^{-1} + |\operatorname{grad}_\xi p_m^0|^2 |\xi|)$, $\forall (x, \xi) \in \omega$.

(B) В любой точке (x^0, ξ^0), в которой выполнено условие (A2), фундаментальная матрица $F_{c_{2m-1}}$ имеет хотя бы два отличных от нуля собственных чисел.

Определение 1. *Псевдодифференциальный оператор* $P(x, D)$ *называется регулярно гипоэллиптическим, если он гипоэллиптичен для любых младших членов.*

Теорема 1. *Пусть для оператора* $P(x, D)$ *выполнены условия* (A), (B) *Тогда он регулярно гипоэллиптический, причем если* $u \in D'(\Omega)$, $P(x, D)u \in H^s_{\mathrm{loc}}$ *то* $u \in H^{s+m-1}_{\mathrm{loc}}$.

4. Доказательство теоремы 1 следует из двух нижеприводимых лемм.

Лемма 1. *Пусть оператор* $P(x, D)$ *удовлетворяет требованиям теоремы 1. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\|Pu\|_0^2 \geq C(K)\|u\|^2_{m-1} - C'(K)\|u\|^2_{m-2}, \; \forall u \in C_0^\infty(K), \tag{1}$$

где константы $C(K) > 0$, $C'(K) > 0$.

Лемма 2. *В предположениях леммы 1 для любого вещественного* s *можно найти такую константу* $C(K) > 0$, *что*

$$\sum_{j=1}^{n} (\|p_m^{(j)}(x, D)u\|_{s+1/2} + \|p_{m(j)}(x, D)u\|_{s-1/2}) \leq C(K)(\|p_m(x, D)u\|_s + \|u\|_{s+m-1}),$$

$\forall u \in C_0^\infty(K)$ (*здесь* $p_m^{(j)}(x, \xi) = \partial p_m^0/\partial \xi_j$, $p_{m,j} = \partial p_m^0/\partial x_j$).

Доказательство леммы 1. Воспользуемся элементарным тождеством

$$\|Pu\|_0^2 = \|P^*u\|_0^2 + (c_{2m-1} u, u), \; \forall u \in C_0^\infty(K) \tag{2}$$

и рассмотрим оператор порядка $2m-1$:

$$f(x, D) = c_{2m-1}(x, D) + (p_m^0 + p_{m-1})^* \circ \frac{(p_m^0 + p_{m-1})}{\varepsilon |D|}, \quad \varepsilon > 0.$$

Его старший символ $f^0_{2m-1}(x,\xi)=c^0_{2m-1}(x,\xi)+|p^0_m|^2\varepsilon^{-1}|\xi|^{-1}$. Так как по условию (A) $c^0_{2m-1}(x,\xi)\geq 0$ в некоторой окрестности характеристического множества $H=\{(x,\xi):p^0_m(x,\xi)=0,\ \xi\neq 0\}$, то при подходящем выборе $\varepsilon>0$ имеем, что $f^0_{2m-1}(x,\xi)\geq 0$ всюду. Заметим, кроме того, что $f^0_{2m-1}(x,\xi)=0\Leftrightarrow c^0_{2m-1}(x,\xi)=0$, $(x,\xi)\in H$ и что

$$\{(x,\xi):f^0_{2m-1}(x,\xi)=0,\ \xi\neq 0\}\subset H'=\{(x,\xi)\in H:\mathrm{grad}_{x,\xi}\,p^0_m(x,\xi)=0\}.$$

А теперь изучим символ f_{2m-2} порядка однородности $2m-2$. Прежде всего из явного вида c_{2m-2} сразу следует, что $\mathrm{Re}\,c_{2m-2}(x,\xi)=0$ для любой точки $(x,\xi)\in H'$, поскольку

$$c_{2m-2}(x,\xi)=O\,(|\mathrm{grad}_{x,\xi}p^0_m|)-2^{-1}\sum_{j,k=1}^{n}(\overline{p}^{0(jk)}_m p^0_{m(jk)}-p^{0(jk)}_m\overline{p^0_{m,(jk)}}).$$

Наконец заметим, что $F_{f^0_{2m-1}}=F_{c^0_{2m-1}}$ в тех точках (x,ξ), в которых $f^0_{2m-1}(x,\xi)=O$, т. к. $D^\alpha(|p^0_m|^2)=0$ на H', если $|\alpha|=2$. В силу теоремы Мелина приложенной к $f(x,D)$, находим, что

$$\|Pu\|^2_0=\|P^*u\|^2_0+C(K)\|u\|^2_{m-1}-C'(K)\|u\|^2_{m-2}-((p_m+p_{m-1})^*\circ\frac{(p_m+p_{m-1})}{\varepsilon|D|}u,u).$$

Неравенство (1) следует из оценки

$$|(Pu,\frac{P}{\varepsilon|D|}u)|\leq\delta\|u\|^2_{m-1}+C''(\delta)\|Pu\|^2_0,$$

где $\delta>0$ — произвольное. Заметим, что мы показали более сильную оценку

$$\|Pu\|^2_0\geq\|P^*u\|^2_0+C\|u\|^2_{m-1}-C'\|u\|^2_{m-2},\ \forall u\in C_0^\infty(K),\ C>0.$$

Доказательство леммы 2. И в этом случае мы применим тождество (2), но на этот раз к оператору $q_{m+s}(x,\xi)=\Lambda^s p^0_m(x,\xi)$, где $\Lambda(\xi)=|\xi|$ для $|\xi|\geq 1$. Обратим внимание, что во всех рассмотрениях мы ограничимся изучением поведения только старших символов порядка однородности $m+s$, поскольку при умножении или переходе к сопряженному оператору возникают члены вида $\|T_{s+m-1}u\|_0$, $(T_{2s+2m-1}u,u)$, которые оцениваются через $\|u\|^2_{s+m-1}$. Итак, старший символ $c^0_{2m+2s-1}$ коммутатора $[q^*,q]$ равен

$$c^0_{2m+2s-1}=\Lambda^{2s}c^0_{2m-1}+2\,\mathrm{Im}\,\Lambda^s\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\overline{p}_m\frac{\partial\Lambda^s}{\partial\xi_j}.$$

Очевидно, что $\mathrm{grad}_\xi\,q=\Lambda^s\,\mathrm{grad}_\xi\,p_m+p_m\,\mathrm{grad}_\xi\,\Lambda^s$, $\mathrm{grad}_x q=\Lambda^s\,\mathrm{grad}_x p_m$. Из соображений компактности и условия (A) легко выводится, что существуют константы $C>0$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$c^0_{2m-1}(x,\xi)+\frac{|p_m|^2}{\varepsilon|\xi|}\geq C(|\mathrm{grad}_x\,p_m|^2|\xi|^{-1}+|\mathrm{grad}_\xi\,p_m|^2|\xi|)$$

всюду. Следовательно, для любой точки $(x,\xi)\in T^*(K)\setminus\{0\}$

$$\Lambda^{2s}c^0_{2m-1}+\frac{|q|^2}{\varepsilon}|\xi|^{-1}\geq C(|\mathrm{grad}_\xi\,p_m|^2\Lambda^{2s+1}+|\mathrm{grad}_x\,p_m|^2\Lambda^{2s-1}).$$

Итак, $\quad [c^0_{2m+2s-1}-2\,\mathrm{Im}\,\Lambda^s\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\overline{p}_m\frac{\partial\Lambda^s}{\partial\xi_j}+\frac{|q|^2}{\varepsilon}|\xi|^{-1}]^{1/2}\leq C'(|\mathrm{grad}_x\,q|\,|\xi|^{-1/2}$

$$+\|\operatorname{grad}_\xi q - p_m \operatorname{grad}_\xi \Lambda^s\| |\xi|^{1/2}) \geq C'(\|\operatorname{grad}_x q\| |\xi|^{-1/2}$$
$$+\|\operatorname{grad}_\xi q\| |\xi|^{1/2} - C''|q| |\xi|^{-1/2}),\ C',\ C''>0, \text{ т. е.}$$

$$c^0_{2m+2s-1} - 2\operatorname{Im} \Lambda^s \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_m}{\partial x_j} \bar{p}_m \frac{\partial \Lambda^s}{\partial \xi_j} + \frac{|q|^2}{\varepsilon'} |\xi|^{-1} \geq C'''(|\operatorname{grad}_x q|^2 |\xi|^{-1} + |\operatorname{grad}_\xi q|^2 |\xi|)$$

$\forall (x, \xi) \in T^*(K) \setminus \{0\}; \varepsilon' > 0$. Наконец заметим, что

$$\operatorname{Im} p^0_m \frac{\partial \bar{p}^0_m}{\partial x_j} = (\bar{p}^0_m \frac{\partial p^0_m}{\partial x_j} - p^0_m \frac{\partial \bar{p}^0_m}{\partial x_j})/2i.$$

Утверждение леммы 2 следует из применения тождества (2) к оператору $q(x, D)$ с последующим применением точного неравенства Гординга [1]. Действительно, $\|qu\|_0^2 = \|p_m u\|_s^2 + O(\|u\|^2_{s+m-1})$, $\|q^* u\|_0^2 = \|p^*_m u\|_s^2 + O(\|u\|^2_{s+m-1})$ и, следовательно,

$$\|p_m u\|_s^2 + \tilde{C}\|u\|^2_{s+m-1} \geq \|p^*_m u\|_s^2 + \tilde{\tilde{C}}(\sum_{j=1}^n \|p_{m(j)} u\|^2_{s-1/2} + \sum_{j=1}^n \|q^{(j)} u\|^2_{1/2})$$

$$+O(\|\bar{p}_m u\|_s \|u\|_{s+m-1} + \|p_m u\|_s \|u\|_{s+m-1}),\ \forall u \in C_0^\infty(K).$$

Этим все доказано, т. к. старший символ p^*_m в точности совпадает с $\bar{p}_m$ и

$$\|q^{(j)} u\|_{1/2} \geq \|p^{(j)}_m u\|_{s+1/2} - C_0(\|u\|_{s+m-1} + \|p_m u\|_{s-1/2}).$$

Доказательство теоремы 1 сразу следует из лемм 1, 2 леммы Фридрихса и свойства коммутатора PA_ε, $A_\varepsilon = X(x)(1+(\varepsilon|\xi|)^2)^{-1}$, $X \in C_0^\infty$. Так как рассуждения стандартны и сделаны подробно в [5], мы их опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander. Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. of Math.*, **83**, 1966, No. 1, 129—209.
2. A. Melin. Lower bounds for pseudodifferential operators. *Arkiv mat.*, **9**, 1971, 117—140.
3. Е. В. Радкевич. Априорные оценки и гипоэллиптические уравнения с кратными характеристиками. *Доклады АН СССР*, **187**, 1969, 274—277.
4. Ю. В. Егоров. О разрешимости дифференциальных уравнений с простыми характеристиками. *Успехи мат наук*, **26**, 1971, No. 2, 183—197.
5. L. Hörmander. A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics. *Math. Ann.*, **217**, 1975, No 2, 165—188.
6. Ц. В. Рангелов. Априорная оценка и гипоэллиптичность некоторого класса псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками. *Вестник Моск. ун-та, Мат., мех.*, 1978, (в печати).
7. Ц. В. Рангелов. Некоторые классы псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками. *Диссертация*, МГУ, 1976, 48—78.
8. П. Р. Попиванов. Достаточное условие для локальной разрешимости некоторого класса псевдодифференциальных уравнений неглавного типа. *Доклады БАН*, **20**, 1977, № 7, 981—984.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 4. 3. 1977