Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

РАДОСТИН П. ИВАНОВ. НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ

В этой статье доказываются сформулированные авторами (1977) теоремы для оценки снизу и сверху скорости сходимости двух классов функнциональноитерационных методов для решения обыкновенных уравнений. На основе этих методов рассматривается обобщение для многомерного случая и приведен метод, который сводит решение системы нелинейных уравнений к многократному решению линейных систем. При каждой итерации описанного метода необходимо вычислять левые стороны системы только в одной точке.

1. Теоремы о скорости сходимости [1].

Теорема 1. *Пусть для итерационного решения уравнения* $f(x)=0$ *задан двухточечный процесс:*

$$x_{k+1}=(x_{k-1}\,y_kP_k^1-x_ky_{k-1}P_k^2)/(y_kP_k^1-y_{k-1}P_k^2), \tag{1}$$

где $f(x)$ — *дважды дифференцируемая функция с ограниченной второй производной в окрестности корня* ξ, $f'(x)>0$, $y_k=f(x_k)$,

$$P_k^i=\alpha_i\,|y_{k-1}|^s+\beta_i\,|y_k|^s+Q_k^i(y_{k-1},y_k,x_{k-1},x_k),\quad s\geqq 0.$$

Функции Q_k^i *удовлетворяют оценкам*

$$|Q_k^i|\leqq c_1^i\sum_{j=1}^{N}|y_{k-1}|^{j_1}|y_k|^{j_2}+c_2^i|y_{k-1}|^t+c_3^i|y_k|^t,\quad j_1,j_2>0,\ j_1+j_2\geqq s,\ c_j^i\geqq 0,$$

$j=1, 2, 3$, *а* $P_k^i>0$, *если* $|y_k|+|y_{k-1}|>0$, $i=1, 2$. *Тогда:*

1. *Если* $\alpha_1\neq\alpha_2$, $s>0$, *процесс* (1) *в классе описанных функций не может сходиться со сверхлинейной скоростью, то есть не может иметь место равенство* $|x_k-\xi|=o(|x_{k-1}-\xi|)$.

2. *Если* $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, $|Q_k^1-Q_k^2|\leqq d_1(|y_{k-1}|^{s+1}+|y_k|^{s+1})$, *в классе описанных функций процесс* (1) *не может иметь скорость сходимости выше сверхлинейной константы* $(1+\sqrt{5})/2$, *то есть не может иметь место* $|x_k-\xi|=o(|x_{k-1}-\xi|^{(1+\sqrt{5})/2})$.

Доказательство пункта 1. Разложив y_k и y_{k-1} по формуле Тейлора до вторых производных, получим

$$x_{k+1}-\xi=(x_k-\xi)(x_{k-1}-\xi)\times \tag{2}$$

$$\frac{f'(\xi)((\alpha_1-\alpha_2)|y_{k-1}|^s+(\beta_1-\beta_2)|y_k|^s+Q_k^1-Q_k^2)+2^{-1}f''(\eta_k)(x_k-\xi)P_k^1-2^{-1}f''(\eta_{k-1})(x_{k-1}-\xi)P_k^2}{f'(\xi)((x_k-\xi)P_k^1-(x_{k-1}-\xi)P_k^2)+2^{-1}f''(\eta_k)(x_k-\xi)^2P_k^1-2^{-1}f''(\eta_{k-1})(x_{k-1}-\xi)^2P_k^2}$$

где $\eta_k\in(\xi, x_k)$ и $\eta_{k-1}\in(\xi, x_{k-1})$.

Теперь допустим, что процесс (1) имеет сверхлинейную скорость сходимости, то $|x_k-\xi|=o(|x_{k-1}-\xi|)$. Так как $f(x)$ имеет отличную от нуля первую производную в окрестности корня ξ, то в силу существования второй производной имеем $|y_k|=o(|y_{k-1}|)$.

Далее, учитывая ограничения, наложенные на P_k^1 и P_k^2, находим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{Q_k^1-Q_k^2}{|y_{k-1}|^s}=\lim_{k\to\infty}\frac{f''(\eta_k)(x_k-\xi)P_k^1}{|y_{k-1}|^s}=\lim_{k\to\infty}\frac{f''(\eta_{k-1})(x_{k-1}-\xi)P_k^2}{|y_{k-1}|^s}=0.$$

Теперь из (2) получаем $\lim_{k\to\infty}((x_{k+1}-\xi)/(x_k-\xi))=-(a_1-a_2)/a_2\neq 0$. Это противоречие завершает доказательство пункта 1.

Доказательство пункта 2 аналогично. Если рассмотрим процесс (1) для функции с достаточно большой второй производной, то из (2) получим

$$\lim_{k\to\infty}(|x_{k+1}-\xi|/|x_k-\xi|^{(1+\sqrt{5})/2})$$

$$\geq\lim_{k\to\infty}\frac{|x_k-\xi||x_{k-1}-\xi||2^{-1}f''(\eta_{k-1})|x_{k-1}-\xi|a_2|y_{k-1}|^s-f'(\xi)d_1|y_{k-1}|^{s+1}|}{|x_k-\xi|^{(1+\sqrt{5})/2}f'(\xi)|x_{k-1}-\xi||y_{k-1}|^s}.$$

$$\geq\lim_{k\to\infty}(|2^{-1}f''(\eta_{k-1})a_2-d_1|y_{k-1}|f'(\xi)/|x_{k-1}-\xi||(f'(\xi)a_2)^{-1})\neq 0.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть начальные приближения x_1 и x_2 достаточно близки к корню ξ, причем $|x_2-\xi|<q|x_1-\xi|$, $0<q<1$. Тогда:*

1. *Если выполнены предположения пункта 1 теоремы 1 и сверх того $c>P_k^1/P_k^2>(1-\alpha\bar{q})/(1-\alpha q^2)$, где $q<\bar{q}<1$ и $0<\alpha<1$, то процесс (1) сходится со скоростью геометрической прогрессии.*

2. *Если выполнены предположения пункта 2 теоремы 1 и q — достаточно малое число, то процесс (1) сходится со сверхлинейной скоростью с константой $(1+\sqrt{5})/2$.*

Доказательство пункта 1. Из (2) получаем

$$(x_{k+1}-\xi)/(x_k-\xi)=$$

$$\frac{f'(\xi)(P_k^1/P_k^2-1)+2^{-1}f''(\eta_k)(x_k-\xi)P_k^1/P_k^2-2^{-1}f''(\eta_{k-1})(x_{k-1}-\xi)}{f'(\xi)((x_k-\xi)P_k^1(P_k^2(x_{k-1}-\xi))^{-1}-1)+2^{-1}f''(\eta_k)(x_k-\xi)^2P_k^1(P_k^2(x_{k-1}-\xi))^{-1}-2^{-1}f''(\eta_{k-1})(x_{k-1}-\xi)}$$

Теперь, учитывая, что функция $(1-x)/(1-qx)$ монотонно убывает при $0<q<1$, и что $f'(x)$ и P_k^1/P_k^2 ограниченные, найдем такую константу A, что будет выполнено

$$(x_{k+1}-\xi)/(x_k-\xi)<\frac{1-(1-\alpha\bar{q})/(1-\alpha q^2)+A(|x_{k-1}-\xi|+|x_k-\xi|)/(1-\alpha q^2)}{1-q(1-\alpha\bar{q})/(1-\alpha q^2)-A(|x_{k-1}-\xi|+|x_k-\xi|)/(1-\alpha q^2)}.$$

Отсюда, если $|x_k-\xi|$ и $|x_{k-1}-\xi|$ достаточно близки к нулю, получаем

$$\left|\frac{x_{k+1}-\xi}{x_k-\xi}\right|\leq\frac{\alpha q(1-\bar{q})+A(|x_{k-1}-\xi|+|x_k-\xi|)}{1-q-\alpha q(\bar{q}-q)+A(|x_{k-1}-\xi|+|x_k-\xi|)}$$

$$\leq \frac{\alpha q(1-\bar{q})+A(|x_{k-1}-\xi|+|x_k-\xi|)}{1-\bar{q}-A(|x_{k-1}-\xi|+|x_k-\xi|)}<\bar{q}.$$

Пункт 1 доказан.

Доказательство пункта 2. Если мы покажем, что существует константа A, для которой будет выполнено неравенство $|x_{k+1}-\xi|\leq A|x_k-\xi|\times|x_{k-1}-\xi|$, то согласно (2) и предполагая, что $|x_{k-1}-\xi|$ и $|x_k-\xi|$ достаточно близки к нулю, процесс (1) будет сходиться со сверхлинейной скоростью с константой $(1+\sqrt{5})/2$.

Фиксируя достаточно малое число q, из (2) получаем

$$|x_{k+1}-\xi|\leq|x_k-\xi||x_{k-1}-\xi|$$

$$\times\frac{2f'(\xi)d_1(|y_{k-1}|^s+|y_k|^s)+|f''(\eta_k)||x_k-\xi|P_k^1+|f''(\eta_{k-1})||x_{k-1}-\xi|P_k^2}{2f'(\xi)(P_k^1-qP_k^2)|x_{k-1}-\xi|-|f''(\eta_k)||x_k-\xi|^2P_k^1-|f''(\eta_{k-1})||x_{k-1}-\xi|^2P_k^2}.$$

Так как вторая производная функции $f(x)$, P_k^1 и P_k^2 ограниченны в окрестности корня ξ, то, с учетом, что q — достаточно малая величина и что x_k и x_{k-1} достаточно близки к корню ξ, будем иметь: $|x_{k+1}-\xi|\leq|x_k-\xi|\times|x_{k-1}-\xi|$. Если потребовать, чтобы $A|x_1-\xi|\leq q$, то для всех $k=3, 4, \ldots$ будем иметь $|x_{k+1}-\xi|\leq A|x_k-\xi||x_{k-1}-\xi|$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть для итерационного решения уравнения* $f(x)=0$ *задан двухточечный процесс*

$$(3)\qquad x_{k+1}=(x_k^1y_k^2P_k^1-x_k^2y_k^1P_k^2)/(y_k^2P_k^1-y_k^1P_k^2),\quad y_k^2<0<y_k^1,\quad y_k^i=f(x_k^i),\quad i=1, 2,$$

$x_{k+1}^1=x_{k+1}$, $x_{k+1}^2=x_k^2$, *если* $f(x_{k+1})>0$ *и* $x_{k+1}^2=x_{k+1}$, $x_{k+1}^1=x_k^1$, *если* $f(x_{k+1})<0$, *где для функций* $f(x)$, P_k^1 *и* P_k^2 *выполнены предположения теоремы 1. Тогда:*

1. *Если* $\alpha_1\neq\alpha_2$, $\beta_1\neq\beta_2$, $c_2^i=c_3^i=0$ $(i=1, 2)$ *и* $s>0$, *процесс* (3) *не может иметь сверхлинейную скорость сходимости, то есть не может иметь место неравенство* $|x_{k+1}-\xi|\leq o(\min(|x_k^1-\xi|, |x_k^2-\xi|))$.

2. *Если* $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$ *и* $|Q_k^1-Q_k^2|\leq d_1(|y_k^1|^{s+1}+|y_k^2|^{s+1})$, *процесс* (3) *не может иметь скорость сходимости выше сверхлинейной с константой* $(1+\sqrt{5})/2$, *то есть не может иметь место неравенство*

$$|x_{k+1}-\xi|\leq o((\min|x_k^1-\xi|, |x_k^2-\xi|)^{(1+\sqrt{5})/2}).$$

Доказательство пункта 1. Допустим, что процесс (3) имеет сверхлинейную скорость сходимости. Последовательность $\{x_{k+1}\}$, полученная процессом (3), разделим на две под последовательности в зависимости от положения элементов относительно корня ξ. Пусть $\{x_{k_m+1}\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность элементов, для котоъых $x_{k_m+1}<\xi$. Рассмотрим только этот случай, поскольку второй случай рассматривается совершенно аналогично. Элементы рассматриваемой подпоследовательности получаются из элементов $x_{k_m}^1$ и $x_{k_m}^2$. Теперь мы имеем два случая, а именно: первый — когда $\lim_{m\to\infty}x_{k_m}^1=\xi$ и второй — когда $\lim_{m\to\infty}x_{k_m}^1=x\neq\xi$.

В первом случае возможно либо $|x^1_{k_m}-\xi|=o(|x^2_{k_m}-\xi|)$, либо $|x^2_{k_m}-\xi|=o(|x^1_{k_m}-\xi|)$. Чтобы не загромождать доказательство и не ограничивать его общности, рассмотрим только случай выполнения одного из этих соотношений. Итак, пусть $|x^1_{k_m}-\xi|=o(|x^2_{k_m}-\xi|)$ и $x_{k_m+1}<\xi$.

Из (3), разложив y^1_k и y^2_k по формуле Тейлора до вторых производных, имеем:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-\xi &= (x^1_k-\xi)(x^2_k-\xi) \\
&\times\frac{2f'(\xi)((\alpha_1-\alpha_2)|y^1_k|^s+(\beta_1-\beta_2)|y^2_k|^s+Q^1_k-Q^2_k)+f''(\eta^2_k)(x^2_k-\xi)P^1_k-f''(\eta^1_k)(x^1_k-\xi)P^2_k}{2f'(\xi)((x^2_k-\xi)P^1_k-(x^1_k-\xi)P^2_k)+f''(\eta^2_k)(x^2_k-\xi)P^1_k-f''(\eta^1_k)(x^1_k-\xi)P^2_k},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\eta^1_k\in(\xi, x^1_k)$ и $\eta^2_k\in(x^2_k, \xi)$. Дальше, для рассматриваемой подпоследовательности имеем $\lim_{m\to\infty}((x_{k_m+1}-\xi)/(x^1_k-\xi))=(\beta_1-\beta_2)/\beta_1\neq 0$.

Это соотношение противоречит допущению о сверхлинейной скорости сходимости процесса (3). Таким образом остается только второй случай, а именно: $\lim_{m\to\infty}x^1_{k_m}=x\neq\xi$. Здесь мы имеем

$$
\lim_{m\to\infty}|(x_{k_m+1}-\xi)/(x^2_{k_m}-\xi)|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\alpha_1-\alpha_2-f''(\eta^1_{k_m})(x^1_{k_m}-\xi)\alpha_2(2f'(\xi)|y^1_{k_m}|)^{-1}}{-\alpha_2-f''(\eta^1_{k_m})(x^1_{k_m}-\xi)\alpha_2(2f'(\xi)|y^1_{k_m}|)^{-1}}\right|\neq 0,
$$

если $f''(x)$ достаточно малая по абсолютной величине. Необходимое нам противоречие получено и этим пункт 1 доказан.

Доказательство пункта 2. Оно проводится по схеме предыдущего пункта. Мы рассмотрим только один, достаточно характерный случай, а именно: $x_{k_m+1}<\xi$ и $|x^2_{k_m}-\xi|=o(|x^1_{k_m}-\xi|)$.

Из (4) имеем

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}(|x_{k_m+1}-\xi|/|x^2_{k_m}-\xi|^{(1+\sqrt{5})/2}) \\
&\geq\lim_{m\to\infty}\frac{|x^1_{k_m}-\xi||x^2_{k_m}-\xi|(|f''(\eta^1_{k_m})||x^1_{k_m}-\xi|\alpha_2-2d_1|y^1_{k_m}|f'(\xi))}{|x^2_{k_m}-\xi|^{(1+\sqrt{5})/2}\alpha_2(2|x^1_{k_m}-\xi|f'(\xi)+2f'(\xi)|Q^2_k||x^1_{k_m}-\xi|+|f''(\eta^1_{k_m})||x^1_{k_m}-\xi|^2)}>\delta>0,
\end{aligned}
$$

если $2^{-1}\inf\{|f''(x)|\alpha_2:[x_1, x_2]\}>d_1\sup\{|f'(x)|f'(\xi):[x_1, x_2]\}$. Полученное неравенство противоречит допущению, что процесс (3) имеет скорость сходимости выше сверхлинейной с константой $(1+\sqrt{5})/2$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы 3. Тогда:*

1. *В силу пункта 1 теоремы 3 и, если начальные приближения x^1_1 и x^2_1 достаточно близки к корню ξ и $|Q^1_k-Q^2_k|\leq d(|y^1_k|^s+|y^2_k|^s)$; $0<d<\min\{(\alpha_i,\beta_i)|i\}$, процесс (3) сходится со скоростью геометрической прогрессии.*

2. *В силу пункта 2 теоремы 3 и если начальные приближения x^1_1 и x^2_1 достаточно близки к корню ξ,*

$$
|Q^1_k-Q^2_k|\leq d_2|y^1_k+y^2_k|(|y^1_k|^s+|y^2_k|^s);\quad \operatorname{sgn}(Q^1_k-Q^2_k)=\operatorname{sgn}(y^1_k+y^2_k)
$$

и $f'(\xi)d_2>\max\{\sup\{|f''(x)|\ (\alpha_i,\beta_i)\ [x_1^1, x_1^2]\}\ i=1,2\}$, *то процесс* (3) ***сходится*** *со сверхлинейной скоростью с константой* $(1+\sqrt{5})/2$.

Доказательство пункта 1. Заметим, что знак величины $x_{k+1}-\xi$ совпадает со знаком числителя в (4). В силу условий теоремы знак числителя определяется величиной $(\alpha_1-\alpha_2)|y_k^1|^s+(\beta_1-\beta_2)|y_k^2|^s$, лишь бы x_k^1 и x_k^2 были бы достаточно близки к корню ξ.

Рассмотрим несколько случаев. Сначала допустим, что $|x_k^1-\xi|\leqq q|x_k^2-\xi|$.

Теперь из (4) имеем

$$(x_{k+1}-\xi)/(x_k^1-\xi)$$

$$=\left\{\beta_1-\beta_2+\frac{(\alpha_1-\alpha_2)|y_k^1|^s}{|y_k^2|^s}+\frac{Q_k^1-Q_k^2}{|y_k^2|^s}+\frac{f''(\eta_k^2)(x_k^1-\xi)P_k^2}{2f'(\xi)|y_k^2|^s}\right.$$

$$\left.-\frac{f''(\eta_k^1)(x_k^1-\xi)P_k^2}{2f'(\xi)|y_k^2|^s}\right\}\Big/\left\{\beta_1-\frac{\beta_2(x_k^1-\xi)}{x_k^2-\xi}+\left(\alpha_1-\alpha_2\frac{(x_k^1-\xi)}{x_k^2-\xi}\right)\frac{|y_k^1|^s}{|y_k^2|^s}\right.$$

$$\left.+\frac{(Q_k^1-(x_k^1-\xi)Q_k^2/(x_k^2-\xi))}{|y_k^2|^s}+\frac{f''(\eta_k^2)(x_k^2-\xi)^2P_k^1}{2f'(\xi)|y_k^2|^s}-\frac{f''(\eta_k^1)(x_k^1-\xi)^2P_k^2}{2f'(\xi)|y_k^2|^s}\right\}.$$

Так как $s>0$, то для всех достаточно малых положительных q существует такое $\bar{q}$, $0<\bar{q}<1$, что будем иметь $|x_{k+1}-\xi|\leqq\bar{q}|x_k^1-\xi|$.

Аналогично, если $|x_k^2-\xi|<q|x_k^1-\xi|$, найдем такое $\bar{q}$, $0<\bar{q}<1$, что будет выполнено $|x_{k+1}-\xi|\leqq\bar{q}|x_k^2-\xi|$. Заметим, что если $\beta_1-\beta_2>0$, то начиная с некоторого номера k, для которого $|x_k^1-\xi|\leqq q|x_k^2-\xi|$, получим односторонний процесс. Аналогичный факт имеем, если $\alpha_1-\alpha_2<0$.

Теперь зафиксируем достаточно малое q и рассмотрим случай, когда одновременно выполняются неравенства $|x_k^1-\xi|>q|x_k^2-\xi|$ и $|x_k^2-\xi|>q|x_k^1-\xi|$. Так как $|Q_k^1-Q_k^2|\leqq d(|y_k^1|^s+|y_k^2|^s)$ и $d<\min\{(\alpha_i,\beta_i)\ i\}$, то нетрудно показать, что существуют такие константы a_1 и a_2, что $a_1\leqq P_k^1/P_k^2$ и $a_2\leqq P_k^2/P_k^1$. Из (3) имеем либо

$$x_{k+1}-\xi=(x_k^1-\xi)\frac{1-y_k^1P_k^2(x_k^2-\xi)/y_k^2P_k^1(x_k^1-\xi)}{1-j_k^1P_k^2/j_k^2P_k^1}\leqq\frac{(1-a_2')}{(1+q\alpha_2')},$$

либо

$$x_{k+1}-\xi=(x_k^2-\xi)\frac{1-y_k^2P_k^1(x_k^1-\xi)/y_k^1P_k^2(x_k^2-\xi)}{1-y_k^2P_k^1/y_k^1P_k^2}\leqq\frac{(1-a_1')}{(1+qa_1')},$$

где $a_i'=a_i\min\{|f'(x)|\ [x_1^1, x_1^2]\}/\max\{|f'(x)|\ [x_1^1, x_1^2]\}$.

Если положим $\bar{q}=\min(q,(1-a_1')/(1+qa_1'),\ (1-a_2')/(1+qa_2'))$, получим $|x_{k+1}-\xi|\leqq\bar{q}\min(|x_k^1-\xi|, |x_k^2-\xi|)$. Пункт 1 доказан.

Перейдем к доказательству пункта 2. Так же, как в доказательстве теоремы 2, показывается, что если $|x_k^1-\xi|$ и $|x_k^2-\xi|$ достаточно малые, существует константа A, для которой

$$|x_{k+1}-\xi|\leq A\,|x_k^1-\xi|\,|x_k^2-\xi|. \tag{5}$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы, если $x_{k+1}-\xi$ меняет знак на каждой итерации. При этом знак величины $x_{k+1}-\xi$ совпадает со знаком числителя в (4). Если знак числителя совпадает со знаком величины $y_k^1+y_k^2$, то ввиду (5) величина $x_{k+1}-\xi$ будет менять знак на каждой итерации, лишь бы x_k^1 и x_k^2 были бы достаточно близки к корню ξ. Итак, остается показать, что знак числителя в достаточно малой окрестности корня ξ определяется разностью $Q_k^1-Q_k^2$.

Ввиду (5) предположим, что $|x_k^1-\xi|\leq q\,|x_k^2-\xi|$, где $0<q<1$ и q — достаточно малое число. Имеем

$$|2^{-1}f''(\eta_k^2)(x_k^2-\xi)P_k^1-2^{-1}f''(\eta_k^1)(x_k^1-\xi)P_k^2|\leq 2^{-1}\sup\{|f''(x)|\,|x_k^2-\xi|\,(P_k^1$$

$$+qP_k^2)\mid x\in[x_1^1, x_1^2]\}\leq 2^{-1}\sup\{|f''(x)|\,|x_k^2-\xi|\,|y_k^2|^s(\beta^1+\varphi(q))\mid x\in[x_1^1, x_1^2]\},$$

где $\varphi(q)$ — непрерывная функция и $\varphi(0)=0$. Далее имеем

$$2^{-1}f''(\eta_k^2)(x_k^2-\xi)P_k^1-2^{-1}f''(\eta_k^1)(x_k^1-\xi)P_k^2$$

$$\leq 2^{-1}d_2f'^2(\xi)\,|x_\kappa^2-\xi|\,(\beta+\varphi(q))/\max\{(\alpha_i, \beta_i)\mid i=1, 2\}$$

$$\leq 2^{-1}d_2f'(\xi)(|y_k^2|^s+|y_k^1|^s)\,|y_k^1+y_k^2|+\varphi_1(q)\,|x_k^2-\xi|\,|y_k^2|^s$$

$$\leq f'(\xi)d_2\,|y_k^1+y_k^2|\,(|y_k^1|^s+|y_k^2|^s)\leq |Q_k^1-Q_k^2|.$$

Аналогично показывается, что знак числителя определяется разностью $Q_k^1-Q_k^2$ при предположении, что $|x_k^2-\xi|\leq q\,|x_k^1-\xi|$. Теорема доказана.

2. Решение систем уравнений с помощью поверхностей второй степени. Известно, [2; 3; 4], что решение систем уравнений довольно трудоемко и, кроме того, количество методов, прошедших экспериментальную проверку, небольшое, а, кроме того, список известных методов тоже невелик. Здесь мы предлагаем некоторые идеи для получения методов решения систем обыкновенных уравнений, использующих только значения функций, частным случаем которых является обобщение метода секущих [4].

Будем рассматривать систему уравнений

$$F(x)=0, \tag{6}$$

где $F=(F^1, \ldots, F^m)$ и $x=(x^1, \ldots, x^n)$.

Определение. *Линейные многообразия P и Q будем называть соответственно полюсным и полярным для поверхности второй степени*

$$S=\{(y, x):\ f(x, y)=y^2+(a, x)y+b^0y+(Ax, x)+(b, x)+c=0\},$$

если P есть пересечение всех касательных плоскостей к S в общих точках для Q и S.

Здесь мы положили $a=(a^1, \ldots, a^n)$, $b=(b^1, \ldots, b^n)$ b^0 и c — константы и A — симметрическая матрица размерности $(n\times n)$.

Рассмотрим задачу о нахождении S при условии, что известны полюсное многообразие P и полярное многообразие Q.

Обозначим через x вектор (y, x). Пусть многообразие P задано с помощью линейных уравнений

$$(7)\qquad (l_i, x)=d_i, \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

где $l_i=(l_i^0, l_i^1, \ldots, l_i^n)$, а $(l, \bar{x})$ есть скалярное произведение.

Пусть заданы точки x_j, $j=1, 2, \ldots, k$ и пусть Q есть линейное многообразие, натянутое на точки x_j, $j=1, 2, \ldots, k$.

Будем искать такую поверхность S, чтобы точки x_j, $j=1, 2, \ldots, k$ принадлежали S и, кроме того, касательные плоскости в этих точках к S содержали многообразие P. Для коэффициентов поверхности S получаем систему уравнений:

$$(8)\qquad \operatorname{grad} f(y_j, x_j)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^j l_i,\ (\operatorname{grad} f(y_j, x_j), \bar{x}_j)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^j d_i, f(x_j, y_j)=0, j=1, 2, \ldots, k.$$

Эта система имеет $(n+3)k$ уравнений и $((n+2)^2+n)/2+k^2$ неизвестных, а именно a, b^0, b, A, C и $\alpha_i^j (i, j=1, \ldots, k)$.

Большое количество неизвестных, вообще говоря, дает нам возможность накладывать дополнительные условия на матрицу A. Так, например, если $A=0$, то число неизвестных равно $2n+2+k^2$, что в точности дает число уравнений при $k=2$. Если же матрица A имеет $n-2$ элементов, подлежащих определению, то при $k=3$ количество уравнений и количество неизвестных совпадает.

Для любой функции $y=F^i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$ построим поверхность второй степени S^i, для которой заданные многообразия P^i и Q^i, $i=1, 2, \ldots, m$, суть полюсные и полярные. После этого мы положим $y=0$ для всех S^i, $i=1, 2, \ldots, m$ и получим систему

$$(9)\qquad (A_i x, x)+(b_i, x)+c_i=0, \quad i=1, 2, \ldots m.$$

Решая эту систему, находим следующее приближение для решения системы (6).

Заметим, что если известны точки x_j^i, $j=1, 2, \ldots, n+1$, $i=1, 2, \ldots, m$ и в качестве полярного многообразия возьмем точку $P^i=(n+1)^{-1}\Sigma_{j=1}^{n+1}\bar{x}_j^i$, где $y_j^i=F^i(x_j)$, то мы получим обобщение метода секущих для решения систем уравнений.

В дальнейшем остановимся на случае, когда $A=0$ и $k=2$.

Предположим, что после k-ой итерации известны точки $x_{k1}, \ldots, x_{k(n+1)}$. В качестве полярного многообразия Q^i возьмем прямую, проходящую через точки (y_{kn}^i, x_{kn}) и $(y_{k(n+1)}^i, x_{k(n+1)})$, где $y_{k_j}^i=F^i(x_{kj})$, $j=n, n+1$. В качестве полюсного многообразия возьмем

$$P^i=\{(y, x):\ y=(n+1)^{-1}\sum_{j=1}^{n+1} y_{k_j}^i,\ \Delta^i(y, x)=0\},$$

где

$$\Delta^i(y, x)-\Delta_n^i(y, x)=\Delta_{n+1}^i(y, x)=0,$$

$$\Lambda_j^i(y,x)=\begin{vmatrix} y-(n+1)^{-1}y_{kj}^i & x^1-x_{kj}^1 & \dots & x^n-x_{kj}^n \\ (n+1)^{-1}(y_{k1}^i-y_{kj}^i) & x_{k1}^1-x_{kj}^1 & \dots & x_{k1}^n-x_{kj}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)^{-1}(y_{ks}^i-y_{kj}^i) & x_{ks}^1-x_{kj}^1 & \dots & x_{ks}^n-x_{kj}^n \end{vmatrix}, j=n,\ n+1,\ s\neq j.$$

Если обозначим через $\bar{y}_k^i=(n+1)^{-1}\sum_{j=1}^{n+1}y_{kj}^i$, то уравнения касательных плоскостей к поверхности S^i в точках (y_{kn}^i, x_{kn}) и $(y_{k\,n+1)}^i, x_{k(n+1)})$ будут иметь вид

(10) $$\Lambda_j^i(y,x)-\lambda_i^j(y-\bar{y}_k^i)=0,$$

где $\lambda_i^j=\Lambda_j^i(y_{kj}^i, x_{kj}^i)/(y_{kj}^i-\bar{y}_k^i)$, $j=n,\ n+1$, $i=1, 2, \dots, m$. Обозначим через $l_{kj}^i(j=n,\ n+1)$ векторы, ортогональные к плоскостям (10). Теперь система (8) для функции F^i ввиду специального выбора P^i приобретает следующий вид:

(11) $$\operatorname{grad} f_i(y_{kj}^i, x_{kj})=\alpha_{kj}^i l_{kj}^i,\quad f_i(y_{kj}^i, x_{kj})=0,\quad j=n, n+1.$$

Эта система распадается на n систем из двух уравнений с двумя неизвестными, зависящими от двух параметров $\alpha_{kj}^i(j=n,\ n+1)$ и две системы из двух уравнений для определения этих параметров, b_{kj}^0 и C_{ki}. После решения системы (11) для каждой функции $F^i, i=1, 2, \dots, m$ определяем векторы b_{ki}^i и константы c_k^i.

Теперь, полагая $y=0$ в системе (9) для рассматриваемого случая, окончательно получаем систему $(b_{ki}, x)+C_{ki}=0$, $i=1, 2, \dots, m$, для определения следующего приближения $x_{k(n+1)}$ для решения системы (6). Потом полагаем $x_{(k+1)j}=x_{k(j+1)}$, $j=1, 2, \dots, n+1$ и переходим к вычислениям для полярных и полюсных многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. П. Иванов, Н. В. Кюркчиев. О двухточечных методах решения обыкновенных уравнений, использующих параболические кривые. *Доклады БАН* (в печати).
2. А. М. Островский. Решение уравнений и систем уравнений. Москва, 1963.
3. Д. Ж. Ортега, В. Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва, 1975.
4. Н. С. Бахвалов. Численные методы, т. I. Москва, 1975.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 17. 3. 1977; в переработанном виде 20. 8. 1977