Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИКИ ДЛИНЫ ЛАКУНЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Б. М. ЛЕВИТАН, Г. Ш. ГУСЕЙНОВ

В работе вычислен главный член асимптотики длины лакуны для периодической задачи Штурма — Лиувилля $-y''+q(x)y=\mu y$, $0\leq x\leq\pi$, при следующих условиях на функцию $q(x)$:

1. $q^{(j)}(x)\in C(0,\pi)$, $q^{(j)}(0)=q^{(j)}(\pi)$, $j=1,2,\ldots,n-1$;
2. $q^{(n)}(x)\in L(0,\pi)$, $n\geq 0$;
3. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|k\int\limits_0^\pi q^{(n)}(x)e^{2ikx}dx\right|=\infty$.

Наши выводы существенно используют форму остаточного члена в асимптотическом разложении решения этого уравнения, полученного в работе Марченко (1974).

1. Вспомогательные предложения. Рассмотрим уравнение

$$l(y)=-y''+q(x)y=\mu y, \tag{1.1}$$

$$q(x+\pi)=q(x),\ q^{(j)}(x)\in C(0,\pi),\ q^{(j)}(0)=q^{(j)}(\pi),\ j=1,2,\ldots,\ n-1,$$

$$q^{(n)}(x)\in L(0,\pi),\ n=0,1,\ldots$$

Обозначим через $\mu_0<\mu_2\leq\widetilde{\mu_2}<\mu_4\leq\widetilde{\mu_4}<\cdots$ собственные значения периодической задачи для уравнения (1.1) и через $\mu_1\leq\widetilde{\mu_1}<\mu_3\leq\widetilde{\mu_3}<\cdots$ собственные значения антипериодической задачи. Через $v_1<v_2<v_3<\cdots$ обозначим собственные значения (1.1) на интервале $(0,\pi)$ при граничных условиях

$$y(0)=y(\pi)=0, \tag{1.2}$$

Известно, что $\mu_1\leq v_1\leq\widetilde{\mu_1}<\mu_2\leq v_2\leq\widetilde{\mu_2}<\mu_3\leq\cdots$ Заменим в уравнении (1.1) $q(x)$ на $q(x+t)$. При этой замене числа μ_k и $\widetilde{\mu_k}$ не изменятся, однако $v_k=v_k(t)$ будут функциями от t. Очевидно, это периодические функции с периодом π.

Покажем, что если t пробегает сегмент $[0,\pi]$, то $v_k(t)$ заполняет весь сегмент $[\mu_k,\widetilde{\mu_k}]$. (Этот результат известен, напр. [4]).

Обозначим через $\varphi(x,\mu;t);\theta(x,\mu;t)$ решения уравнения

$$-y''+q(x+t)y=\mu y,\ 0\leq x\leq\pi, \tag{1.1$_1$}$$

при начальных условиях $\theta|_{x=0}=1$, $\theta'|_{x=0}=0$, $\varphi|_{x=0}=0$, $\varphi'|_{x=0}=1$. Здесь и в дальнейшем штрихом обозначена производная по x.

Положим $\theta(\mu,t)=\theta(\pi,\mu;t)$, $\theta'(\mu,t)=\theta'(\pi,\mu;t)$, $\varphi(\mu,t)=\varphi(\pi,\mu;t)$, $\varphi'(\mu,t)=\varphi'(\pi,\mu;t)$. Известно [1, 335], что функции $\theta(\mu,t)$, $\theta'(\mu,t)$ и $\varphi'(\mu,t)-\theta(\mu,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta}(\mu, t)=\{\mu-q(t)\}\{\varphi'(\mu; t)-\theta(\mu, t)\},\\
(1.3)\qquad &\dot{\varphi}(\mu, t)=\varphi'(\mu, t)-\theta(\mu, t),\\
&\overbrace{(\varphi'(\mu, t)-\theta(\mu, t))}^{\bullet}=-2\theta'(\mu, t)-2\{\mu-q(t)\}\varphi(\mu, t).
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем точкой обозначена производная по t.

Лемма 1. *Если $v_{k_0}(t)$ не зависит от t, то $\mu_{k_0}=\tilde{\mu}_{k_0}$.*

Доказательство. При выполнении условия леммы $\varphi|_{\mu=v_{k_0}}=\dot{\varphi}|_{\mu=v_{k_0}}=0$. Поэтому из 2-го и 3-го уравнения системы (1.3) следует

$$\varphi'|_{\mu=v_{k_0}}=\theta|_{\mu=v_{k_0}},\ \theta'|_{\mu=v_{k_0}}=0. \tag{1.4}$$

Из постоянства Вронскиана следует

$$\theta(\mu, t)\varphi'(\mu, t)-\theta'(\mu, t)\varphi(\mu, t)=1. \tag{1.5}$$

Полагая здесь $\mu=v_{k_0}$, получим $\theta\varphi'|_{\mu=v_{k_0}}=1$. Отсюда и из (1.4) следует $\theta|_{\mu=v_{k_0}}=\varphi'|_{\mu=v_{k_0}}=\pm1$. Таким образом, при $\mu=v_{k_0}$ имеем $\varphi(\mu, t)=\theta'(\mu, t)=0$; $\varphi'(\mu, t)=\theta(\mu, t)=\pm1$, а это есть признак того, что v_{k_0} есть кратное собственное значение и, следовательно, $\mu_{k_0}=\tilde{\mu}_{k_0}=v_{k_0}$ [3, 352].

Лемма 1.2. *Если $\dot{v}_{k_0}(t_0)=0$, то либо $v_{k_0}(t_0)=\mu_{k_0}$, либо $v_{k_0}(t_0)=\tilde{\mu}_{k_0}$.*

Доказательство. Для $\varphi(\mu, t)$ справедливо разложение $\varphi(\mu, t)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}(v_k(t)-\mu)/k^2$ (напр. [5]). Поэтому

$$\dot{\varphi}(\mu, t)=\pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\dot{v}_j(t)}{j^2}\prod_{k\neq j}\frac{v_k(t)-\mu}{k^2}.$$

Полагая в этом равенстве $\mu=v_{k_0}(t_0)$, $t=t_0$, получим $\dot{\varphi}[v_{k_0}(t_0), t_0]=0$. Поэтому из второго уравнения системы (1.3) следует $\varphi'[v_{k_0}(t_0); t_0]=\theta(v_{k_0}(t_0); t_0)$, а из этого уравнения и постоянства Вронскиана, как и выше, получаем $\varphi'[v_{k_0}(t_0); t_0]=\theta[v_{k_0}(t_0); t_0]=\pm1$, что является признаком совпадения $v_{k_0}(t_0)$ с одной из крайних точек лакуны $[\mu_{k_0}, \tilde{\mu}_{k_0}]$. (В самом деле, уравнение (1.5) можно записать в виде $-\theta'\varphi=1-((\varphi'+\theta)/2)^2+((\varphi'-\theta)/2)^2$, если $\varphi'=\theta$ и $\varphi=0$, то $(\varphi'+\theta)/2=\pm1$.)

Следствие 1. *Для каждого фиксированного k, $v_k(t)$ либо постоянно, и тогда $\mu_k=\tilde{\mu}_k$, либо непостоянно, и тогда заполняет весь сегмент $[\mu_k, \tilde{\mu}_k]$.*

Первое утверждение совпадает с леммой 1.1. Докажем второе утверждение. Пусть $v_k(t)$ непостоянно. В силу леммы 1.2, если $v_k(t)$ лежит внутри лакуны, то $v'_k(t)\neq0$ и поэтому $v_k(t)$ либо возрастает, либо убывает, пока не достигнет конца лакуны.

Следствие 2.

$$\tilde{\mu}_k-\mu_k=\max v_k(t)-\min v_k(t),\ 0\leq t\leq\pi. \tag{1.6}$$

2. Асимптотика длины лакуны. 2.1. В этом пункте 2.1 мы будем предполагать, что $q(x)$ гладкая, но необязательно гладкая периодическая функция. Итак, пусть $q^{(j)}(x)\in C(0,\pi)$, $j=0, 1, 2, \ldots n-1$; $q^{(n)}(x)\in L(0,\pi)$, но необязательно $q^{(j)}(0)=q^{(j)}(\pi)$.

Хорошо известно, что уравнение

$$-y''+q(x)y=\lambda^2 y \tag{2.1}$$

при больших вещественных λ имеет фундаментальную систему решений $y(x, \lambda)$, $y(x, -\lambda)=\overline{y(x, \lambda)}$, $y(0, \lambda)=1$ вида

$$y(x, \lambda)=e^{ix\lambda}\left(1+\frac{u_1(x)}{(2i\lambda)}+\frac{u_2(x)}{(2i\lambda)^2}+\cdots+\frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n}+\frac{\varepsilon_n(x, \lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right), \tag{2.2}$$

где

$$u_1(x)=\int_0^x q(z)dz,\ u_m(x)=\int_0^x L(u_{m-1}(z))dz,\ m=2, 3, \ldots n. \tag{2.3}$$

В [1] показано, что

$$\varepsilon_n(x, \lambda)=u_{n+1}(x)-\theta_n(x, \lambda)+(2i\lambda)^{-1}\varepsilon_n^{(1)}(x, \lambda), \tag{2.4}$$

где

$$\theta_n(x, \lambda)=(-1)^n e^{-2i\lambda x}\int_0^x q^{(n)}(z)e^{2i\lambda z}dz \tag{2.5}$$

и функция $\varepsilon_n^{(1)}(x, \lambda)$ равномерно ограничена в области $0\leq x\leq\pi$, $1\leq\lambda<\infty$ (причем $\max|\varepsilon^{(1)}(x, \lambda)|$ оценивается через $\int_0^\pi |q^{(n)}(x)|\,dx$ [1, 339]).

Положим

$$\sigma(x, \lambda)=\frac{d}{dx}\ln\left[1+\frac{u_1(x)}{(2i\lambda)}+\cdots+\frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n}+\frac{\varepsilon_n(x, \lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right]. \tag{2.6}$$

Тогда

$$y(x, \lambda)=\exp\left(i\lambda x+\int_0^x \sigma(\lambda, z)dz\right). \tag{2.7}$$

Из (2.2) и (2.6) следует

$$\sigma(x, \lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k}+\frac{\delta_n(x, \lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}},$$

причем $\delta_n(x, \lambda)=2i\lambda\theta_n(x, \lambda)+\delta_n^{(1)}(x, \lambda)$ и функция $\delta_n^{(1)}(x, \lambda)$ ограничена в полосе $0\leq x\leq\pi$, $1\leq\lambda<\infty$ [1, 340].

Для функции $\sigma(x, \lambda)$ нетрудно вывести дифференциальное уравнение $\sigma'+2i\lambda\sigma+\sigma^2-q(x)=0$, из которого можно получить рекурентные формулы для коэффициентов

$$\sigma_1(x)=q(x),\ \sigma_m(x)=-\sigma'_{m-1}(x)-\sum_{j=1}^{m-1}\sigma_{m-j-1}(x)\sigma_j(x). \tag{2.8}$$

Так как $y(0;\lambda)=1$, (2.3), то v_k определяются из уравнения $y(\pi, \lambda)-\overline{y(\pi, \lambda)}=0$, или, используя (2.7),

$$\exp\left(i\lambda\pi+\int_0^\pi \sigma(z, \lambda)dz\right)-\exp\left(-i\lambda\pi+\int_0^\pi \overline{\sigma(z, \lambda)}dz\right)=0. \tag{2.9}$$

Далее

$$\int_0^\pi \sigma(z,\lambda)dz=\sum_{k=1}^{n}(2i\lambda)^{-k}\int_0^\pi \sigma_k(z)\,dz+(2i\lambda)^{-(n+1)}\int_0^\pi \delta_n(z,\lambda)dz \tag{2.10}$$
$$=-i\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^j\frac{a_{2j+1}}{(2\lambda)^{2j+1}}+\sum_{j=1}^{[n/2]}(-1)^j\frac{a_{2j}}{(2\lambda)^{2j}}+\frac{\delta_n(\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}},$$

где $a_m=\int_0^\pi \sigma_m(z)dz,\ \ \delta_n(\lambda)=\int_0^\pi \delta_n(z,\lambda)dz.$ Из $\delta_n(\lambda)$ можно выделить главный член С этот целью проинтегрируем тождество (2.6). Получим

$$\int_0^\pi \sigma(z,\lambda)dz=\ln\left[1+\frac{u_1(\pi)}{2i\lambda}+\frac{u_2(\pi)}{(2i\lambda)^2}+\cdots+\frac{u_n(\pi)}{(2i\lambda)^n}+\frac{\varepsilon_n(\pi,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right].$$

Сравнивая это с разложением (2.10), находим, что

$$\delta_n(\lambda)=a_{n+1}-u_{n+1}(\pi)+\varepsilon_n(\pi,\lambda)+O(\lambda^{-1})=a_{n+1}-\theta_n(\pi,\lambda)+O(\lambda^{-1}). \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим

$$\int_0^\pi \sigma(z,\lambda)\,dz=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{(2i\lambda)^k}-\frac{\theta_n(\pi,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}+O(\lambda^{-n-2})=-i\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\frac{a_{2j+1}}{(2\lambda)^{2j+1}}$$
$$+\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]}(-1)^j\frac{a_{2j}}{(2\lambda)^{2j}}-i\,\mathrm{Im}\,\frac{\theta_n(\pi,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}-\mathrm{Re}\,\frac{\theta_n(\pi,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}+O(\lambda^{-n-2}).$$

Подставляя это разложение в уравнение (2.9), получим уравнение для определения чисел $\beta_k=\sqrt{v_k}$:

$$\sin\left[\pi\beta_k-\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\frac{a_{2j+1}}{(2\beta_k)^{2j+1}}-\mathrm{Im}\,\frac{\theta_n(\pi,\beta_k)}{(2i\beta_k)^{n+1}}\right]=O\left(\frac{1}{\beta_k^{n+2}}\right). \tag{2.12}$$

Так как $\beta_k=k+O(1/k)$, то в (2.12) $\theta_n(\pi,\beta_k)$ можно заменить на

$$\widetilde{\theta}_n(k)=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(z)e^{2ikz}dz. \tag{2.13}$$

Сделав в (2.12) эту замену, получим уравнение, из которого можно извлечь следующее асимптотическое разложение для чисел β_k:

$$\beta_k=k+\frac{c_1}{k}+\frac{c_3}{k^3}+\cdots+\frac{c_{2p+1}}{k^{2p+1}}+\frac{c_{n+1}(k)}{k^{n+1}}+O\left(\frac{1}{k^{n+2}}\right), \tag{2.14}$$

где $p=[(n-1)/2]$, $c_1, c_3, \ldots, c_{2p+1}$ — постоянные числа,

$$c_{n+1}(k)=\begin{cases}(-1)^m2^{-n-1}\pi^{-1}[a_{n+1}-\mathrm{Re}\,\widetilde{\theta}_n(k)], & \text{если } n=2m \text{ — четное число},\\ (-1)^{m+1}2^{-n-1}\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\widetilde{\theta}_n(k), & \text{если } n=2m+1 \text{ — нечетное число}.\end{cases}$$

Из (2.13) следует

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{\theta}_n(k)=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(z)\cos 2kz\,dz, \tag{2.15}$$

(2.15′) $$\operatorname{Im}\theta_n(k)=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(z)\sin 2kz\,dz.$$

Поэтому

$$c_{n+1}(k)=\begin{cases}(-1)^m 2^{-n-1}\pi^{-1}\left[a_{n+1}-\int_0^\pi q^{(n)}(z)\cos 2kz dz\right], & \text{если } n=2m \text{ — четное число,}\\ (-1)^m 2^{-n-1}\pi^{-1}\int_0^\pi q^{(n)}(z)\sin 2kz dz, & \text{если } n=2m+1 \text{ — нечетное число.}\end{cases}$$

2.2. Предположим теперь, что $q^{(j)}(0)=q^{(j)}(\pi)$, $j=1, 2, \ldots n-1$. Рассмотрим уравнение (1.1_1) с $\mu=\lambda^2$. Из формул (2.8) и периодичности $q(x)$ следует, что числа a_m, $m=1, 2, \ldots, n+1$ от t не зависят. Поэтому числа c_1, $c_3, \ldots, c_{2p+1}$ в асимптотической формуле (2.14) также от t не зависят. Зависимость от t окажается в $c_{n+1}(k)$. (Заметим, что оценка остаточного члена в формуле (2.14) равномерна по t.) Из постоянства чисел c_{2j+1} и следствия 1 в конце первого пункта следует теорема В. А. Марченко [1].

Теорема 2.1. *Пусть* $q^{(j)}(x)\in C(0,\pi)$, $q^{(j)}(0)=q^{(j)}(\pi)$, $j=1, 2, \ldots, n$, $q^{(n)}(x)\in L(0,\pi)$. *Тогда собственные значения периодической и антипериодической задач* μ_k и $\widetilde{\mu}_k$, $k=1, 2, \ldots,$ *для уравнения* (2.1) *подчиняются асимптотике:*

(2.16)
$$\gamma_k=\sqrt{\mu_k}=k+\frac{c_1}{k}+\cdots+\frac{c_{2p+1}}{k^{2p+1}}+O\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right),$$
$$\widetilde{\gamma}_k=\sqrt{\widetilde{\mu}_k}=k+\frac{c_1}{k}+\cdots+\frac{c_{2p+1}}{k^{2p+1}}+O\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right),$$

где $p=[(n-1)/2]$.

Из асимптотической формулы (2.16) следует оценка сверху для длины лакуны:

(2.17) $$\widetilde{\mu}_k-\mu_k=O(1/k^n).$$

Другим простым следствием асимптотических формул (2.16) является оценка сверху величины $a_k\stackrel{\text{def}}{=}\max\{|f(\lambda)-(-1)^k|:\mu_k\le\lambda\le\widetilde{\mu}_k\}$, где $f(\lambda)=\{\varphi'(\pi,\lambda)+\theta(\pi,\lambda)\}/2$. Как известно, μ_k и $\widetilde{\mu}_k$ — суть корни уравнения $f(\lambda)=(-1)^k$. Положим $\lambda=\mu^2$, $\widetilde{f}(\mu)=f(\lambda)$, $\gamma_k=\sqrt{\mu_k}$, $\widetilde{\gamma}_k=\sqrt{\widetilde{\mu}_k}$. Тогда $a_k=\max\{|\widetilde{f}(\mu)-(-1)^k|:\gamma_k\le\mu\le\widetilde{\gamma}_k\}$.

Пусть $\widetilde{f}'(\xi_k)=0$, $\gamma_k\le\xi_k\le\widetilde{\gamma}_k$. Тогда $a_k=|\widetilde{f}(\xi_k)-(-1)^k|$. Разлагая $\widetilde{f}(\gamma_k)=(-1)^k$ в точке $\mu=\xi_k$ по формуле Тейлора, мы получим

$$\widetilde{f}(\gamma_k)=(-1)^k+(\gamma_k-\xi_k)\widetilde{f}'(\xi_k)+(\gamma_k-\xi_k)^2\widetilde{f}''(\theta_k)/2=(-1)^k+O((\gamma_k-\xi_k)^2).$$

Поэтому из асимптотических формул (2.16) следует

(2.18) $$a_k=O(k^{-2n-2})=O(\mu_k^{-n-1}).$$

2.3. Если учесть следствие 2, то оценку (2.17) можно заменить точной асимптотической формулой. С этой целью при фиксированном k вычислим $\max\{c_{n+1}(k, t): 0 \leqq t \leqq \pi\}$ и $\min\{c_{n+1}(k, t): 0 \leqq t \leqq \pi\}$. Мы имеем

$$c_{n+1}(k, t) = \begin{cases} (-1)^m 2^{-n-1}\pi^{-1}\left[a_{n+1} - \int\limits_0^\pi q^{(n)}(z+t)\cos 2kz\,dz\right], & n=2m, \\ (-1)^m 2^{-n-1}\pi^{-1}\int\limits_0^\pi q^{(n)}(z+t)\sin 2kz\,dz, & n=2m+1. \end{cases}$$

Заменяя $z+t$ на z, получим

$$c_{n+1}(k, t) = \begin{cases} (-1)^m 2^{-n-1}\pi^{-1}\Big\{a_{n+1} - \Big[\cos 2kt\int\limits_0^\pi q^{(n)}(z)\cos 2kz\,dz \\ \qquad + \sin 2kt\int\limits_0^\pi q^{(n)}(z)\sin 2kz\,dz\Big\}\Big], & n=2m. \\ (-1)^m 2^{-n-1}\pi^{-1}\Big[\cos 2kt\int\limits_0^\pi q^{(n)}(z)\sin 2kz\,dz \\ \qquad - \sin 2kt\int\limits_0^\pi q^{(n)}(z)\cos 2kz\,dz\Big], & n=2m+1. \end{cases}$$

Таким образом, вопрос свелся к вычислению max и min выражения $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ при $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$. Известно, что max этого выражения равен $\sqrt{a^2+b^2}$ а min равен $-\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому для длины лакуны (при выполенении условий теоремы 2.1) мы получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\tilde{\mu}_k - \mu_k = \left|\int\limits_0^\pi q^{(n)}(z)e^{2ikz}dz\right| / 2^{n-1}\pi k^n + O\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right). \tag{2.19}$$

Формула (2.19) может быть также выведена из теоремы работы [2], однако начиная с $n=3$. Частный случай формулы (2.19), соответствующий $n=0$, имется в книге Титчмарша [3].

2.4. Для приложений представляет интерес следующий случай: $q(x) \in C^{(n-2)}(0, \pi)$, $q^j(0) = q^j(\pi)$, $j=0, 1, \ldots, n-2$, $q^{n-1}(x)$ — кусочно гладкая функция, $n=1, 2, \ldots$ В этих предположениях асимптотическую формулу для длины лакуны можно вывести из формулы (2.19) с помощью следующего предельного перехода.

Обозначим через $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leqq \pi$ точки разрыва функции $q^{(n-1)}(x)$ и через $d_1, d_2, \ldots, d_N$ — соответствующие скачки. Далее, аппроксимируем $q^{(n-1)}(x)$ в метрике $L(0, \pi)$ гладкими периодическими функциями

$$q_\varepsilon^{(n-1)}(x)\ (\lim_{\varepsilon\to 0} q_\varepsilon^{(n-1)}(x) = q^{(n-1)}(x))$$

(можно взять $q_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\int\limits_0^\varepsilon q(x+s)ds$, $\varepsilon > 0$). Выписывая для $q_\varepsilon(x)$ формулу (2.19) и переходя к пределу ($\varepsilon \to 0$), получим

$$\tilde{\mu}_k - \mu_k = \left|\sum_{j=1}^N d_j e^{2ikx_j}\right| / 2^{n-1}\pi k^n + O\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right). \tag{2.20}$$

Заметим, что при сделанных предположениях $\int_0^\pi |q_\varepsilon^{(n)}(z)| dz < c$, где c от ε не зависит. Напомним, что оценка остаточного члена в формуле (2.19) зависит от $\int_0^\pi |q^{(n)}(z)| dz$.

2.5. Асимптотические формулы (2.16) и (2.18) не только необходимы (напомним, что формула (2.18) есть следствие формул (2.16)), но и достаточны для гладкости периодического потенциала $q(x)$. Ниже дается эскиз доказательства этого утверждения.

Если имеют асимптотические формулы (2.16), то для $\sqrt{v_k}$ справедлива аналогичная асимптотическая формула. Напомним теперь следующие формулы:

$$\alpha_n^2 \overset{\text{def}}{=} \int_0^\pi \varphi^2(x, v_k)dx = \varphi'(\pi, v_k)\varphi'_\lambda(\pi, v_k), \quad \varphi(\pi, \lambda) = \pi \prod_{j=1}^\infty \frac{\lambda - v_j}{j^2}. \tag{2.21}$$

Из асимптотической формулы вида (2.16) для $\sqrt{v_k}$ можно вывести для $\varphi'_\lambda(\pi, v_k)$ асимптотическую формулу

$$\varphi'_\lambda(\pi, v_k) = (-1)^k \frac{\pi}{2k^2}\left(1 + \frac{a_1}{k^2} + \frac{a_2}{k^4} + \cdots + \frac{a_p}{k^{2p}} + \frac{\tau_k}{k^{2p}}\right), \tag{2.22}$$

причем $p = [(n+1)/2]$, $\Sigma_k \tau_k^2 < \infty$ [6].

Для $\varphi'(\pi, v_k)$ мы выведем сейчас асимптотическую оценку. Полагая $\lambda = v_k$ в равенстве $\theta(\pi, \lambda)\varphi'(\pi, \lambda) - \theta'(\pi, \lambda)\varphi(\pi, \lambda) = 1$, получим

$$\theta(\pi, v_k)\varphi'(\pi, v_k) = 1. \tag{2.23}$$

Далее имеем, используя асимптотическую формулу (2.18),

$$\varphi'(\pi, v_k) + \theta(\pi, v_k) = 2f(v_k) = 2(-1)^k + O(1/k^{2n+2}). \tag{2.24}$$

Из (2.23), (2.24) и (2.21) следует

$$\varphi'(\pi, v_k) = (-1)^k + O(1/k^{2n+2}). \tag{2.25}$$

Из (2.11), (2.22) и (2.25) получаем

$$\alpha_k^2 = \frac{\pi}{2k^2}\left(1 + \frac{a_1}{k^2} + \frac{a_2}{k^4} + \cdots + \frac{a_p}{k^{2p}} + \frac{\tau'}{k^{2p}}\right).$$

Из асимптотик для $\sqrt{v_k}$ и α_k^2 следует, что $q(x) \in C^{(n-1)}(0, \pi)$ (см. [6, гл. II]). Чтобы доказать равенства

$$q^{(j)}(0) = q^{(j)}(\pi), \; j = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.26}$$

заменим $q(x)$ на $q(x+t)$. Для $\sqrt{v_k(t)}$, а, следовательно, и для $\alpha_k^2(t)$, останутся в силе те же асимптотики. Поэтому для $\forall t \in (0, \pi)$, $q(x+t) \in C^{n-1}(0, \pi)$, откуда следует (2.26).

Другое доказательство равенств (2.26), после того как включение $q(x) \in C^{n-1}(0, \pi)$ уже доказано, можно получить, рассуждая от противного (используя асимптотическую формулу (2.20)).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко. Периодическая задача Кортевега — де Фриса. *Мат. сб.*, **95**, 1974, № 3, 331—356.
2. В. Ф. Лазуткин, Т. Ф. Панкратова. Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом. *Доклады АН СССР*, **215**, № 5, 1048—1051.
3. Э. Ч. Титчмарш. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. II. Москва, 1961.
4. А. Р. Итс, В. Б. Матвеев. Операторы Шредингера с конечнозначным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега — Де Фриса. *Теорет. и мат. физика*, **23**, 1975, № 1, 51—68.
5. Б. М. Левитан. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма—Лиувилля. *Успехи мат. наук.*, **19**, 1964, № 1, 161—165.
6. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. *Успехи мат. наук.*, **19**, 1964, № 2, 3—63.

Московский государственный университет
Механо-математический факультет
117 234 Москва

Поступила 8. I. 1976