Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОЛЕЦ

Л. А. БОКУТЬ

Этот обзор написан на основе доклада, сделанного автором на Первом болгарском колоквиуме по алгебре в Гьолечице (1—7 сентября 1975 год.). Кроме известных результатов, в обзоре отражены некоторые новые результаты, полученные в отделе теории колец Института математики в Новосибирске.

1. Алгоритмические проблемы теории колец. Впервые алгоритмические проблемы колец были рассмотрены в работе А. И. Жукова [1] В этой работе было доказано, что основная алгоритмическая проблема — проблема равенства (или, что то же самое, проблема тождества) — алгоритмически разрешима в классе всех (необязательно ассоциативных) алгебр над произвольным полем. Напомним, что если $\mathfrak{M}$ — произвольное конечное базирумое многообразие алгебр (колец), то разрешимость проблемы равенства в $\mathfrak{M}$ означает, что существует алгоритм, который для любой конечно определенной (к. о.) алгебры

$$A=\langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ f_1=0,\ f_2=0, \ldots, f_m=0\rangle$$

из класса $\mathfrak{M}$ и любого элемента $f\in A$ дает ответ на вопрос, равен ли f нулю в A или нет.

Следующий шаг был сделан в двух работах А. И. Ширшова [2; 3]. В первой из них был предложен алгоритм, решающий проблему равенства в классе всех коммутативных (антикоммутативных) алгебр над полем. Отметим, что там же доказано, что указанный алгоритм применим и к классу всех алгебр. Во второй из указанных работ А. И. Ширшова доказано, что проблема равенства разрешима для произвольной алгебры Ли с одним соотношением и установлена теорема о свободе (аналог теоремы Магнуса о свободе) для алгебр Ли с одним соотношением. При этом в работе А. И. Ширшова [3] был разработан метод исследования алгебр Ли, заданных определяющими соотношениями, связанный с введенным им понятием композиции элементов свободной алгебры Ли.

Предыдущие результаты относились к случаю, когда проблема равенства алгоритмически разрешима. В 1972 г. Л. Бокутем [4] была решена проблема Ширшова о проблеме равенства в классе алгебр Ли. Было доказано, что проблема равенства в классе алгебр Ли над произвольным полем алгоритмически неразрешима. Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Пусть M — некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел. Тогда рекурсивно определенная алгебра Ли

$$L_M=\langle a, b, c;\ ab^nc=0,\ n\in M\rangle$$

(скобки — правонормированные) имеет неразрешимую проблему равенства, так как нетрудно доказать, что $ab^mc=0$ в L_M тогда и только тогда, когда

$m \in M$. Задача состоит теперь в том, чтобы вложить L_M в конечно определенную алгебру Ли L_0 (алгебра L_0 и будет искомой). Указанное вложение осуществляется с использованием теоремы Матиясевича (1970) о диофантовости произвольного рекурсивно перечислимого множества и понятия Хигмановой подалгебры к. о. алгебры Ли. Было бы интересно решить следующую проблему.

(1) Любая ли рекурсивно определенная (р. о.) алгебра Ли вложима в к. о. алгебру Ли?

Напомним в связи с этим известную теорему Хигмана (1961) о том, что любая р. о. группа вложима в к. о. группу.

В настоящее время одной из самых актуальных алгоритмических проблем теории колец является следующая известная проблема.

(2) Разрешима ли проблема равенства для ассоциативных алгебр с 1 соотношением?

Этой проблемой занимались Ж. и Т. Левини [5], Дикс [6] и др. Приведем здесь следующий результат В. Н. Герасимова [7].

Теорема. *Проблема равенства разрешима в ассоциативной алгебре* $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n;\ f = 0 \rangle$, *такой, что старшая однородная часть* $\bar{f}$ *многочлена* f *не имеет собственных двусторонних делителей*: $\bar{f} = ug_1 = g_2u \to u \sim 1$ *или* $u \sim \bar{f}$.

В этой теореме старшую часть $\bar{f}$ можно понимать в смысле любой степенной функции $d(a)$ на свободной ассоциативной алгебре ($d(a_i) > 0$, $1 \leq i \leq n$). Доказательство В. Н. Герасимова (пока не опубликованное) является технически сложным и связано с изучением дистрибутивных решеток подпространств алгебры многочленов от счетного числа переменных.

Большой интерес вызывают также следующие проблемы:

(3) Верна ли теорема Магнуса о свободе для ассоциативных алгебр с одним соотношением?

(4) (А. И. Ширшов) Разрешима ли проблема равенства в классе разрешимых ступени n алгебр Ли, $n \geqq 3$?

Напомним, что В. Н. Ремесленников (1974) доказал, что для разрешимых групп ступени $n \geqq 7$ проблема равенства алгоритмически неразрешима.

2. Полугрупповые алгебры. Впервые полугрупповые алгебры возникли в известной работе А. И. Мальцева [8], опубликованной в 1937 г. В этой работе в связи с проблемой Ван-дер-Вардена была построена полугрупповая алгебра FS, F — поле, S — полугруппа, такая, что

1) FS — без делителей нуля,

2) Полугруппа S не вложима в группу, т. е. кольцо FS не вложимо в тело.

Тогда же А. И. Мальцевым было сформулирована проблема о существовании ассоциативного кольца R без делителей нуля, не вложимого в тело, мультипликативная полугруппа R^* которого вложима в группу.

В связи с предыдущими примерами А. И. Мальцева и проблемой Мальцева была построена [9] полугрупповая алгебра FS со свойствами:

1) FS — без делителей нуля,

2) Полугруппа S вложима в группу,

3) Кольцо FS не вложимо в тело.

Позднее [10; 11] было доказано, что если $F = GF(2)$, то указанная выше полугрупповая алгебра FS обладает более сильным свойством:

4) Полугруппа $(FS)^*$ вложима в группу.

Таким образом проблема Мальцева была решена в классе полугрупповых алгебр. Однвременно с Бокутем проблема Мальцева была решена в работах [12; 13], но кольца, построенные в последних работах, не были полугрупповыми (это существенно для доказательства). Отметим, что в классе групповых алгебр остается нерешенной следующая известная проблема, аналогичная проблеме Ван-дер-Вардена:

(5) Существует ли групповая алгебра FG без делителей нуля, не вложимая в тело?

Предыдущие результаты еще не давали надежды на то, что теория полугрупповых алгебр может быть построена. Однако в последние годы такая надежда появилась благодаря работам ряда авторов в Москве, Новосибирске и др. Приведем неопубликованные пока результаты Е. И. Зельманова:

Теорема 1. *Пусть A — полугруппа с сокращением, F — поле. Полугрупповая алгебра FA удовлетворяет нетривиальному тождеству тогда и только тогда, когда A — двусторонний порядок в группе G и групповая алгебра FG удовлетворяет тому же тождеству.*

Напомним, что описание групп G, таких, что FG — PI-алгебра, было получено Пасманом в 1972 г.

Теорема 2. *Пусть F — поле, S — полугруппа и FS — первичная алгебра. Тогда FS является PI-алгеброй тогда и только тогда, когда $S \supseteq S_0 \supseteq I$, где S_0 — полугруппа матричного типа, I — идеал полугруппы S.*

Безусловный интерес представляет собой следующая проблема:

(6) В каком случае полугрупповая алгебра является PI-алгеброй?

Отметим результат О. К. Доманова [36], который использован, в частности, Е. И. Зельмановым при доказательстве теоремы 2.

Пусть S — о-простая полугруппа. Если FS — PI-алгебра, то S — вполне о-простая полугруппа.

Теорема 3. *Пусть S — полугруппа с 1, R — ассоциативное кольцо. Тогда RS — артиново кольцо тогда и только тогда, когда R — артиново кольцо и S — конечная полугруппа.*

Для групповых колец этот результат был доказан Коннелом (1963) (результат Коннела использован при доказательстве теоремы 3).

3. Многообразия колец. На развитие теории многообразия алгебраических систем большое влияние оказал А. И. Мальцев. Напомним, в частности, его последний обзорный доклад на Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в Риге (1967), посвященный теории многообразия. Результаты по многообразию колец, о которых будет идти речь ниже, так или иначе связаны с именем А. И. Мальцева.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие колец (алгебр), $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ — его группоид (в смысле А. И. Мальцева) подмногообразий.

(7) (Аналог проблемы А. И. Мальцева для групп [14]). Описать многообразия колец (алгебр), $\mathfrak{M}$, такие, что группоид $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ коммутативен.

В настоящее время эта проблема решена Ю. Н. Мальцевым [15] и А. А. Урманом [35] в классе всех алгебр над полем характеристики нуль.

(8) Описать все многообразия колец (алгебр) $\mathfrak{M}$, такие, что $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ — полугруппа.

В 1943 г. А. И. Мальцев [16] доказал следующие связанные между собой свойства многообразия $\mathfrak{M}_0$ коммутативных алгебр: многообразие $\mathfrak{M}_0$ является локально финитно аппроксимируемым (т. е. любая конечно порожденная (к. п.) алгебра из $\mathfrak{M}_0$ аппроксимируется конечномерными алгебрами) и локально матричным (т. е. любая к. п. алгебра из $\mathfrak{M}_0$ вложима в матричную алгебру над некоторым расширением основного поля). Недавно А. З. Ананьин (1975 г.) описал все локально финитно аппроксимируемые и локально матричные многообразия ассоциативных алгебр. Приведем результаты А. З. Ананьина.

Теорема 1. *Пусть F — бесконечное поле. Тогда $\mathfrak{M}$ — локально финитно аппроксимируемое многообразие ассоциативных алгебр тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ — локально слабо нетерово многообразие.*

Ассоциативная алгебра R называется слабо нетеровой, если удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов. Многообразие $\mathfrak{M}$ удовлетворяющее этому свойству локально, называется локально слабо нетеровым. И. В. Львов [17] доказал, что $\mathfrak{M}$ — локально слабо нетерово многообразие ассоциативных алгебр тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество вида:

$$xy^n x = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i+k>0}} \alpha_{ijk} y^i x y^j x y^k.$$

Теорема 2. *Пусть F — бесконечное поле,* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Многообразие ассоциативных алгебр $\mathfrak{M}$ является локально матричным тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ выполняются тождества.*

$$[x, y, y, \ldots, y] z^n [t, u, u, \ldots, u] = 0$$

т. е. $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}_2 E_k$, где $\mathfrak{N}_2 = \operatorname{var}(xy = 0)$, $E_k = \operatorname{var}([x, y, \ldots, y] = 0)$.

При доказательстве теоремы 2 используется результат А. Т. Маркова (Москва, МГУ, 1975 г.) о том, что энгелево многообразие E_k является локально матричным.

А. З. Ананьин и А. Р. Кемер [18] доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть F — поле характеристики нуль. Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр над F имеет дистрибутивную решетку подмногообразий тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество вида:*

$$\alpha[x, y]y + \beta y[x, y] = 0,$$

где $\alpha, \beta \in F$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Недавно Ю. Н. Мальцев [19] описал почти коммутативные многообразия ассоциативных колец.

По прежнему большой интерес вызывает проблема конечной базируемости многообразий колец и алгебр. Известны результаты И. В. Львова [20, 21] (см. также Крузе [22]), Ю. А. Бахтурина и А. Ю. Ольшанского [23] о том, что любое многообразие колец, порожденное одним конечным кольцом Ли или конечным ассоциативным кольцом, является конечно базируемым. Недавно С. В. Полин (Москва) доказал существование конечных колец, порождающих не конечно базируемые многообразия. И. В. Львов доказал следующую теорему:

Теорема. *Пусть R — конечное кольцо без делителей нуля. Тогда R порождает конечно базируемое многообразие колец.*

Отметим для полноты работы Воон-Ли [24] и Дренского [25], в которых построены не конечно базируемые многообразия алгебр Ли над произвольным бесконечным полем характеристики $p>0$.

Наибольший интерес в теории многообразий колец и алгебр представляет, конечно, известная проблема Шпехта о конечной базируемости многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль. Различные положительные результаты по этой проблеме принадлежат В. Н. Латышеву [26], М. Б. Гаврилову [27]. По понятным причинам не имеем возможности подробно останавливаться на этих результатах. Отметим только, нчто В. Н. Латышевым [26] разработан весьма перспективный метод доказательства шпехтовости различных многообразий.

(Новый значительный шаг в решении проблемы Шпехта был сделан недавно в работах В. Н. Латышева [38], Г. К. Генова [39] и А. П. Попова [40] (прим. редактора).)

4. Кольца и их группы автоморфизмов. Пусть R — (ассоциативное) кольцо, G — некоторая группа автоморфизмов R, $G \subset \mathrm{Aut}(R)$. Через R^G будем обозначать подкольцо инвариантов группы G. Интересно установить связь между свойствами подкольца R^G и всего кольца R. В этом направлении работали различные авторы, в частности Бергман и Айзекс [28], К. И. Бейдар [35], В. К. Харченко. Следующие результаты принадлежат В. К. Харченко [29; 30].

Теорема 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо, G — его конечная группа автоморфизмов и предположим, что в R нет адитивного $|G|$-кручения. Тогда, если R^G — PI-кольцо, то и R — PI-кольцо.*

Эта теорема отвечает на вопрос, сформулированный в [28]. Отметим, что в последней работе было доказано, что если в R нет $|G|$-кручения и $R^G=0$, $|G|<\infty$, то R — нильпотентное кольцо.

Теорема 2. *Пусть R — полупервичное кольцо без $|G|$-кручения, где G — конечная группа автоморфизмов кольца R. Тогда R — правое кольцо Голди тогда и только тогда, когда R^G — правое кольцо Голди.*

Фейт [31] доказал, что если R — область Оре, то и R^G — область Оре (без ограничения на характеристику).

Теорема 3. *Пусть R — первичное кольцо. Если в R выполняется нетривиальное обобщенное тождество с автоморфизмами из произвольной группы G, то центральное замыкание RC кольца R в кольце частных*

$$R_{\mathcal{F}} = \lim_{I \in \mathcal{F}} \mathrm{Hom}_R({}_R I, R),$$

где $\mathcal{F}$ — сильный фильтр ненулевых двусторонних идеалов кольца R является примитивным кольцом с ненулевым цоколем и соответствующее ему тело D — конечномерно над центром.

Эта теорема обобщает теорему Мартиндейла [32], которая касается обобщенных тождеств (т. е. тождеств с коэффициентами из кольца) без автоморфизмов.

Теорема 4. *Пусть R — полупервичное кольцо, G — его конечная группа автоморфизмов. Тогда $R^G \neq 0$.*

Метод доказательства предыдущих теорем, развитый В. К. Харченко, существенно использует свойства колец, частных относительно различных радикальных фильтров.

Приведем в заключении следующую проблему:

(10) Изучить строение ассоциативных колец R с конечной группой автоморфизмов G, таких, что $R^G=0$.

5. Некоторые проблемы теории колец

(1) Описать многообразия (ассоциативных, лиевых) алгебр с ассоциативным произведением подмногообразий.

Л. А. Бокуть, Ю. Н. Мальцев, А. А. Урман

(2) Описать группоид многообразий ассоциативных алгебр с единицей.

Л. А. Бокуть

(3) Для каких многообразий $\mathfrak{M}$ колец (алгебр) группоид $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ подмногообразий является свободным? Когда $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ — свободная полугруппа?

Л. А. Бокуть

(4) Описать многообразия колец (алгебр) с дистрибутивной решеткой подмногообразий.

Л. А. Бокуть

(5) Изоморфны ли решетки подмногообразий ассоциативных алгебр и алгебр Ли?

Л. А. Бокуть

(6) Разрешима ли проблема равенства для ассоциативных алгебр с одним соотношением?

Л. А. Бокуть, А. И. Ширшов

(7) (Известная проблема) Будет ли каждый автоморфизм алгебры многочленов $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от n переменных ($n\geq 3$) ручным (т. е. произведением элементарных автоморфизмов)?

Л. А. Бокуть

(8) (Известная проблема) Пусть f: $x_i \to f_i$, $1\leq i\leq n$ — отображение алгебры многочленов $F[x_1, \ldots, x_n]$ в себя, где $n\geq 2$, F — поле характеристики нуль. Если якобиан $(\partial f_i/\partial x_j)$ этого отображения равен 1, то будет ли f автоморфизмом?

Л. А. Бокуть

(9) (Известная проблема) Будет ли каждый автоморфизм свободной алгебры $F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, где $n\geq 3$, ручным?

Л. А. Бокуть

(10) (Проблема Дрейзина) Пусть R — ассоциативное кольцо без ниль-идеалов, удовлетворяющее условию:

$$\forall\, x, y \in R, \exists\, m, n, k\colon [x^m, \underbrace{y^n, y^n, \ldots, y^n}_{k}] = 0.$$

Будет ли R коммутативным?

А. З. Ананьин, Л. А. Бокуть

(11) Пусть R — ассоциативное кольцо без ниль-идеалов, удовлетворяющее условию

$$\forall\, x, y \in R,\ \exists\, n > 1:\ (xy)^n = x^n y^n.$$

Будет ли R коммутативным?

Л. А. Бокуть, А. Р. Кемер

(12) Пусть R — ассоциативное кольцо без ниль-идеалов, удовлетворяющее условию

$$\forall\, x, y \in R,\ \exists\, n > 1:\quad (x+y)^n = x^n + y^n.$$

Будет ли R коммутативным?

Л. А. Бокуть, А. Р. Кемер

(13) Существует ли бесконечное критическое ассоциативное кольцо (кольцо называется критическим, если оно не лежит в многообразии, порожденном своими собственными факторами)?

И. В. Львов

(14) Описать локально матричные многообразия ассоциативных алгебр Будет ли локально матричным многообразие ассоциативных алгебр, определенное тождеством $[[x, y], y] = 0$? (Многообразие $\mathfrak{M}$ называется локально матричным, если любая к. п. алгебра из $\mathfrak{M}$ вложима в алгебру матриц над некоторым расширением основного поля).

Ю. Н. Мальцев

(15) Разрешима ли проблема равенства в классе разрешимых (данной ступени разрешимости) алгебр Ли?

А. И. Ширшов

(16) Описать алгебры Ли L, обертывающие чассоциативные алгебры $B_W(L)$, для которых обладают классическим телом астных.

Л. А. Бокуть, Ю. Н. Мальцев

(17) Разрешима ли проблема вложения в алгебре Ли с одним определяющим соотношением?

Г. П. Кукин

(18) Верно ли, что конечно порожденные подалгебры свободной алгебры Ли над полем характеристики нуль образуют подрешетку решетки всех ее подалгебр. Для характеристики $p > 0$ это верно.

Г. П. Кукин

(19) Верно ли, что минимальное число порождающих свободного произведения двух алгебр Ли равеч сумме таких же чисел компонент.

Г. П. Кукин

(20) Разрешима ли проблема вложения в свободном произведении алгебр Ли с разрешимой проблемой вложения?

Г. П. Кукин

(21) Описать подалгебры алгебры дифференцирований свободной алгебры Ли конечного ранга. Верно ли, что если L — свободная алгебра Ли бесконечного ранга α, то ее алгебра дифференцирований содержит любую алгебру Ли размерности не выше α?

Г. П. Кукин

(22) Существует ли бесконечное неассоциативное кольцо без собственных подколец?

И. В. Львов

(23) Будет ли каждое минимальное многообразие (неассоциативных) колец порождаться конечным кольцом?

И. В. Львов

(24) Будет ли каждое приведенное свободное кольцо ассоциативного кольца финитно аппроксимируемым?

И. В. Львов

(25) Будет ли нильпотентной алгебра над полем рациональных чисел, все алгебры собственные подалгебры которой нильпотентны?

И. В. Львов

(26) Описать все кольца, являющиеся центроидами некоторых колец.

И. В. Львов

(27) Найти базис тождеств полного кольца матриц порядка (порядка ≥ 2) над конечным полем.

И. В. Львов, Ю. Н. Мальцев

(28) Описать группу автоморфизмов свободной алгебры от 2-х порождающих в многообразии var K_n, K — поле.

Л. А. Бокуть, И. В. Львов, Ю. Н. Мальцев

(29) (Л. Смолл) Будет ли любая нильпотентная алгебра вложима в алгебру матриц над коммутативной алгеброй?

Л. Смолл

(30) (Ю. Лерон) Пусть кольцо матриц R_n кольца R имеет тип M_t. Следует ли отсюда, что кольцо R имеет тип M_k?

Ю. Н. Мальцев

(31) (Известная проблема) Будет ли радикал Джекобсона левого и правого нетерова кольца обобщенно нильпотентным?

В. К. Харченко

(32) Изучить строение колец, для которых существует конечная группа автоморфизмов, не имеющая ненулевых неподвижных точек.

В. К. Харченко

(33) (Л. Смолл) Будет ли радикал Джекобсона конечнопорожденного PI-кольца обобщенно нильпотентным?

В. К. Харченко

(34) Будет ли произвольная рекурсивно определенная подалгебра свободной алгебры Ли конечного ранга хигмановой? Это равносильно тому, что будет ли любая рекурсивно определенная алгебра Ли вложима в конечно определенную алгебру Ли?

Л. А. Бокуть

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Жуков. Приведенные системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах. *Мат. сб.*, **27**, 1950, № 2, 267—280.
2. А. И. Ширшов. Некоторые алгоритмические проблемы для ε-алгебр. *Сиб. мат. ж.*, **3**, 1962, № 1, 132—137.
3. А. И. Ширшов. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли. *Сиб. мат. ж.*, **3**, 1962, № 2, 292—296.

4. Л. А. Бокуть. Неразрешимость проблемы равенства и подалгебры конечно определенных алгебр Ли. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **36**, 1972, № 6, 1173—1219.
5. J. Lewin, T. Lewin. On ideals of free associative algebras generated by a single element. *J. Algebra*, **8**, 1968, No. 2, 248—255.
6. W. Dicks. On one-relator associative algebras. *J. London Math. Soc.*, **5**, 1972, No. 2, 249—252.
7. В. Н. Герасимов. О проблеме равенства для ассоциативных алгебр с одним порождающим. В сб. „Третья Всесоюзная конференция по математической логике", Новосибирск, 1974.
8. A. I. Malcev. On the immersion of an algebraic ring into a field. *Math. Ann.*, **113**, 1937, 686—691.
9. Л. А., Бокуть. Некоторые примеры колец без делителей нуля. *Алгебра и Логика*, **3**, 1964, № 5—6, 5—28.
10. Л. А. Бокуть. О вложении колец в тела, *Доклады АН СССР*, **175**, 1967, № 4, 755—758.
11. Л. А. Бокуть. О проблеме Мальцева. *Сиб. мат. ж.*, **10**, 1969, № 5, 965—1005.
12. A. Bowtell. On a question of Malcev. *J. Algebra*, **7**, 1967, No. 1, 126—139.
13. A. A. Klein. Rings nonembeddable in fields with multiplicative semigroups embeddable in groups. *J. Algebra*, **7**, 1967, No. 1, 100—125.
14. Коуровская тетрадь (Нерешенные задачи теории групп). Изд. 3, Новосибирск, 1969.
15. Ю. Н. Мальцев. Некоторые свойства произведений многообразий ассоциативных алгебр. *Алгебра и Логика*, **11**, 1972, № 6, 651—670.
16. А. И., Мальцев. О представлении бесконечных алгебр. *Мат. сб.*, **13**, 1943, 263—286.
17. И. В. Львов. Условия максимальности в алгебрах с тождественными соотношениями. *Алгебра и Логика*, **8**, 1969, № 4, 449—459.
18. А. З. Ананьин, А. Р. Кемер. Многообразия ассоциативных алгебр, решетки подмногообразий которых дистрибутивны. *Сиб. мат. ж.*, **17**, 1976, № 4, 723—730.
19. Ю. Н. Мальцев. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец. *Сиб мат. ж.* **17**, 1976, № 5, 1086—1096.
20. И. В. Львов. О многообразиях, порожденных конечными кольцами. X всесоюзный алгебраический коллоквиум, Новосибирск, 1969.
21. И. В. Львов. О многообразиях ассоциативных колец I. *Алгебра и Логика*, **12**, 1973, № 3, 269—297.
22. R. L. Kruse. Identities satisfied by a finite ring. *J. Algebra*, **26**, 1973, No. 2, 298—318.
23. Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский. Тождественные соотношения в конечных, кольцах Ли. *Мат. сб.*, **96** 1975, № 4, 543—559.
24. M. R. Vaughan-Lee. Varieties of Lie algebras. *Quart. J. Math., Oxford*, **21**, 1970, No. 83, 297—308.
25. В. С. Дренски. О тождествах в алгебрах Ли. *Алгебра и Логика*, **13**, 1974, № 3, 265—290.
26. В. Н. Латышев. О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **37**, 1973, № 5, 1010—1037.
27. М. Б. Гаврилов. Тождественные соотношения в ассоциативных алгебрах. *Дисертация*, София, 1970.
28. G. Bergman, I. Isaacs. Rings with fixed-point-free group actions. *Proc. London Math. Soc.*, **27**, 1973, No. 3, 69—87.
29. В. К. Харченко. Расширения Галуа и кольца частных. *Алгебра и Логика*, **13**, 1974, № 4, 460—484.
30. В. К. Харченко. Обобщенные тождества с автоморфизмами. *Алгебра и Логика*, **14**, № 2, 1975, 215—237.
31. C. Flith. Galois subrings of Ore domains are Ore domains. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**, 1972, No 6, 1077—1080.
32. W. Martindale. Prime rings satisfying a generalized polinomial identities. *J. Algebra*, **12**, 1969, No. 4, 576—584.
33. А. А. Урман. О многообразиях алгебр с коммутативным произведением подмногообразий. *Мат. исследования*, **10**, 1975, № 3, 157—180.
34. В. Барбаумов. Автоморфизмы и PI-алгебры. *Успехи мат. наук*, **28**, 1973, № 1, 231—232.
35. К. И. Бейдар. Кольцо инвариантов при действии конечной группы автоморфизмов, кольца. Всесоюзный алгебраический симпозиум, Гомель, 1975.

36. О. И. Доманов. О тождествах полугрупповых алгебр вполне O-простых полугрупп. *Мат. заметки*, **18**, 1975, № 2, 203—212.
37. Днепровская тетрадь проблем по теории колец и модулей. Кишинев, 1969.
38. В. Н. Латышев. Частично упорядоченные множества и нематричные тождества ассоциативных алгебр. *Алгебра и Логика*, **15**, 1976, № 1, 53—70.
39. Г. К. Генов. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр над полем. характеристики нуль. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 7, 937—940.
40. А. П. Попов. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр. *Плиска*, (в печати).

Институт математики СО АН СССР
630090 Новосибирск 90

Поступила 22. 2. 1977