Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

SUR LA CONDITION DE LEVI POUR DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE

VESSELIN M. PETKOV

On propose une forme de la condition de Levi pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable dans le cas où le symbole principal n'est pas diagonisable. Cette condition coïncide avec la condition, donnée par Y. Demay (1974) pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante et avec la condition de Levi, introduite par l'auteur et N. D. Kutev (1976) pour des systèmes hyperboliques à deux variables. On prouve l'invariance de la condition de Levi.

Pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante Y. Demay [3] a introduit une condition de Levi qui généralise dans le cas de doubles caractéristiques les conditions, données en [2] et [5]. On se propose d'étudier la même condition dans un sens microlocal pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques de miltiplicité variable et de prouver l'invariance de cette condition. Dans le cas des systèmes différentiels à deux variables nous avons prouvé en [4] une condition sur les termes d'order inférieur qui se relève nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé. Nous allons démontrer que la condition en [4] est équivalente à la condition donnée en Définition 1. En plus on va corriger quelques moments de la démonstration en [4] liés avec l'invariance.

1. Condition $L(x^\circ, \xi^\circ)$. Soit X' une variété C^∞ sans bord de dimention n, $X=\mathbf{R}\times X'$ la variété produit, $x=(x_0, x')=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ le point générique de X. On considère l'opérateur

$$P(x, D)=D_0+P_1(x, D')+P_0(x, D),$$

où $D_0=-i\partial/\partial x_0$, $P_1(x, D')\in L^1(X')$, $P_0(x, D)\in L^\circ(X)$ sont $(d\times d)$ opérateurs matriciels pseudo-différentiels proprement supportés. On suppose que le symbole de $P_1(x, D')$ dépend de façon C^∞ de la coordonnée x_0 et que dans chaque carte locale d'espace cotangent $T^*(X)$ avec coordonnées (x, ξ) les symboles $P_1(x, \xi')$, $P_0(x, \xi)$ possèdent un développement asymptotique

$$P_1(x, \xi')\sim \sum_{k=-1}^{\infty} q_{-k}(x, \xi'),\ P_0(x, \xi)\sim \sum_{k=0}^{\infty} p_{-k}(x, \xi),$$

où les fonctions $q_{-k}(x, \xi')$, $p_{-k}(x, \xi)$ sont positivement homogènes de degré $(-k)$ respectivement en ξ' et ξ. On note par $p(x, \xi)$ le symbole principal de P. Soit $p_0(x, \xi)$ le symbole d'ordre 0 de P, ${}^{co}p(x, \xi)$ la co-matrice de $p(x, \xi)$, $p_0'(x, \xi)$ le symbole sous-principal

$$p_0(x, \xi)=p_0(x, \xi)-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2 p(x, \xi)}{\partial\xi_k\partial x_k}.$$

On introduit le symbole (cf. [3])

$$l(x, \xi) = p'_0(x, \xi)\ {}^{co}p(x, \xi) + \frac{1}{2i}\{p, {}^{co}p\}(x, \xi),$$

où

$$\{p, {}^{co}p\} = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial({}^{co}p)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial({}^{co}p)}{\partial \xi_j}\right).$$

Définition 1. *Soit* $(x^\circ, \xi^\circ) \in T^*(X)\diagdown 0$ *un point tel que*

(1) $$(\det p)(x^\circ, \xi^\circ) = 0, \quad \mathrm{grad}_{\xi, x}(\det p)(x^\circ, \xi^\circ) = 0.$$

On dit que P *vérifie la condition* $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ *si la matrice* $l(x^\circ, \xi^\circ)$ *est divisible à droit par la matrice* $p(x^\circ, \xi^\circ)$, *c'esi-à-dire il existe une matrice* $\omega(x^\circ, \xi^\circ)$ *telle que*

(2) $$l(x^\circ, \xi^\circ) = p(x^\circ, \xi^\circ)\,\omega(x^\circ, \xi^\circ).$$

Nous allons prouver que $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ reste invariante après des multiplications de P par des opérateurs pseudo-différentiels microlocalement elliptiques.

Théorème 1. *Soit* $G(x, D), H(x, D) \in L^\circ(X)$ *deux opérateurs pseudo-différentiels, proprement supportés tels que*

$$(x^\circ, \xi^\circ) \notin WF(GH - I).$$

Alors P *vérifie* $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ *si et seulement si l'opérateur* $\widetilde{P} = HPG$ *vérifie la condition* $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$.

Démonstration. Soit (x, ξ) les coordonnées locales dans une carte locale contenante (x°, ξ°). Alors la matrice $G^{-1}(x, \xi)$ sera le symbole principal de H au voisinage conique Γ de (x°, ξ°). Donc après un calcul au niveau des opérateurs pseudo-différentiels on trouve qu'en Γ le symbole de $\widetilde{P}$ a la forme

$$\widetilde{P}(x, \xi) = G^{-1}pG + \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}[(G^{-1})_{\xi_k}(pG)_{x_k} + G^{-1}p_{\xi_k}G_{x_k}]$$

$$+ G^{-1}p_0G + G^{-1}pG_{-1} + H_{-1}pG \mod S^{-1}(\Gamma),$$

où G_{-1} et H_{-1} désignent les symboles d'order (-1) respectivement de G et H. Dans la suite on considère tous les symboles au point (x°, ξ°) et on supprime les notations (x°, ξ°).

On pose $\widetilde{p} = G^{-1}pG$ et on trouve que ${}^{co}\widetilde{p} = {}^{co}(G^{-1}pG) = G^{-1}\,{}^{co}pG$. Alors on a

(3) $$\{G^{-1}pG,\ G^{-1}\,{}^{co}p\,G\} = \{G^{-1}p, {}^{co}p\,G\} - \{G^{-1}p, G\}\,{}^{co}\widetilde{p} + \widetilde{p}\,\omega_1$$

$$= G^{-1}\{p, {}^{co}p\}G - [\{G^{-1}, p\}G + \{G^{-1}p, G\}]\,{}^{co}\widetilde{p} + \widetilde{p}\,\omega_2 + \det p A_1 + \sum_{k=0}^{n}((\det p)_{\xi_k}B_k$$

$$+ (\det p)_{x_k}C_k) = G^{-1}\{p, {}^{co}p\}\,G - [\{G^{-1}, p\}\,G + \{G^{-1}p, G\}]\,{}^{co}\widetilde{p} + \widetilde{p}\,\omega_2,$$

où ici et jusqu' à la fin de la démonstration on note par ω_j, A_j, B_j, C_j $(d \times d)$ matrices.

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{n}(\widetilde{p})_{\xi_k x_k}\,{}^{co}\widetilde{p} = \sum_{k=0}^{n}[(G^{-1}p)_{x_k}G_{\xi_k} + (G^{-1}p)_{\xi_k}G_{x_k}]\,{}^{co}\widetilde{p} + G^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{n}p_{x_k\xi_k}\Big)\,{}^{co}pG$$

$$+\sum_{k=0}^{n}[(G^{-1})_{x_k}p_{\xi_k}+(G^{-1})_{\xi_k}p_{x_k}]\,{}^{co}pG+\det pA_2$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(G^{-1}(p_{\xi_k x_k}\,{}^{co}p)G+2[(G^{-1}p)_{\xi_k}G_{x_k}+(G^{-1})_{\xi_k}p\,x_k^G]\,{}^{co}\widetilde{p})-[\{G^{-1}p,G\}+\{G^{-1},p\}G]\,{}^{co}\widetilde{p}$$
$$+\omega_2^1\widetilde{p}.$$

Le symbole d'order 0 de $\widetilde{P}$ a la forme

$$\widetilde{p}_0=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}(G^{-1})_{\xi_k}(pG)_{x_k}+(G^{-1})p_{\xi_k}G_{x_k}]+G^{-1}p_0G+\widetilde{p}\,\omega_3+\omega_4\widetilde{p}$$

donc il résulte que

$$\widetilde{p}_0'\,{}^{co}\widetilde{p}=(\widetilde{p}_0-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{p}_{\xi_k x_k})({}^{co}\widetilde{p})$$

$$=G^{-1}(p_0'\,{}^{co}p)G+\frac{1}{2i}[\{G^{-1},p\}G+\{G^{-1}p,G\}]({}^{co}\widetilde{p})+\widetilde{p}\,\omega_5.$$

Finalement on obtient

$$\widetilde{l}=\widetilde{p}_0'\,{}^{co}\widetilde{p}+\frac{1}{2i}\{\widetilde{p},\,{}^{co}\widetilde{p}\}=G^{-1}lG+\widetilde{p}\,\omega_6=\widetilde{p}\,\omega_7,\ \text{c.q.f.d.}$$

Afin de prouver que la condition $L_{(x^\circ,\xi^\circ)}$ ne dépend pas du choix des coordonnées en X il suffit de démontrer l'invariance du symbole $p_0'(x,\xi)\,{}^{co}p(x,\xi)$. Soit

$$p(x,\xi)=\{p_{k,j}(x,\xi)\}_{k,j=1}^{d},\quad p_0(x,\xi)=\{p_{0,k,j}(x,\xi)\}_{k,j=1}^{d},$$
$$p_{0,k,j}'(x,\xi)=p_{k,j}(x,\xi)-\frac{1}{2i}\sum_{\mu=0}^{n}\frac{\partial^2 p_{k,j}(x,\xi)}{\partial\xi_\mu\,\partial x_\mu}.$$

Supposons que $x=(x_0,x_1,\dots,x_n)$, $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$ sont deux systèmes de coordonnées au voisinage de $x^\circ\in X$. On note par (x,ξ) et $(\widetilde{x},\widetilde{\xi})$ les coordonnées qui correspondent dans l'espace cotangent $T^*(X)$. Le symbole scalaire $p_{0,k,j}'$ n'est pas invariant par le choix de coordonnées mais nous allons profiter du fait qu'on a la différence

$$p_{0,k,j}'(x,\xi)-p_{0,k,j}'(\widetilde{x},\widetilde{\xi})=\sum_{m=0}^{n}c_m(x)\frac{\partial p_{k,j}(x,\xi)}{\partial\xi_m},\tag{4}$$

où les fonctions

$$c_m(x)=\frac{i}{2}\sum_{k,\mu=0}^{n}\frac{\partial^2 x_k}{\partial\widetilde{x}_m\,\partial\widetilde{x}_\mu}\,\frac{\partial\widetilde{x}_\mu}{\partial x_k}$$

ne dépendent que du choix des coordonnées x et $\widetilde{x}$ [7, § 2]. Les égalités (4) entrainent

$$p_0'(x,\xi)\,{}^{co}p(x,\xi)=p_0'(\widetilde{x},\widetilde{\xi})\,{}^{co}p(\widetilde{x},\widetilde{\xi})+\sum_{m=0}^{n}c_m(x,\xi)\frac{\partial p(x,\xi)}{\partial\xi_m}\,{}^{co}p(x,\xi)$$

$$=p_0'(\widetilde{x},\widetilde{\xi})\,{}^{co}p(\widetilde{x},\widetilde{\xi})+\sum_{m=0}^{n}(\det p)_{\xi_m}c_m(x,\xi)+p\omega_8$$

avec les notations introduites dans la démonstration du théorème 1. Cela prouve l'invariance de $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ grâce à la condition (1). De la même manière on obtient l'invarience de $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ après une transformation canonique homogène χ, déterminée au voisinage conique de (x°, ξ°). Pour cela il faut remplacer (4) par les égalités

$$p'_{0,k,j}(x,\xi)-p_{0,k,j}(y,\eta)=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\partial p_{k,j}}{\partial \xi_m}(x,\xi)\,c_m(x,\xi)+\frac{\partial p_{k,j}}{\partial x_m}(x,\xi)d_m(x,\xi)\right), \tag{5}$$

où les symboles $c_m(x,\xi)$ et $d_m(x,\xi)$ ne dépendent que du choix de coordonnées (x,ξ) et (y,η) en $T^*(X)$, liées avec la transformation χ.

2. Systèmes hyberboliques. Dans les sections 2,3 on va étudier la condition $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ pour des systèmes de la forme $P=D_0+\sum_{j=1}^{n}A_j(x)D_j+B(x)$, où $D_j=-i\partial/\partial x_j$, $A_j(x)$, $B(x)$ sont des $(d\times d)$ matrices à coefficients C^∞. Nous allons employer les notations de la section 1. Dans la suite de ce travail on considère des systèmes qui vérifient l'hypothèse de hyperbolicité:

Définition 2. *On dit que l'opérateur P vérifie la condition* (H) *si pour tous* $(x,\xi')\in \mathbf{R}\times T^*(X')\setminus 0$ *tous les racines de l'équation*

$$\det p(x,\xi_0,\xi')=0 \tag{6}$$

par rapport à ξ_0 sont réelles.

La condition (1) est une conséquence de la lemme suivante due de Ivrij [6, § 8].

Lemme 2. *Supposons que P vérifie la condition* (H). *Alors les égalités*

$$(\det p)(x^\circ,\xi^\circ)=0,\quad \frac{\partial(\det p)}{\partial\xi_0}(x^\circ,\xi^\circ)=0 \tag{7}$$

impliquent (1). *En plus si* $\dfrac{\partial^2(\det p)}{\partial\xi_0^2}(x^\circ,\xi^\circ)=0$ *on a*

$$(\det p)_{\xi\xi}(x^\circ,\xi^\circ)=(\det p)_{\xi x}(x^\circ,\xi^\circ)=(\det p)_{xx}(x^\circ,\xi^\circ)=0, \tag{8}$$

où $(\det p)_{\xi\xi}$, $(\det p)_{\xi x}$, $(\det p)_{xx}$ *désignent des matrices formées par les dérivées de deuxième order de* $\det p$.

La lemme 2 rend possible l'application des résultats de la section 1 pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples. D'autre part la condition $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ n'est pas triviale si au voisinage conique de (x°,ξ°) la co-matrice n'est pas identiquement 0. Dans la suite on se place dans le cas où le point (x°,ξ°) vérifie l'hypothèse

$$(\det p)(x^\circ,\xi^\circ)=0 \Rightarrow \operatorname{rank} p(x^\circ,\xi^\circ)=d-1. \tag{R}$$

Pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante la condition introduite par Demay [8] exige pour toute racine double $\xi_0=\lambda_j(x,\xi')$ de (6) l'existence d'une symbole $\omega_j(x,\xi)$ tel que $l(x,\xi)=p(x,\xi)\,\omega_j(x,\xi)$ sur la variété $\xi_0=\lambda_j(x,\xi')$. Dans ce cas si (R) est satisfaite au point $(x^\circ,\lambda_j(x^\circ,\xi'^\circ),\xi'^\circ)$ on peut trouver microlocalement un vecteur $L_j(x,\xi')\neq 0$ qui forme une base C^∞ dans le noyau de la matrice $p^*(x,\lambda_j(x,\xi'),\xi')$ (a^* désigne la matrice adjointe de a). Alors l'existence microlocale de $\omega_j(x,\xi)$ équivaut à la condition

$$L_j(x,\xi)\,l(x,\lambda_j(x,\xi'),\xi')=0. \tag{9}$$

Les symboles $l(x,\xi)$ et $L_j(x,\xi')$ dépendent de la forme de $p(x,\xi)$ et $p_0(x,\xi)$. Supposons que $\xi_0=\lambda(x,\xi')$ est une racine de (6) à multiplicité constante r et posons $\xi_0^0=\lambda(x^\circ, \xi'^\circ)$. Supposons en plus que (x°, ξ°) vérifie (R). Alors au voisinage conique Γ de (x°, ξ°) on peut trouver [5, § 1] un symbole $G(x, \xi')$, homogène de degré 0 en ξ' tel que

$$G^{-1}(x, \xi')\, p(x, \xi)\, G(x, \xi') = (\xi_0-\lambda_j(x, \xi'))\, I + \begin{pmatrix} N|\xi'| & \\ & Q(x, \xi') \end{pmatrix}, \tag{10}$$

où I est $(d\times d)$ matrice d'identité,

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$Q(x, \xi')$ est une $(d-r)\times(d-r)$ matrice, invertible en Γ. Il en découle que les vecteurs

$$R_j(1, 0, \ldots, 0),\quad L_j=(\underbrace{0, \ldots,}_{r-1} 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

orment microlocalement des bases dans les noyaux de $p(x, \lambda_j(x, \xi'), \xi')$ et $p^*(x, \lambda_j(x, \xi'), \xi')$ respectivemenf. Il résulte facilement que la condition $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ équivaut à l'égalité

$$\langle L_j, p_0(x^\circ, \xi^\circ)\, R_j\rangle=0, \tag{11}$$

où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire en $\mathbf{C}^d$.

Dans le cas général où P admet des caractéristiques à multiplicité variable il n'est pas toujours possible de réduire le symbole principal $p(x, \xi)$ à la forme (10). Voilà pourquoi nous allons faire une réduction qui répose sur le résultat d'A r n o l' d [1] concernant la forme locale d'une matrice.

Supposons que $(x^\circ, \xi^\circ)\in T^*(X)\setminus 0$ vérifie la condition (R) et que

$$\begin{cases} (\det p)(x^\circ, \xi^\circ)=0, & \dfrac{\partial^k(\det p)}{\partial\xi_0^k}(x^\circ, \xi^\circ)=0, \\ k=1, \ldots, r-1, & \dfrac{\partial^r(\det p)}{\partial\xi_0^r}(x^\circ, \xi^\circ)\neq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Après un changement de variables et après des multiplications par des matrices invertibles on peut supposer que $x^\circ=0$, $\xi^\circ=(0, \ldots, 0, 1)$,

$$A_n(0)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & \\ \hline & & & & & Q_0 \end{array}\right),$$

où Q_0 est une $(d-r)\times(d-r)$ matrice invertible et constante. Soit $A_j(x)=\Sigma_{|\alpha|\leq M}\, x^\alpha A_{j,\alpha}+O(|x|^{M+1})$, $M\geq 2$, où $A_{j,\alpha}$ sont des matrices constantes. On considère la fonction matricielle $a(x, \eta)=\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|\leq M} x^{\alpha} A_{j,\alpha}\eta_j$, $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, où $\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2=1$. D'après Arnol'd [1] au voisinage de (x°, ξ°) il existe une matrice $g(x, \eta)$ qui est une fonction analytique de (x, η) telle que

$$g^{-1}(x, \eta)\, a(x, \eta)\, g(x, \eta)=\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ a_1(x,\eta) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_r(x,\eta) & \\ \hline & & & & & & Q(x,\eta) \end{array}\right).$$

Les fonctions $a_j(x, \eta)$, $Q(x, \eta)$ dépendent analytiquement de (x, η) et en plus $a_j(0, \ldots, 0, 1)=0$, $j=1, \ldots, r$, $Q(0, \ldots, 0, 1)=Q_0$. On prolonge $g(x, \eta)$, $a_j(x, \eta)$, $Q(x, \eta)$ comme des fonctions homogènes de degré 0 en η et on trouve au voisinage conique Γ de $(x_{\circ}, \xi^{\circ})$ un symbole $G(x, \xi)$ tel que

$$G^{-1}(x, \xi)\, p(x, \xi) G(x, \xi) \tag{13}$$

$$=\xi_0 I+\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_r & \\ \hline & & & & & & Q \end{array}\right)|\xi'|+O(|x|^{M+1}).$$

Soit $H(x, D)$, $G(x, D)\in L^{\circ}(X)$ deux opérateurs pseudo-différentiels, proprement supportés à symboles principaux $G^{-1}(x, \xi)$, $G(x, \xi)$, tels que $(x^{\circ}, \xi^{\circ})\notin WF(GH-I)$. Posons $\widetilde{P}=HPG$ et notons par $\widetilde{p}(x, \xi)$ et $\widetilde{p}_0(x, \xi)$ respectivement le symbole principal et le symbole d'order 0 de $\widetilde{P}$. Soit

$$\det p=\det \widetilde{p}=(\xi_0^r+\sum_{j=0}^{r-1} a_{j+1}(x, \xi')|\xi'|^{r-j}\xi_0^j)\det(\xi_0 I+Q)=\xi_0^d+\sum_{j=0}^{d-1} b_j(x, \xi')|\xi'|^{d-j}\xi_0^j.$$

Si $(\det p)(x, \xi)$ est un polynôme hyperbolique au sens de la définition 2 il en est de même pour les polynômes $\frac{\partial^k(\det p)}{\partial\xi_0^k}(x, \xi)$, $k=1, \ldots, r-1$. D'après lemme 2 cela revient à montrer que

$$\mathrm{grad}_{\xi', x}(\partial^k(\det p)/\partial\xi_0^k)(x^{\circ}, \xi^{\circ})=0,\ k=1, \ldots, r-2.$$

Il en résulte

$$(\mathrm{grad}_{\xi', x}\, b_k)(x^{\circ}, \xi^{\circ})=0, \quad k=1, \ldots, r-2$$

qu'entraine grâce à la condition $\det Q_0(x^{\circ}, \xi^{\circ})\neq 0$ les égalités

$$(\mathrm{grad}_{\xi', x}\, a_k)(x^{\circ}, \xi^{\circ})=0, \quad k=1, \ldots, r=1. \tag{14}$$

Maintenant nous allons calculer $L\{\widetilde{p}, {}^{co}\widetilde{p}\}(x^{\circ}, \xi^{\circ})$, où $L=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-1}, 1, 0, \ldots, 0)$.

Il suffit de déterminer la $r^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\{\widetilde{p}, {}^{co}\widetilde{p}\}$. D'autre part les égalités (14) montrent qu'il est nécessaire de calculer la $r^{\text{ème}}$ ligne de ${}^{co}\widetilde{p}(x, \xi)$. On obtient aisément que les éléments $q_{r,k}(x, \xi)$, $k \neq r$ de cette ligne sont des combinations linéaires des symboles $a_1, \ldots, a_{r-1}$. L'élément $q_{r,r}(x, \xi)$ a la forme $\xi_0^{r-1} \det Q$. De telle manière on trouve

$$L\{\widetilde{p}, {}^{co}\widetilde{p}\}(x^\circ, \xi^\circ) = \begin{cases} (0, \ldots, 0), & r \geqq 3, \\ (0, \ldots, 0, -(\frac{\partial a_2}{\partial \xi_0} \det Q)(x^\circ, \xi^\circ)), & r = 2. \end{cases}$$

Finalement la condition $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ équivaut à l'égalité

$$\langle L, \widetilde{p}_0 (x^\circ, \xi^\circ) R \rangle = 0, \qquad r \geqq 3, \tag{15}$$

$$\langle L, \widetilde{p}_0 (x^\circ, \xi^\circ) R \rangle + \frac{1}{2i} \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x_0}(x^\circ, \xi^\circ) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 a_1(x^\circ, \xi^\circ)}{\partial \xi_k \partial x_k}\Big) = 0, \quad r = 2, \tag{16}$$

où $R = (1, 0, \ldots, 0)$. Dans le cas $r \geqq 3$ nous avons employé lemme 2 afin d'obtenir $(\det p)_{\xi x}(x^\circ, \xi^\circ) = 0$. Les formes (15), (16) de $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ correspondent à (11) dans le cas des systèmes à caractéristiques de multiplicité variable. On peut écrire (15), (16) à la manière suivante

$$L(\widetilde{p}_0\, {}^{co}\widetilde{p})(x^\circ, \xi^\circ) - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} (\det \widetilde{p})_{\xi_k x_k}(x^\circ, \xi^\circ) = 0. \tag{17}$$

Après un changement de variables on peut simplifier le deuxième terme en (17) qui est trivial si $r \geqq 3$.

3. Systèmes hyperboliques à deux variables. Soit $P = D_0 + A(x)D_1 + B(x)$, $x = (x_0, x_1)$. En [4] nous avons introduit une condition qui est nécessaire pour que le problème de Cauchy pour P soit bien posé dans le cas où la matrice fondamentale de $(\det p)(x, \xi)$ ne possède pas des valeurs propres non zéro dans les points où $p(x, \xi)$ n'est pas diagonisable.

Soit $x^\circ \in X$, $\xi_1^0 = 1$, $\lambda(x^\circ)$ une valeur propre de $A(x^\circ)$ à multiplicité $r \geqq 2$. Soit rank $A(x^\circ) = d - 1$, $(-\lambda(x^\circ)I + A(x^\circ)) = C(x^\circ)$. On introduit les vecteurs R, L, R_1, L_1 pour lesquels on a

$$C(x^\circ)R = 0, \; C^*(x^\circ)L = 0, \; C(x^\circ)R_1 = R, \; C^*(x^\circ)L_1 = 0.$$

Enfin on pose $\partial/\partial\tau = \partial/\partial x_0 + \lambda(x^\circ)\partial/\partial x_1$.

Définition 3. *On dit que l'opérateur P vérifie la condition $\widetilde{L}(x^\circ)$ si*

$$\langle L, BR \rangle (x^\circ) - \frac{1}{2i} [\langle L_1, \frac{\partial A}{\partial \tau}(x^\circ)R \rangle - \langle L, \frac{\partial A}{\partial \tau}(x^\circ)R_1 \rangle] = 0. \tag{18}$$

Pour la démonstration d'invariance de $\widetilde{L}(x^\circ)$ nous avons utilisé en [4] les égalités

$$\langle L, A_{x_j}(x^\circ)R \rangle = 0, \quad j = 0, 1 \tag{19}$$

dont la démonstration reposait sur l'existence des bases régulières dans les noyaux de $p(x, \xi)$ et $p^*(x, \xi)$. Dans le cas général cette hypothèse n'est pas satisfaite et nous allons prouver (19) en utilisant des raisonnements liés avec la co-matrice. Il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $R = {}^{co}p(x^\circ, \xi^\circ)v$, où $\xi^\circ = (-\lambda(x^\circ), 1)$. Donc pour $j = 0, 1$ on a dans le point (x°, ξ°)

$$\langle L, p_{x_j} R\rangle = \langle L, p_{x_j}\, {}^{co}pv\rangle = (\det p)_{x_j} \langle L, v\rangle - \langle L, p\,({}^{co}p)_{x_j}\, v\rangle = 0$$

et cela implique (19).

Après cette correction on peut utiliser la démonstration d'invariance de $\widetilde{L}(x^\circ)$ après un changement de variables et après des multiplications par des matrices invertibles, donnée dans [4, § 1]. La démonstration d'égalité (12) en [4] exige aussi une correction qui découle de la forme locale de $\widetilde{A}(x)$ donnée ci-dessous en (20). Nous allons démontrer que $\widetilde{L}(x^\circ)$ coïncide avec la condition $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$.

Proposition 3. *Soit $x^\circ \in X$ avec des propriétés, expliquées ci-dessus $\xi^\circ = (-\lambda(x^\circ), 1)$. Alors les conditions $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ et $\widetilde{L}(x^\circ)$ sont équivalentes.*

Démonstration. On suppose que $x^\circ = 0$, $\xi^\circ = (0, 1)$ et cela ne change pas le problème. On répète la construction en section 2 et on trouve une matrice $G(x)$ telle que

$$G^{-1}(x)A(x)G(x) = \widetilde{A}(x) \tag{20}$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ a_1(x) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_r(x) & \\ \hline & & & & & & Q(x) \end{array}\right) + O(|x|^{M+1}),$$

où $a_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, r$, $Q(x)$ est une $(d-r)\times(d-r)$ matrice invertible au voisinage de 0. Dans le cas $r \geq 3$ on obtient $\operatorname{grad}_x a_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, r-1$ et dans le cas $r = 2$ on a

$$\left(\langle L_1, \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x_0} R\rangle - \langle L, \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x_0} R_1\rangle\right)(0) = -\frac{\partial a_2}{\partial x_0}(0)$$

qu'implique l'équivalence de $L_{(x^\circ, \xi^\circ)}$ et $\widetilde{L}(x^\circ)$ selon les égalités (15) et (16)

BIBLIOGRAPHIE

1. В. И. Арнольд. О матрицах, зависящих от параметров. *Успехи мат. наук*, 26, 1971, № 2, 101—114.
2. R. Berzin. Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **275**, 1972, A1091—A1094.
3. Y. Demay. Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques doubles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **278**, 1974, A771—A773.

4. В. М. Петков, Н. Д. Кутев. О регулярно гиперболических системах первого порядка. *Годишник Соф. унив., мат. фак.*, **67**, 1976, 375—389.

5. В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для несимметризуемых гиперболических систем. *Труды семинара им И. Г. Петровского,* вып. 1, 1975, 211—236.

6. В. Я. Иврий, В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений. *Успехи мат. наук*, **29**, 1974, № 5, 3—70.

7. В. Н. Туловский. Распространение особенностей операторов с характеристиками постоянной кратности. *Труды Моск. мат. о-ва,* 1978 (в печати).

8. Y. Demay. Paramétrix pour des systèmes hyperboliques du premier ordre à multiplicité constante. *J. Math. pures et appl.*. **56**, 1977, No. 4, 393—422.

Centre for Research and Education in Mathematics and Mechanics
1000 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 7. 3. 1977